Correction examen blanc

① QCM

Question 1 Soit F le champ vectoriel défini par

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto (y, x),$$

et soient $R \in \mathbb{R}, R > 0$ et A le domaine donné par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\right\}.$$

On définit par ∂A la frontière de A, et par $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^2$ la normale unitaire sortante de ∂A.
L'intégrale $\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dl$ est égale à :

- ☐ $\frac{3}{5}\pi^2 R$
- ☐ $\frac{3}{4}\pi R$
- ☒ 0
- ☐ πR^2

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dl = \int_A \operatorname{div} F \, ds \quad (\text{théorème de la divergence})$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\hookrightarrow \int_{\partial A} F \cdot \nu \, dl = 0$$

Question 2 Soit f le champ scalaire défini par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto xy + x + 1,$$

et soient $R \in \mathbb{R}, R > 0$ et Γ la courbe donnée par

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\right\}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma f\, dl$ est égale à :

- [x] $2\pi R$
- [ ] $2\pi R^2 + \pi R + 1$
- [ ] $2\pi R^3 + \pi R^2 + R$
- [ ] 0

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (R\cos(t), R\sin(t))$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$
$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = R$$

$$I = \int_\Gamma f\, dl = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[R^2 \cos t \sin t + R\cos t + 1\right] \cdot R$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt + R^2 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + R \int_0^{2\pi} 1\, dt$$

$$= -\frac{R^3}{2} \cancel{\cos(2t)}\Big|_0^{2\pi} + R^2 \cancel{\sin(t)}\Big|_0^{2\pi} + R \cdot 2\pi$$

$$= 2\pi \cdot R$$

Question 3 Soit F le champ vectoriel défini par

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x,y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Le champ F est conservatif, c'est-à-dire qu'il dérive d'un potentiel,

2. ☐ sur le domaine $\Omega = \{(x,y) : 2 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.
1. ☐ indépendamment du domaine considéré.
4. ☒ sur le domaine $\Omega = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 10\}$.
3. ☐ sur le domaine $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 10\}$.

rot F $= 0$?

$$\text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

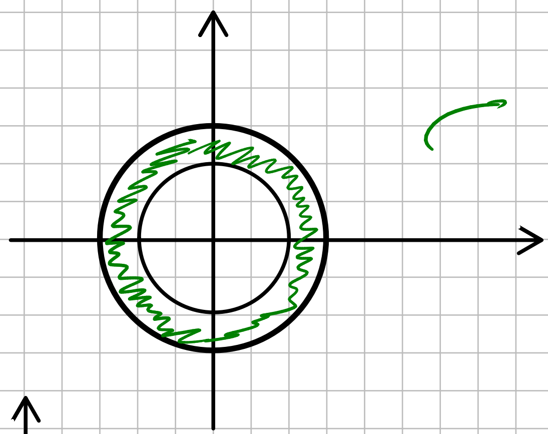
$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2x^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2y^2} \right]$$

$$= 0$$

①

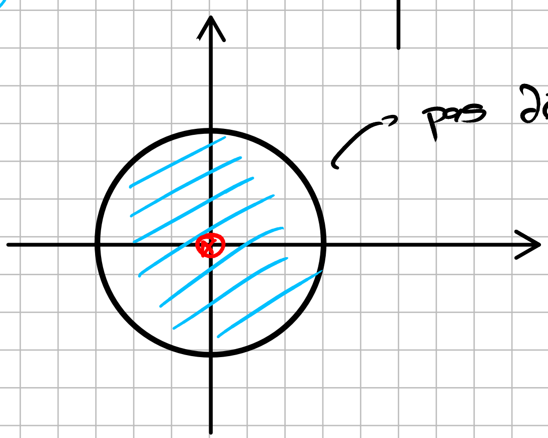
le champ F n'est pas défini en $(0,0)$.

②



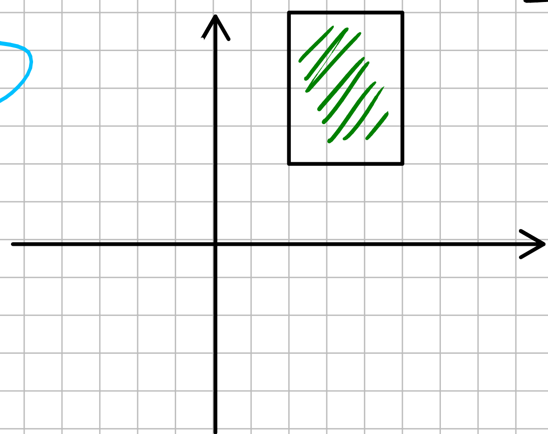
pas simplement connexe.

③



pas défini en $(0,0)$

④



rot $F = 0$ ⊕ simplement connexe $\Rightarrow$ OK !

Question 4 Les coefficients de Fourier réels non-nuls de la fonction f définie par

$$f(x) = \underbrace{5}_{c_0} + \underbrace{\frac{1}{2}(5-i\pi)3^{3ix}}_{c_3} + \underbrace{\frac{1}{2}(5+i\pi)e^{-3ix}}_{c_{-3}} - \underbrace{\frac{3}{2}e^{7ix}}_{c_7} - \underbrace{\frac{3}{2}e^{-7ix}}_{c_{-7}}$$

sont

- ☐ a_3, a_7, b_3
- ☐ a_0, a_3, a_7
- ☒ a_0, a_3, b_3, a_7
- ☐ a_0, a_3, a_7, b_7

$$Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \quad , T = 2\pi$$

$$Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$\Rightarrow c_0 = 5, \quad c_3 = \frac{1}{2}(5-i\pi), \quad c_{-3} = \frac{1}{2}(5+i\pi), \quad c_7 = -\frac{3}{2} = c_{-7}$

$c_n = 0$ pour $n \notin \{0, \pm 3, \pm 7\}$

× $c_0 = \frac{a_0}{2}$ $\qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

pour $n > 0$

$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$

$\Rightarrow a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$

× $a_0 = 2c_0 = 10$

× $a_3 = c_3 + c_{-3} = 5 \neq 0$

× $a_7 = c_7 + c_{-7} = -3 \neq 0$

× $a_n = c_n + c_{-n} = 0 + 0 = 0$

× $b_3 = i(c_3 - c_{-3}) = i(-i\pi) = \pi \neq 0$

× $b_7 = i(c_7 - c_{-7}) = 0$

× $b_n = 0$ pour $n \neq 3$

Question 5: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

1. Soit la courbe
$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{1}{3}t^3, 3t, \frac{\sqrt{6}t^2}{2} \right) \,\middle|\, t \in [-1,1] \right\}$$
Calculer la longueur de Γ.

2. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par
$$F(x,y) = (x^2, y\cos(x^2))$$
et Ω, le triangle de sommets $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, 0)$ et $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$. Calculer
$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, dl$$
où ν est le champ de normale extérieure unité à Ω.

① $\boxed{\text{Long}(\Gamma)} = \int_\Gamma 1 \, dl = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = ⊛$

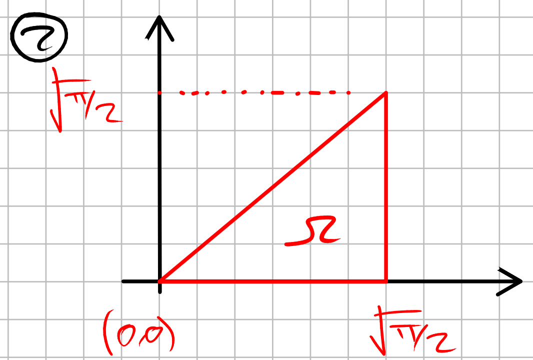
$\gamma'(t) = (t^2, 3, \sqrt{6}t)$

$\hookrightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{t^4 + 9 + 6t^2} = \sqrt{(t^2+3)^2} = t^2 + 3$

$⊛ = \int_{-1}^{1} (t^2+3) \, dt = \frac{t^3}{3} + 3t \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{3} + 3$

$= \boxed{\frac{20}{3}}$

②



$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dl = \int_\Omega \text{div} F \, ds$

thm. de la divergence

$F = (x^2, y\cos(x^2))$

$\Rightarrow \text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$

$= 2x + \cos(x^2)$

$$\Omega = \{ 0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2} \ , \ \text{et} \ 0 \leq y \leq x \}$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, ds} = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{x} (2x + \cos(x^2)) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(2xy + y\cos(x^2)\right)\Big|_0^x \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(2x^2 + x\cos(x^2)\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 + \frac{1}{2}\sin(\pi/2)$$

$$= \boxed{\frac{\pi^{3/2}}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}$$

$$= \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dl$$

Question 6: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right).$$

1. Calculer le rotationnel de F .
2. Déterminer si F dérive d'un potentiel sur Ω. Si oui, donner un potentiel de F, si non, justifier.

①

$$\text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \qquad (\text{où } F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)))$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left[x^2+y^2 - (x+y)2x \right]$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left[(+1)(x^2+y^2) + (x-y) \cdot 2y \right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left[\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2\cancel{x^2} - 2\cancel{xy} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2\cancel{xy} - 2\cancel{y^2} \right]$$

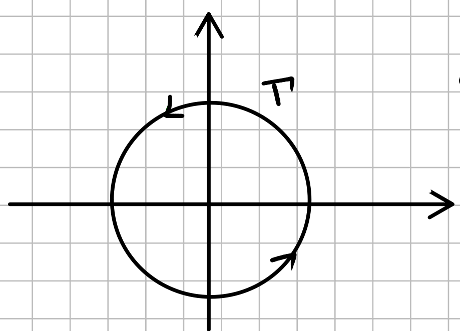
$$= 0$$

②

* $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ → le domaine n'est pas simplement convexe

* on ne peut pas appliquer le théorème pour savoir si F dérive d'un potentiel

* si $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$ où Γ fermée, alors F ne dérive pas d'un potentiel sur ce domaine



on choisit

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

et $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$\rightsquigarrow \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_\Gamma F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + 1 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cancel{\cos t}\sin t + \underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} + \cancel{\cos t}\sin t$$

$$= 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω.

Question 7: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que $\operatorname{div} F = 0$. Définissons $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$G(x,y) = \Big(F_2(-x,y), F_1(-x,y)\Big).$$

Montrer que G dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.

Etant donné que $\Omega = \mathbb{R}^2$ est simplement connexe, si :

$$\operatorname{rot} G = 0$$

alors G dérive d'un potentiel sur Ω.

$$\operatorname{rot} G = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial F_1(-x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_2(-x,y)}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \overset{= -1}{\frac{\partial x_1}{\partial x}} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cancel{\frac{\partial x_2}{\partial x}} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cancel{\frac{\partial x_1}{\partial y}} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \overset{= 1}{\frac{\partial x_2}{\partial y}}$$

$x_1 = -x$
$x_2 = y$

où x_1, x_2 sont les premières et secondes coordonnées (pour appliquer la règle de la chaîne)

$$= -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) = -\operatorname{div} F = 0$$

par hypothèse

$\operatorname{rot} G = 0$

$\Rightarrow$ G dérive d'un potentiel.

Question 8: *Cette question est notée sur 14 points.*

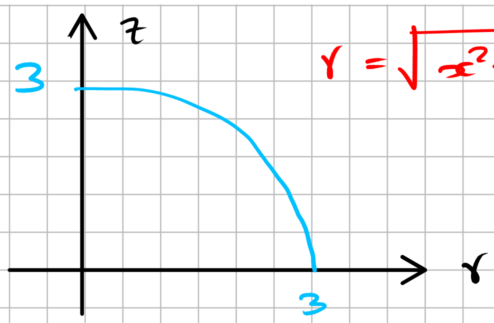
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7
☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14

Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $F(x, y, z) = (0, x, 0)$ et la surface

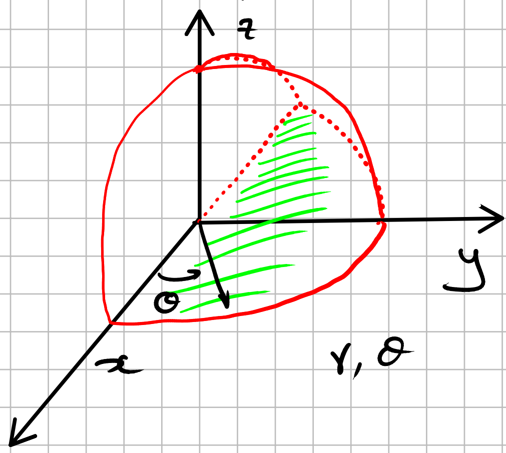
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right),\ y \geq 0, z \geq 0\right\}$$

Vérifier le théorème de Stokes pour F et Σ.
Indication : On pourra si nécessaire, utiliser les formules suivantes

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$



$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $z(r) = (r+1)(3-r)$



$y \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$

$z \geq 0 \Rightarrow r \in [0, 3]$

$$\sigma : [0,3] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r, \theta) \longmapsto \left(r\cos\theta, r\sin\theta, (r+1)(3-r)\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} = \sigma_r = (\cos\theta, \sin\theta, -2r+2)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = \sigma_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\rightsquigarrow \sigma_r \wedge \sigma_\theta = r\begin{pmatrix}(2r-2)\cos\theta \\ (2r-2)\sin\theta \\ 1\end{pmatrix}$$

× Théorème de Stokes

$$\boxed{\int_\Sigma \mathrm{rot}\, F \cdot ds} = \boxed{\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl}$$

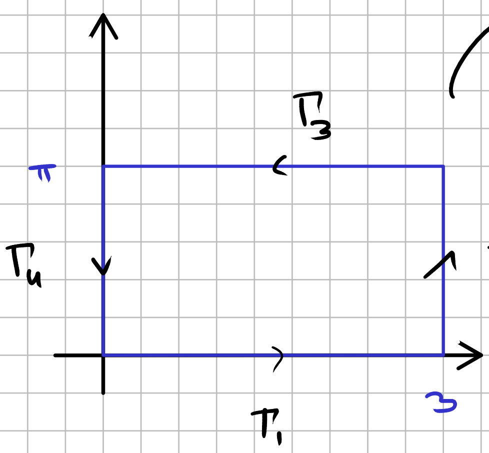
$$\mathrm{rot}\, F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

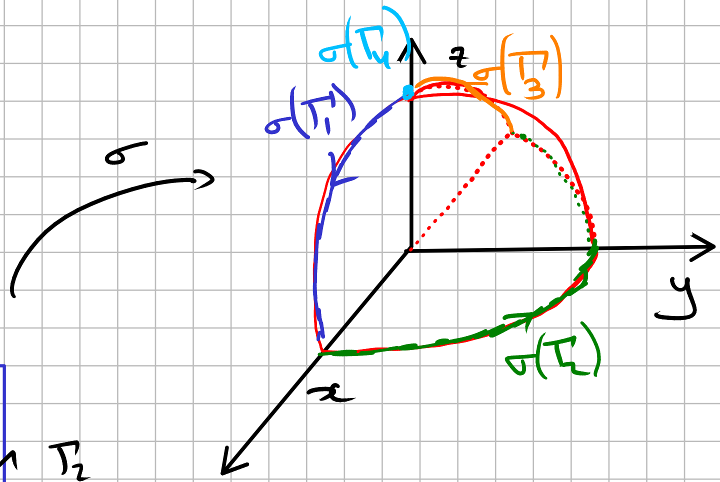
$$\boxed{\int_\Sigma \mathrm{rot}\, F \cdot ds} = \int_0^3 \int_0^\pi \left(\mathrm{rot}\, F(\sigma(r,\theta))\right) \cdot \sigma_r \wedge \sigma_\theta \, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^3 \int_0^\pi r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (2r-2)\cos\theta \\ (2r-2)\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} d\theta\, dr$$

$$= \int_0^3 \int_0^\pi r \cdot d\theta\, dr = \int_0^3 r\, dr \int_0^\pi 1\, d\theta = \boxed{\frac{9\pi}{2}}$$

$*$ $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$





$\Gamma_1 = \{ \gamma_1(r) = \sigma(r,0) = (r, 0, (r+1)(3-r)), \ r \in [0,3] \}$

$\Gamma_2 = \{ \gamma_2(\theta) = \sigma(3,\theta) = (3\cos(\theta), 3\sin(\theta), 0), \ \theta \in [0,\pi] \}$

$\Gamma_3 = \{ \gamma_3(r) = \sigma(r,\pi) = (-r, 0, (r+1)(r+3)), \ r \in [0,3] \}$

$\Gamma_4 = \{ \gamma_4(\theta) = \sigma(0,\theta) = \underbrace{(0,0,3)}_{\text{point.}}, \ \theta \in [0,\pi] \}$

$$\Rightarrow \partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_{\Gamma_1} F \cdot dl + \int_{\Gamma_2} F \cdot dl + \int_{\Gamma_3} F \cdot dl$$

$$\gamma_1'(r) = (1, 0, 2-2r), \quad \gamma_2'(\theta) = 3(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\gamma_3'(r) = (-1, 0, 2-2r)$$

- $$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}}_{F(\gamma(r))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-2r \end{pmatrix}}_{\gamma'(r)} dr = 0$$

- $$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = \int_3^0 \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2-2r \end{pmatrix} dr = 0$$

- $$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^\pi 3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

$$= 9 \int_0^\pi \cos^2\theta \, d\theta = \frac{9}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\pi + \underbrace{\int_0^\pi \cos 2\theta \, d\theta}_{=0} = \frac{9\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \boxed{\frac{9}{2}\pi}$$

Les deux résultats concordent.

Question 9: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Soit $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = -x^2 + 2\pi x.$$

1. Calculer $F_s f$, la série de Fourier en sinus de f.
2. En utilisant des résultats du cours, comparer $F_s f$ et f sur $[0, \pi]$.

①

Par le cours,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2\pi x - x^2)\sin(nx)\,dx$$

$u = 2\pi x - x^2$

$v' = \sin(nx)$

$v = \frac{-1}{n}\cos(nx)$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-(2\pi x - x^2)\cos(nx)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (2\pi - 2x)\cos(nx)\,dx \right]$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n}\left[\underbrace{\int_0^\pi \pi\cos(nx)\,dx}_{=0} - \int_0^\pi x\cos(nx)\,dx \right]$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx$$

$u = x$

$v' = \cos(nx)$

$v = \frac{1}{n}\sin(nx)$

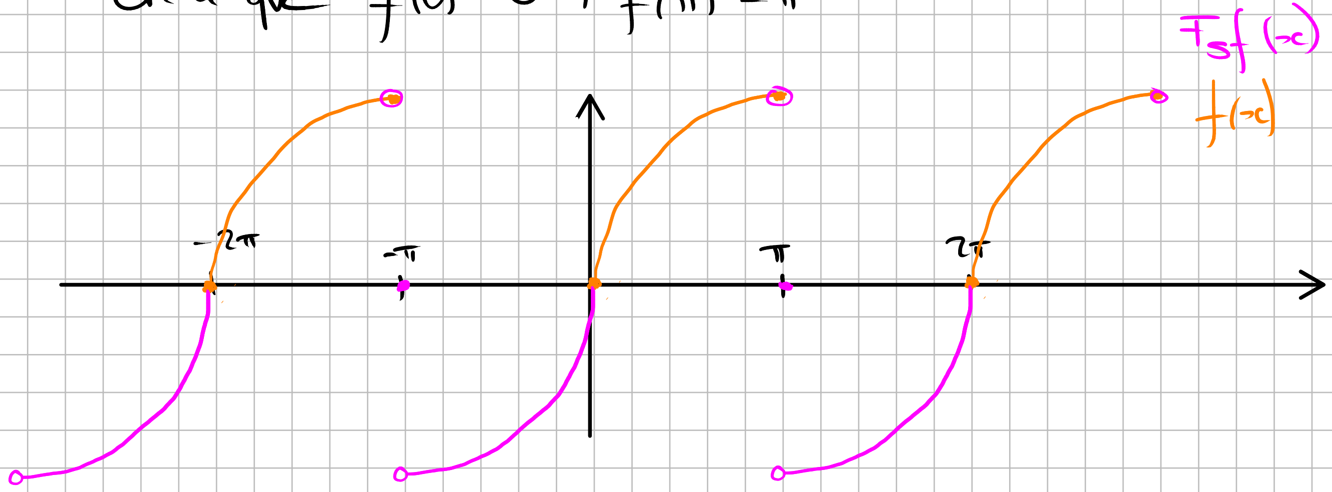
$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx \right]$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^3}\cos(nx)\Big|_0^\pi = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\right)(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}$$

$$\leadsto F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi n^3} + \frac{2\pi^2 n^2 + 4}{\pi n^3}(-1)^{n+1}\right] \sin(nx).$$

(2) On a que $f(0) = 0 \neq f(\pi) = \pi^2$



* on définit $g(x) = f(x)$ sur $[0,\pi]$ et on l'étend par imparité sur $]-\pi, 0]$

* g est continue par morceaux et impaire sur $]-\pi,\pi[$

$$\leadsto F_s f(x) = F g(x) \overset{(*)}{=} g(x) = f(x) \text{ sur } [0,\pi[$$

(*) en appliquant le théorème de Dirichlet sur $[0,\pi[$ (où g est continue)

* en $x = \pi$, on a que $g(x)$ est discontinue

$$F_s f(\pi) = F g(\pi) = \frac{1}{2}\left(g(\pi+0) + g(\pi-0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\pi^2 + \pi^2\right) = 0 \neq f(\pi) = \pi^2$$

$\leadsto$ $F_s f(x)$ et $f(x)$ sont identiques sur $[0,\pi[$ et $f(\pi) = \pi^2$ et $F_s f(\pi) = 0$.

Question 10: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ \pi & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité.}$$

Les coefficients de Fourier réels de g sont donnés par

$$a_0 = \frac{3\pi}{2}\ ;$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \ge 1\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout } n \ge 1.$$

À l'aide de ceci et d'un résultat vu au cours, calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\right]$$

$T = 2\pi$

$$= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{(2n+1)^2\pi} \cos((2n+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

$$Ff(0) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{(2n+1)^2\pi} \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{\frac{1}{n} \sin(0)} \ {}^{=0}$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$k = n+1$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\frac{\cancel{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^2} \quad (*)$$

Par Dirichlet : $Ff(0) = \frac{1}{2}\left(f(0+0) + f(0-0)\right) = \frac{1}{2}(0+\pi)$

$= \pi/2$

$(*) = \pi/2$

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^2} = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^2} = \pi^2/2}$$

Question 11: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

1. Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction, en précisant les hypothèses.
2. À l'aide des propriétés des transformées de Fourier (transformée de la dérivée et convolution) trouver $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de

$$-10u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (9u(t) - 4u''(t))e^{-\frac{3}{2}|x-t|}dt = \frac{4x^2}{(2\pi + x^2)^2}$$

Si besoin, on pourra s'aider de la table des transformées de Fourier donnée en page 10.

① Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, et telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

Alors la transformée de Fourier de f est définie comme

$$\hat{f} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha \longmapsto \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \end{array}$$

②

$$-10u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(9u(t) - 4u''(t))}_{f(x)} \underbrace{e^{-3/2|x-t|}}\, dt = \underbrace{\frac{4x^2}{(2\pi+x^2)^2}}_{h(x)}$$

$g(x) = e^{-3/2|x|}$

$$-10u(x) + f(x) * g(x) = h(x)$$

On applique la transformée de Fourier des 2 côtés :

$$-10\hat{u}(\alpha) + \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\alpha) . \hat{g}(\alpha) = \hat{h}(\alpha)$$

x $\hat{f}(\alpha) = 9\hat{u}(\alpha) - 4(i\alpha)^2 \hat{u}(\alpha)$

x $\hat{g}(\alpha) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + 9/4}$ (c.f. table ligne 7)

$$\hookrightarrow \quad -10\,\hat{u}(\alpha) + \sqrt{2\pi}\left(9\hat{u}(\alpha) + 4\alpha^2\hat{u}(\alpha)\right)\hat{g}(\alpha) = \hat{h}(\alpha)$$

$$\hat{u}(\alpha)\left[\sqrt{2\pi}\,(9+4\alpha^2)\,\hat{g}(\alpha) - 10\right] = \hat{h}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\alpha)\left[\sqrt{\cancel{2\pi}}\,\cancel{(9+4\alpha^2)}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}}\,\frac{1 \quad 4}{\cancel{\alpha^2+9/4}} - 10\right] = \hat{h}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\alpha)\left[12 - 10\right] = \hat{h}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\alpha) = \hat{h}(\alpha)/2$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(\alpha)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{h}(\alpha)/2\} = \frac{1}{2}h(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{2x^2}{(2\pi + x^2)^2}$$