Correction de l'examen d'Analyse III MATH-203 (a)

Sébastien Basterrechea [*], **Alexis Michelat** [†], **Olivier Mila** [‡]

EPFL MATH-203(a)
Version du 10 février 2023

*. EPFL B, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland sebastien.basterrechea@epfl.ch
†. EPFL B, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland alexis.michelat@epfl.ch
‡. EPFL B, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland olivier.mila@epfl.ch

1 Correction

Exercice 1. Immédiat.

Exercice 2. C'est évident, car la multiplication en Fourier additionne et soustrait les fréquences.

Exercice 3. On calcule facilement en orientant dans le sens horaire que chacune des quatre intégrales vaut -2.

Exercice 4. On ne peut rien conclure, car le domaine n'est pas forcément simplement connexe.

Exercice 5. En effet, c'est une formule algébrique toujours vraie. Aucun calcul n'est nécessaire.

Exercice 6. ***Erratum :*** *Attention, la bonne réponse est la troisième, pas la quatrième.*

Il suffit d'utiliser la parité (f est paire, donc sa transformée de Fourier l'est aussi), ce qui élimine deux réponses, et le fait que $\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leq 0$, car $f \leq 0$. On a ensuite trivialement§ (sans avoir à dériver des valeurs absolues...)

$$\frac{1}{|t|}\left(\cos(t\sqrt{2})e^{-|t|\sqrt{2}} - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{|t|}\left((1+O(t^2))(1-|t|\sqrt{2}) - (1+O(t^2))\left(1-\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} < 0,$$

ce qui montre que

$$\mathscr{F}\left(x \mapsto \log(1+x^4) - \log(16+x^4)\right)(t) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{|t|}\left(\cos(t\sqrt{2})e^{-|t|\sqrt{2}} - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\right)$$

Voyez-vous d'ailleurs pourquoi $x \mapsto \log(1+x^4) - \log(16+x^4)$ est une fonction intégrable ?

Remarque. La question 10 était un indice.

Exercice 7. Application directe du théorème de Dirichlet :

$$S(f)(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi^+) + f(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 8. On a

$$\partial_\theta f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc (les « termes croisés » des deux premiers carrés se compensent)

$$\begin{aligned} |\partial_\theta f|^2 &= \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2(\theta) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^2(\theta) \\ &+ \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^2(\theta) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2(\theta) \\ &+ \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

§. car on voit le signe sans calculs.

$$= \frac{5}{4}.$$

Par conséquent, on a

$$\mathscr{L}(\Gamma) = \int_0^{4\pi} |\partial_\theta f|^2 d\theta = \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{5}}{2} d\theta = 2\pi\sqrt{5}.$$

Exercice 9. Application directe de l'identité de Parseval.

Exercice 10. En effet, l'intégrale vaut

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(0) = \frac{1}{2} \times \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 3 = \frac{3\pi}{16}.$$

Exercice 11. La courbe Γ est paramétrée par

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \implies \gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{\sin^2(\theta) + 2\cos^2(\theta)} = \sqrt{1 + \cos^2(\theta)},$$

de telle sorte que

$$\int_\Gamma f\, dl = \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = 3\pi.$$

Exercice 12. ***Erratum*** *: le domaine correct était* $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \cap \{(x,y,z) : x > 0\}$.

On a trivialement $X = \nabla f$, où

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+z^2)(x^2+y^2)}.$$

Exercice 13. On a $\operatorname{rot} X = -\partial_y X_1 + \partial_x X_2 = 2$, et par le théorème de Fubini, on a

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_0^2 \left(\int_0^{1+x^2} dy \right) dx = \left[x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{14}{3},$$

de telle sorte que

$$\int_\Omega \operatorname{rot} X\, dx\, dy = \frac{28}{3}.$$

Sur le bord, on a trois intégrales à calculer. En notant $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ les paramétrisations correspondantes, on obtient

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0) & \text{pour tout } t \in [0,2] \\ \gamma_2(t) = (2, t) & \text{pour tout } t \in [0,5] \\ \gamma_3(t) = (t, 1+t^2) & \text{pour tout } t \in [0,2] \quad \text{(parcourue négativement)} \\ \gamma_4(t) = (0, 1-t) & \text{pour tout } t \in [0,1]. \end{cases}$$

En notant $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ les courbes correspondantes, on obtient

$$\int_{\Gamma_1} X \cdot dl = \int_0^2 (t,t) \cdot (1,0) dt = 2.$$
$$\int_{\Gamma_2} X \cdot dl = \int_0^5 (2-t, 2+t) \cdot (0,1) dt = 10 + \frac{25}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} X \cdot dl &= -\int_0^2 (t-1-t^2, 1+t+t^2)\cdot(1,2t)dt\\ &= -\int_0^2 \left(-1+3t+t^2+2t^3\right)dt\\ &= -12-\frac{8}{3}.\\ \int_{\Gamma_4} X\cdot dl &= \int_0^1 (t-1,1-t)\cdot(0,-1)dt = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\partial\Omega} X\cdot dl = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} X\cdot dl = \frac{25}{2}-\frac{8}{3}-\frac{1}{2} = \frac{28}{3},$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 14. Comme $\operatorname{div} X = 1$, on a d'après le théorème de la divergence et le théorème de Fubini

$$\int_{\partial\Omega} (X\cdot\nu)ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} X\, dx\, dy\, dz = \int_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} dx\, dy\, dz = 6.$$

Exercice 15.

1. On observe qu'à $0 < x \leq r$ fixé, l'altitude maximale autorisée $h(x)$ est telle que

$$\frac{h(x)}{x} = \tan(\alpha),$$

ce qui donne l'expression annoncée pour L, car L est un sous-ensemble du cylindre.

2. Par conséquent, on choisit la paramétrisation suivante de L :

$$f(\theta,t) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\\ r\sin(\theta)\\ r\,t\tan(\alpha)\cos(\theta)\end{pmatrix},$$

où $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, et $0 \leq t \leq 1$. On calcule

$$\begin{aligned}\partial_\theta f \times \partial_t f &= \begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\\ -r\,t\tan(\alpha)\sin(\theta)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ r\ \tan(\alpha)\cos(\theta)\end{pmatrix}\\ &= r\tan(\alpha)\cos(\theta)\begin{pmatrix} r\cos(\theta)\\ r\sin(\theta)\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On calcule

$$\operatorname{rot} X = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\int_L \operatorname{rot} X\cdot dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (1,1,0)\cdot(r^2\tan(\alpha)\cos^2(\theta), r^2\tan(\alpha)\cos(\theta)\sin(\theta),0)\,d\theta\,dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2\tan(\alpha)\cos^2(\theta)+r^2\tan(\alpha)\cos(\theta)\sin(\theta)\right)d\theta\end{aligned}$$

$$= r^2 \tan(\alpha) \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\sin^2(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} r^2 \tan(\alpha).$$

On remarque que $X = 0$ sur le disque inférieur. Par conséquent, il suffit de paramétrer le demi-cercle supérieur, ce qu'on fait par l'application

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ r\tan(\alpha)\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. On a

$$\gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ -r\tan(\alpha)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, comme γ est une paramétrisation positive de ∂L, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial L} X \cdot dl &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\tan(\alpha)\cos(\theta), r\tan(\alpha)\cos(\theta), r\tan(\alpha)\cos(\theta)) \cdot (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), -r\tan(\alpha)\sin(\theta)) d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} r^2 \tan(\alpha),
\end{aligned}$$

car

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta = 0$$

par les calculs ci-dessus.

Exercice 16. 1. Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$, et

$$a_n(f) = \int_{-1}^{1} \sin|x| \cos(\pi\, n\, x) dx = 2\int_0^1 \sin(x)\cos(\pi\, n\, x) dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \frac{1}{4i}\left(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\sin(x)\cos(\pi\, n\, x) = \frac{1}{2}\sin((1+\pi\, n)x) + \frac{1}{2}\sin((1-\pi\, n)x),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \int_0^1 (\sin((1+\pi\, n)x) + \sin((1-\pi n)x))\, dx = \left[-\frac{\cos((1+\pi\, n)x)}{1+\pi\, n} - \frac{\cos((1-\pi\, n)x)}{1-\pi\, n}\right]_0^1 \\
&= \frac{1-\cos(1+\pi\, n)}{1+\pi\, n} - \frac{1-\cos(1-\pi\, n)}{\pi\, n - 1}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
&\cos(1+\pi\, n) = \cos(1)\cos(\pi\, n) - \sin(1)\sin(\pi\, n) = (-1)^n\cos(1)\\
&\cos(1-\pi\, n) = (-1)^n\cos(1).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$a_n(f) = (1-(-1)^n\cos(1))\left(\frac{1}{1+\pi\, n} - \frac{1}{\pi\, n-1}\right) = -2(1-(-1)^n\cos(1))\frac{1}{\pi^2 n^2-1}.$$

On remarque que la formule est valable pour $n=0$, et donne

$$a_0(f) = 2(1-\cos(1))$$

Par conséquent, la série de Fourier de f est donnée par

$$S(f) = 1-\cos(1) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(1)}{\pi^2 n^2-1}\cos(\pi\, n\, x).$$

2. En prenant $x=0$ et $x=1$, on obtient par continuité de f

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2-1} - \cos(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(1)}{\pi^2n^2-1}\cos(\pi\, n\, x) = \frac{1-\cos(1)}{2}\\
&\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2-1} - \cos(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2-1} = \frac{1-\cos(1)-\sin(1)}{2}.
\end{aligned}$$

Si $x_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2-1}$, et $x_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2-1}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos(1)\\ -\cos(1) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\cos(1)}{2}\\[2ex] \dfrac{1-\cos(1)-\sin(1)}{2}\end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos(1)\\ -\cos(1) & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\cos^2(1)}\begin{pmatrix} 1 & \cos(1)\\ \cos(1) & 1\end{pmatrix},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{\sin^2(1)}\begin{pmatrix} 1 & \cos(1)\\ \cos(1) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\cos(1)}{2}\\[2ex] \dfrac{1-\cos(1)-\sin(1)}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sin^2(1)}\begin{pmatrix} 1-\cos(1)+\cos(1)-\cos^2(1)-\cos(1)\sin(1)\\ \cos(1)-\cos^2(1)+1-\cos(1)-\sin(1)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sin^2(1)}\begin{pmatrix} \sin^2(1)-\cos(1)\sin(1)\\ \sin^2(1)-\sin(1)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\tan(1)}\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sin(1)}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 17. **1**. On a par changement de variable linéaire pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\widehat{h}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x+1)e^{-i\,x\,t}dx \underset{x+1=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(y)e^{-i\,(y-1)t}dy \\ &= e^{i\,y\,t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(y)e^{-i\,y\,t}dy.\end{aligned}$$

En intégrant par parties et à l'aide de la première question, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f'(y)e^{-i\,y\,t}dy = \left[f(y)e^{-i\,y\,t}\right]_{-\infty}^{\infty} + i\,t \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-i\,y\,t}dy.$$

Finalement, on en déduit que

$$\widehat{h}(t) = i\,t\,e^{i\,t}\widehat{f}(t).$$

2. L'équation montre qu'on a

$$i\,t\,e^{i\,t}\widehat{f}(t) = \widehat{f}(t),$$

ce qui montre que ($ite^{it} = it(\cos(t) + i\sin(t)) = -t\sin(t) + it\cos(t)$)

$$\Big(-(1 + t\sin(t)) + i\,t\cos(t)\Big)\widehat{f}(t) = 0.$$

On remarque que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto -(1 + t\sin(t)) + i\,t\cos(t)$ ne s'annule jamais. En effet, $\mathrm{Im}\,(\varphi(t)) = 0$ si et seulement si $t = 0$ ou $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$, auquel cas $\varphi(0) = \mathrm{Re}\,(\varphi(0)) = -1 \neq 0$, ou

$$\mathrm{Re}\,(\varphi(t)) = -1 - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1 + (-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0.$$

Finalement, on en déduit que $\widehat{f} = 0$, ce qui montre par unicité de la transformée de Fourier que $f = 0$.

Remarque. Il n'était pas nécessaire de donner une preuve si détaillée pour avoir tous les points, mais c'est à cela que devrait ressembler une preuve complète.