Ens. : D. Strütt
Analyse III - GC et IN
16 janvier 2024
Durée : 180 minutes

0

Corrigé

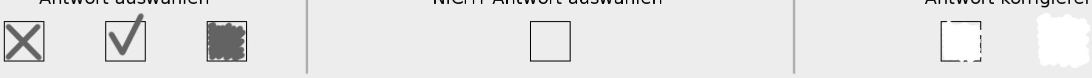
SCIPER : **000000**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides et 21 questions. Ne pas dégrafer.

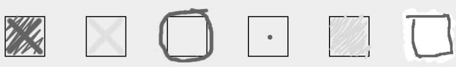
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- Ne pas dégrafer l'examen.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - + le nombre de points indiqué si la réponse est correcte,
  - 0 point si il y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Première partie, questions à choix multiple sur l'analyse vectorielle

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 *(4 points)* Soit le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y) = e^x \cos(x+y).$$

Alors, le laplacien de f, Δf est donné par :

Solution : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =& e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y) \\ &- e^x \sin(x+y) - e^x \cos(x+y) \\ =& -2e^x \sin(x+y)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos(x+y),$$

d'où,

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x(2\sin(x+y) + \cos(x+y).$$

- ☐ $\Delta f(x,y) = 0$
- ■ $\Delta f(x,y) = -e^x(2\sin(x+y) + \cos(x+y))$
- ☐ $\Delta f(x,y) = -e^x \sin(x+y)$
- ☐ $\Delta f(x,y) = -2e^x \cos(x+y)$

CORRECTION

Question 2 *(6 points)* Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{3x-2y}{x^2+y^2}, \frac{2x+3y}{x^2+y^2}\right).$$

Alors,

Solution : Paramétrisons le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1 par $\gamma\colon [0,2\pi] \to \Gamma$ par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Alors $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ et

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F dl &= \int_0^{2\pi} \langle (3\cos(t) - 2\sin(t), 2\cos(t) + 3\sin(t)), (-\sin(t), \cos(t))\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sin^2(t) + 2\cos^2(t) dt = 4\pi \neq 0.\end{aligned}$$

De plus, notons que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x+3y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 6xy - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{-2(x^2+y^2) - 2y(3x-2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 6xy - 2x^2}{(x^2+y^2)^2},\end{aligned}$$

d'où $\operatorname{rot} F = 0$.

- ☐ F dérive d'un potentiel .
- ☐ Si Γ est le cercle centré en $(0,2)$ de rayon 1, $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ■ Si Γ est le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ $\operatorname{rot} F \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.

Question 3 *(6 points)* Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Alors,

Solution : Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\,y\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = F_1(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\,\frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = F_2(x,y),$$

d'où F dérive d'un potentiel.

- ☐ Si Γ est le cercle centré en $(0,2)$ de rayon 1, $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ■ F dérive d'un potentiel.
- ☐ $\operatorname{rot} F \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.
- ☐ Si Γ est le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ et F ne dérive pas d'un potentiel.

Question 4 *(2 points)* Soit Ω, le triangle de sommets $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ et le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = (y, 2x).$$

Si on oriente le bord du triangle $\partial\Omega$ positivement, l'intégrale $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$ vaut :

Solution : On a $\operatorname{rot} F = 2 - 1 = 1$. Ainsi, par le théorème de Green,

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_\Omega 1 dxdy = \text{Aire}(\Omega) = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2.$$

- ■ $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 2$
- ☐ $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 0$
- ☐ $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 4$
- ☐ $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 8$

Correction

Question 5 *(2 points)* Soit le domaine régulier

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 9\}.$$

Le bord de Ω a deux parties :

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\} \text{ paramétré par } \gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \ t \in [0, 2\pi],$$

et

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 9\} \text{ paramétré par } \gamma_2(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)), \ t \in [0, 2\pi].$$

Paramétrés ainsi, on a :

Solution : Les deux courbes parcourent un cercle dans le sens trigonométrique. Pour le cercle extérieur, Γ_2, cette orientation laisse le domaine à gauche et est donc positive. Pour le cercle intérieur, Γ_1, cette orientation laisse le domaine à droite et est donc négative.

- [ ] Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées négativement.
- [ ] Γ_1 est orientée positivement et Γ_2 est orientée négativement.
- [x] Γ_1 est orientée négativement et Γ_2 est orientée positivement.
- [ ] Γ_1 et Γ_2 sont toutes deux orientées positivement.

Question 6 *(4 points)* Soit le domaine régulier

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z, \ z < 1\}.$$

Son bord est composé de deux parties :

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z, \ z \leq 1\} \text{ paramétrée par } \alpha(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2)$$

et

$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z, \ z = 1\} \text{ paramétrée par } \beta(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1)$$

Considérons les normales associées $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$.

Solution : Σ est un parabolloïde avec un couvercle plat. Σ_1 est le parabolloïde, Σ_2 est le couvercle plat. On a

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2r \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\theta) \\ -2r^2\sin(\theta) \\ r \end{pmatrix}$$

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Soit en testant sur un dessin, soit en réalisant que sur Σ_1, on s'attend à ce que la troisième composante est négative et que sur Σ_2, on s'attend à ce que la troisième composante est positive, on obtient le résultat.

- [ ] $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux extérieures.
- [ ] $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est extérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est intérieure.
- [x] $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ est intérieure et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ est extérieure
- [ ] $\alpha_r \wedge \alpha_\theta$ et $\beta_r \wedge \beta_\theta$ sont toutes deux intérieures.

Question 7 *(3 points)* Soit $V = (V_1, V_2, V_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur tel que $|V| = 1$ et $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel constant défini par $F(x,y,z) = V = (V_1, V_2, V_3)$.
Soit encore $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier avec normale extérieure ν.
Alors :

Solution : Par le théorème de la divergence,

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} F dxdydz = 0,$$

vu que la divergence d'un champ vectoriel constant est nulle.

- ☐ $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = -\operatorname{Volume}(\Omega) + \operatorname{Aire}(\partial\Omega)$
- ☐ $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = \operatorname{Volume}(\Omega)$
- ■ $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = 0$
- ☐ $\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, ds = \operatorname{Aire}(\partial\Omega)$

Question 8 *(4 points)* Soient le champ scalaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y,z) = yz,$$

la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = \frac{9}{16}, \ 2 \le z \le 3, \ x, y \ge 0\},$$

paramétrée par

$$\sigma(\theta, z) = \left(\frac{3}{4}\cos(\theta), \frac{3}{4}\sin(\theta), z\right), \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ z \in [2,3]$$

et

$$I = \iint_{\Sigma} f ds.$$

Alors,

Solution : On a

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{3}{4}\sin(\theta) & \frac{3}{4}\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cos(\theta) \\ \frac{3}{4}\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\sigma_\theta \wedge \sigma_z| = \frac{3}{4}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(\sigma(\theta,z))|\sigma_\theta \wedge \sigma_z| d\theta dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \frac{3}{4}\sin(\theta) z \frac{3}{4} d\theta dz \\ &= \frac{9}{16}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_2^3 = \frac{9}{16}\frac{1}{2}(9-4) = \frac{45}{32}.\end{aligned}$$

- ■ $I = \frac{45}{32}$
- ☐ $I = \frac{75}{32}$
- ☐ $I = \frac{9\pi}{32}$
- ☐ $I = \frac{49\pi}{32}$

Deuxième partie, questions à choix multiple sur l'analyse de Fourier

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 9 *(4 points)* Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité}$$

Alors

Solution : On a $f(x) = 1 + x|x|$. Vu que $x|x|$ est impaire, et 1 est constant, on a

$$Fx|x| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
$$F1 = 1,$$

et donc par linéarité

$$Ff(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

- ☐ $a_0 \neq 0$ et $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$
- ☐ $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$
- ■ $a_0 \neq 0$ et $\forall n \geq 1$, $a_n = 0$
- ☐ $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $a_n = 0$

Question 10 *(3 points)* Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } -1 < x \le -\frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{étendue par 2-périodicité,}$$

et $Ff(x)$ sa série de Fourier. Alors, pour $x \in]-1, 1]$,

Solution : f vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série converge vers $\frac{f(x-0)+f(x-0)}{2}$, qui est différent de f si et seulement si f est discontinue. Ici, f est discontinue en $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 1.

- ■ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$
- ☐ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
- ☐ $Ff(x) = f(x)$ si et seulement si $x \notin \{0, 1\}$
- ☐ $Ff(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1]$

Question 11 *(3 points)* Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < x \le -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 \le x \le \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité,}$$

On admettra que ses coefficients de Fourier réels sont

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi - 1 \\ a_n &= \frac{-\sin(n)}{n} \qquad \forall n \ge 1 \\ b_n &= 0 \qquad \forall n \ge 1. \end{aligned}$$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ vaut :

Solution : On a

$$Ff(x) = \frac{\pi - 1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx).$$

En évaluant en 0

$$0 = \frac{\pi - 1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi^3 - \pi^2}{2}$
- ■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 2}{4}$

Question 12 *(3 points)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité,}$$

On admettra que ses coefficients de Fourier réels sont

$$\begin{aligned} a_0 =& \pi - 1 \\ a_n =& \frac{-\sin(n)}{n} \qquad \forall n \geq 1 \\ b_n =& 0 \qquad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ vaut :

Solution : Par l'identité de Parseval,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} 2 \int_1^{\pi} \frac{\pi^2}{4} dx =& \frac{(\pi-1)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} =& \frac{\pi}{2}(\pi - 1) - \frac{(\pi-1)^2}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} =& \frac{\pi - 1}{2} \end{aligned}$$

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi^3 - 2\pi^2 + 2\pi - 1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi^2 - \pi}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi^2 - 1}{4}$
- ■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$

Question 13 *(3 points)* Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité,}$$

On admettra que ses coefficients de Fourier réels sont

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi - 1 \\ a_n &= \frac{-\sin(n)}{n} \qquad \forall n \geq 1 \\ b_n &= 0 \qquad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k}$ vaut :

Solution : On a

$$Ff(x) = \frac{\pi - 1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx).$$

En évaluant en $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi - 1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} \underbrace{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}} \\ \frac{-1}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{2k} \end{aligned}$$

- [x] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k} = -1$
- [ ] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k} = 0$
- [ ] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k} = \pi - 1$
- [ ] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k)}{k} = \frac{\pi - 2}{4}$

Question 14 *(3 points)* Soit $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin(x) + 1.$$

Alors, la série de Fourier en cosinus de f, $F_c f(x)$ vaut :

Solution : L'extension paire puis périodique de n'importe quelle fonction continue est continue.

- [x] $\forall x \in [0, \pi]$, $F_c f(x) = \sin(x) + 1$
- [ ] $\forall x \in]0, \pi[$, $F_c f(x) = \sin(x) + 1$ et $F_c f(0) = F_c f(\pi) = 0$
- [ ] $\forall x \in [0, \pi[$, $F_c f(x) = \sin(x) + 1$ et $F_c f(\pi) = 0$
- [ ] $\forall x \in]0, \pi]$, $F_c f(x) = \sin(x) + 1$ et $F_c f(0) = 0$

Question 15 *(4 points)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Alors, $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f est donnée par :

Solution : On a

$$\mathcal{F}[4x^2 e^{-x^2}] = 4\mathcal{F}[x^2 e^{-x^2}] = i^2 4 \frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\mathcal{F}[e^{-x^2}]\right] = -4\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{e}^{-\frac{\alpha^2}{4}}\right] = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}} + \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\mathcal{F}[-2e^{-x^2}] = -2\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\hat{f}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

- ■ $\hat{f}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = (4\alpha^2 - 2)e^{-\alpha^2}$
- ☐ $\hat{f}(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2} - 4\frac{2 - 6\alpha^2}{(1+\alpha^2)^3}$

Question 16 *(3 points)* L'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4y^2}\cos(4y)dy$$

vaut :

Solution : On a

$$\begin{aligned} I =& \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4y^2}e^{-i4y}dx\right] \\ =& \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}\left[e^{-4y^2}\right](4)\right] \\ =& \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{16}{16}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}. \end{aligned}$$

- ☐ $I = 0$
- ☐ $I = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}$
- ☐ $I = \frac{1}{2\sqrt{2}e}$
- ■ $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}$

Question 17 *(4 points)* Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} e^{-(x-t)^2} dt.$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

Solution : Soit $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$ et $h(x) = e^{-x^2}$. Alors, $f(x) = g * h(x)$, et donc,

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\alpha)\hat{h}(\alpha) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} = 2\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5}{4}\alpha^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{5}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\frac{1}{5}}},$$

et donc,

$$f(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} e^{-\frac{x^2}{5}}.$$

☐ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-\frac{4x^2}{5}}$ ☐ $f(x) = \sqrt{\frac{2}{5}} e^{-\frac{x^2}{5}}$ ■ $f(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} e^{-\frac{x^2}{5}}$ ☐ $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{5}} e^{-\frac{4x^2}{5}}$

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 18: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8

Trouver $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique solution de l'équation

$$u''(x) + u'(x-\pi) + 6u(x+\pi) = 6 - 8\cos(x) - 6\sin(x) + 4\cos(2x)$$

Indication : On pourra utiliser sans démonstration que

$$\begin{aligned}
\sin(a+n\pi) &= (-1)^n \sin(a)\\
\sin(a-n\pi) &= (-1)^n \sin(a)\\
\cos(a+n\pi) &= (-1)^n \cos(a)\\
\cos(a-n\pi) &= (-1)^n \cos(a)
\end{aligned}$$

Solution
On cherche u sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{nB_n \cos(nx) - nA_n \sin(nx)\}\\
u''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{-n^2 A_n \cos(nx) - n^2 B_n \sin(nx)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x+\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n A_n \cos(nx) + (-1)^n B_n \sin(nx)\}\\
u'(x-\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n nB_n \cos(nx) - (-1)^n nA_n \sin(nx)\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
u''(x) + u'(x-\pi) + 6u(x+\pi) =& 3A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-n^2 A_n + (-1)^n nB_n + 6(-1)^n A_n\right) \cos(nx) \right.\\
& \left. \left(-n^2 B_n - (-1)^n nA_n + 6(-1)^n B_n\right) \sin(nx) \right\}\\
=& 6 - 8\cos(x) - 6\sin(x) + 4\cos(2x),
\end{aligned}$$

en identifiant terme à terme,

$$
\begin{array}{lll}
(n=0) & 3A_0 = 6 & \Rightarrow A_0 = 2 \\[2ex]
(n=1) & \begin{array}{l} -A_1 - B_1 - 6A_1 = -8 \\ -B_1 + A_1 - 6B_1 = -6 \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ B_1 = 1 \end{array} \\[2ex]
(n=2) & \begin{array}{l} -4A_2 + 2B_2 + 6A_2 = 4 \\ -4B_2 - 2A_2 + 6A_2 = 0 \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{l} A_2 = 1 \\ B_2 = 1 \end{array} \\[2ex]
(n \geq 3) & \begin{array}{l} -n^2A_n + (-1)^n nB_n + 6(-1)^n A_n = 0 \\ -n^2B_n - (-1)^n nA_n + 6(-1)^n B_n = 0 \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{l} A_n = 0 \\ B_n = 0 \end{array}
\end{array}
$$

c'est-à-dire,

$$u(x) = 1 + \cos(x) + \sin(x) + \cos(2x) + \sin(2x).$$

Question 19: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6

À l'aide des propriétés de la transformée de Fourier, trouver une solution $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation

$$9u(x) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u''(t) - 4u(t)\right) e^{-2|x-t|} dt = \frac{1}{x^2+1}.$$

Solution
Posons $f(x) = e^{-2|x|}$ et $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Alors, par la table des transformées de Fourier ligne 7, on a

$$\hat{f}(\alpha) = 2\mathcal{F}\left[x \mapsto \frac{e^{-|2x|}}{2}\right](\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+\alpha^2}.$$

De plus, l'équation s'écrit alors

$$9u + 2\left(\left(u'' - 4u\right) * f\right) = h.$$

En prenant la transformée des deux côtés, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[9u + 2\left(\left(u'' - 4u\right) * f\right)\right] =& \hat{h} \\
9\hat{u} + 2\mathcal{F}\left[\left(u'' - 4u\right) * f\right] =& \hat{h} \\
9\hat{u} + 2\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[u'' - 4u]\hat{f} =& \hat{h} \\
9\hat{u} + 2\sqrt{2\pi}\left(\mathcal{F}[u''] - 4\hat{u}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+\alpha^2} =& \hat{h} \\
9\hat{u} + 8(-\alpha^2\hat{u} - 4\hat{u})\frac{1}{4+\alpha^2} =& \hat{h} \\
9\hat{u} - 8\hat{u} =& \hat{h} \\
\hat{u} =& \hat{h},
\end{aligned}$$

et on déduit que $u = h$, i.e.

$$u(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Question 20: *Cette question est notée sur 7 points.*

□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 ■ 7

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in]-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

Donner la série de Fourier réelle de f.

Solution

Vu que f est impaire, on a $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$.

De plus, $(T = 2\pi)$, on a

Variante 1 : ramener le domaine d'intégration à $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(x) \sin(nx) dx \\ =& \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sinh(x) \sin(nx) dx}_{:= I_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n \overset{\text{IPP}}{=}& \underbrace{[\sin(nx)\cosh(x)]_0^{\pi}}_{=0} - n \int_0^{\pi} \cosh(x) \cos(nx) dx & \left| \begin{array}{ll} u = \sin(nx) & v = \cosh(x) \\ u' = n\cos(nx) & v' = \sinh(x) \end{array} \right. \\ =& -n \int_0^{\pi} \cosh(x) \cos(nx) dx \\ \overset{\text{IPP}}{=}& -n\,[\cos(nx)\sinh(x)]_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sinh(x) \sin(nx) dx}_{=I_n} & \left| \begin{array}{ll} u = \cos(nx) & v = \sinh(x) \\ u' = -n\cos(nx) & v' = \cosh(x) \end{array} \right. \\ =& -n \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \sinh(\pi) + n\cos(0) \underbrace{\sinh(0)}_{=0} - n^2 I \\ =& (-1)^{n+1} n \sinh(\pi) - n^2 I_n, \end{aligned}$$

donc,

$$I_n = (-1)^{n+1} \frac{n\sinh(\pi)}{1+n^2}$$

et

$$b_n = \frac{2}{\pi} I_n = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2}.$$

On conclut

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} \sin(nx).$$

Correction

Variante 2 : laisser le domaine d'intégration sur $[-\pi, \pi]$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(x) \sin(nx) dx}_{:= I_n}$$

$$\begin{aligned}
I_n &\overset{\text{IPP}}{=} \underbrace{[\sin(nx)\cosh(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - n \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\cos(nx) dx && \left| \begin{array}{ll} u = \sin(nx) & v = \cosh(x) \\ u' = n\cos(nx) & v' = \sinh(x) \end{array} \right. \\
&= -n \int_0^{\pi} \cosh(x)\cos(nx) dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} -n\,[\cos(nx)\sinh(x)]_{-\pi}^{\pi} - n^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(x)\sin(nx) dx}_{=I_n} && \left| \begin{array}{ll} u = \cos(nx) & v = \sinh(x) \\ u' = -n\cos(nx) & v' = \cosh(x) \end{array} \right. \\
&= -n \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \sinh(\pi) + n \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} \underbrace{\sinh(-\pi)}_{=-\sinh(\pi)} - n^2 I \\
&= (-1)^{n+1} 2n \sinh(\pi) - n^2 I_n,
\end{aligned}$$

donc,

$$I_n = (-1)^{n+1} 2 \frac{n \sinh(\pi)}{1+n^2}$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} I_n = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2}.$$

On conclut

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} \sin(nx).$$

Variante 3 : Trouver une primitive

Posons

$$I_n(y) = \int^y \sinh(x)\sin(nx) dx$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I_n &\overset{\text{IPP}}{=} \sin(ny)\cosh(y) - n \int^y \cosh(x)\cos(nx) dx && \left| \begin{array}{ll} u = \sin(nx) & v = \cosh(x) \\ u' = n\cos(nx) & v' = \sinh(x) \end{array} \right. \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \sin(ny)\cosh(y) \\
&\qquad - n\cos(ny)\sinh(y) - n^2 \underbrace{\int_0^y \sinh(x)\sin(nx) dx}_{=I_n(y)} && \left| \begin{array}{ll} u = \cos(nx) & v = \sinh(x) \\ u' = -n\cos(nx) & v' = \cosh(x) \end{array} \right. \\
&= \sin(ny)\cosh(y) - n\cos(ny)\sinh(y) - n^2 I_n(y),
\end{aligned}$$

Donc,

$$I_n(y) = \frac{\sin(ny)\cosh(y) - n\cos(ny)\sinh(y)}{1+n^2}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(x)\sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)\cosh(x) - n\cos(nx)\sinh(x)}{1+n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{(1+n^2)\pi} \Big(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \cosh(n\pi) - n \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \sinh(\pi) - \underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} \cosh(-\pi) + n \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} \underbrace{\sinh(-\pi)}_{=-\sinh(\pi)} \Big) \\
&= \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2} \sin(nx).$$

Variante 4 : Utiliser les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4i}(e^x - e^{-x})(e^{inx} - e^{-inx})dx \\
=& \frac{1}{4i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x} - e^{(1-in)x} - e^{-(1-in)x} + e^{-(1+in)x}dx \\
=& \frac{1}{4i\pi}\left[\frac{1}{1+in}e^{(1+in)x} - \frac{1}{1-in}e^{(1-in)x} + \frac{1}{1-in}e^{-(1-in)x} - \frac{1}{1+in}e^{-(1+in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
=& \frac{1}{4i\pi}\left(\frac{1}{1+in}e^{\pi}e^{in\pi} - \frac{1}{1-in}e^{\pi}e^{-in\pi} + \frac{1}{1-in}e^{-\pi}e^{in\pi} - \frac{1}{1+in}e^{-\pi}e^{in\pi}\right. \\
&\left. -\frac{1}{1+in}e^{-\pi}e^{-in\pi} + \frac{1}{1-in}e^{-\pi}e^{in\pi} - \frac{1}{1-in}e^{\pi}e^{-in\pi} + \frac{1}{1+in}e^{\pi}e^{-in\pi}\right) \\
=& \frac{1}{4i\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1+in}e^{\pi} - \frac{(-1)^n}{1-in}e^{\pi} + \frac{(-1)^n}{1-in}e^{-\pi} - \frac{(-1)^n}{1+in}e^{-\pi}\right. \\
&\left. -\frac{(-1)^n}{1+in}e^{-\pi} + \frac{(-1)^n}{1-in}e^{-\pi} - \frac{(-1)^n}{1-in}e^{\pi} + \frac{(-1)^n}{1+in}e^{\pi}\right) \\
=& \frac{1}{2i\pi}\left(e^{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1+in} - \frac{(-1)^n}{1-in}\right) + e^{-\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-in} - \frac{(-1)^n}{1+in}\right)\right) \\
=& \frac{(-1)^n}{i\pi}\sinh(\pi)\frac{(1-in)-(1+in)}{1+n^2} \\
=& \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2} \sin(nx).$$

Question 21: *Cette question est notée sur 12 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ■12

Soit la surface

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z = 2\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \right\}$$

et $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le champ vectoriel défini par

$$F(x, y, z) = (-y, x, y^2).$$

Vérifier le théorème de Stokes pour Σ et F.

Solution

On a

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour la paramétrisation de Σ, on utilise les coordonnées cylindriques : $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$. On a alors

$$0 \leq z = 2\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} - (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = 2r - r^2.$$

Remarquons que $2r - r^2 = z \geq 0 \Leftrightarrow r \in [0, 2]$. On choisit donc comme paramétrisation

$$\sigma(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, 2r - r^2\right), \qquad \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 2].$$

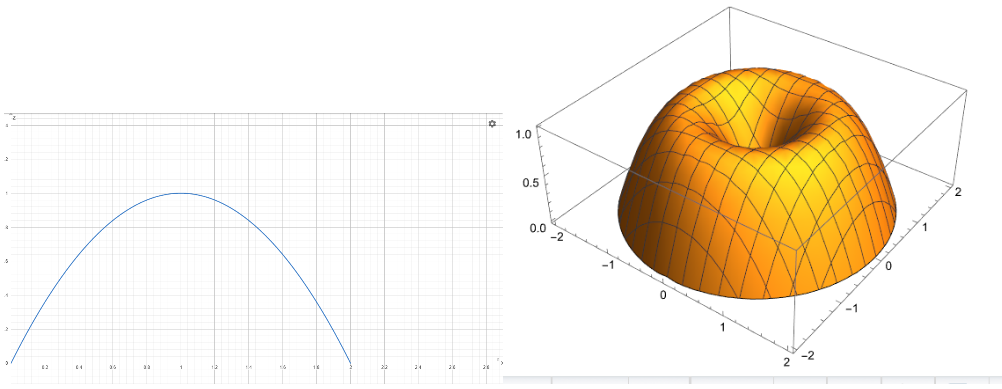


Figure 1: Une coupe de Σ dans le plan (r, z) et la surface qu'on obtient par rotation autour de l'axe O_z

On a alors

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2 - 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (2r^2 - 2r)\cos\theta \\ (2r^2 - 2r)\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \langle \operatorname{rot} F(\sigma(r,\theta)); \sigma_r \wedge \sigma_\theta\rangle \, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \big\langle (2r\sin\theta, 0, 2)\,; \big((2r^2-2r)\cos\theta, (2r^2-2r)\sin\theta, r\big)\big\rangle \, dr d\theta \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} (4r^3-4r^2)\sin\theta\cos\theta + 2r d\theta dr \\
&= \int_0^2 (4r^3-4r^2)\underbrace{\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}}_{=0} + 4\pi r dr \\
&= \left[2\pi r^2\right]_0^2 = 8\pi.
\end{aligned}$$

Passons à la paramétrisation de $\partial\Sigma$:

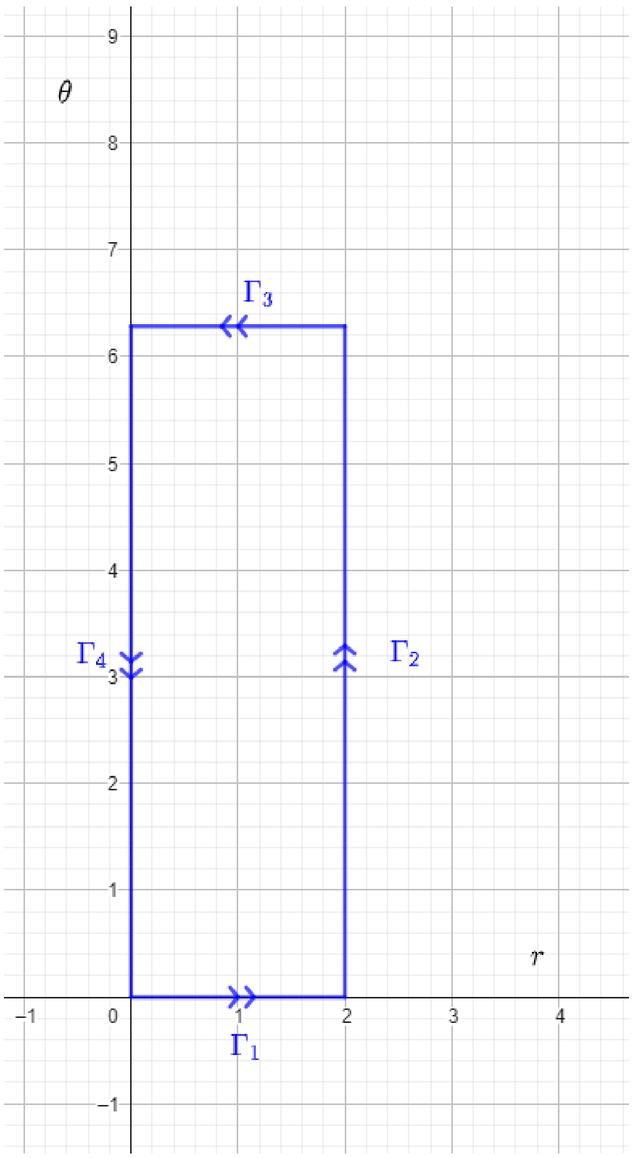


Figure 2: Le bord du domaine de σ

$\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (t, 0), t \in [0, 2]$ $\oplus$

$\sigma(\gamma_1(t)) = (t, 0, 2t - t^2), \qquad (\sigma \circ \gamma_1)'(t) = (1, 0, 2 - 2t)$

$\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (2, t), t \in [0, 2\pi]$ $\oplus$

$\sigma(\gamma_2(t)) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0), \qquad (\sigma \circ \gamma_2)'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$

$\Gamma_3 : \gamma_3(t) = (t, 2\pi), t \in [0, 2]$ $\ominus$

$\sigma(\gamma_3(t)) = (t, 0, 2t - t^2), \qquad (\sigma \circ \gamma_3)'(t) = (1, 0, 2 - 2t)$

Même courbe que Γ_1, mais parcourue dans l'autre sens.

$\Gamma_4 : \gamma_4(t) = (0, t), t \in [0, 2\pi]$ $\ominus$

$\sigma(\gamma_4(t)) = (0, 0, 0)$

Est un point.

On conclut donc que $\partial\Sigma = \Gamma_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \left\langle F(\sigma(\gamma_2(t))), (\sigma \circ \gamma_2)'(t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-2\sin t, 2\cos t, 4\sin^2 t\right); (-2\sin t, 2\cos t, 0) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\sin^2 t + 4\cos^2 t dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi.
\end{aligned}$$