EPFL

Enseignants: COLOMBO, TIONE, WIDMAYER
Analyse III - SECTION
DATE
Durée : 120 minutes

1

Nom Prénom

SCIPER : **111111**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé excepté les feuilles colorées fournies servant de brouillon.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+2$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **ouvert**, le barème peut varier d'une question à l'autre. Les points associés à chaque question sont donnés préliminairement à leur énoncé.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit F le champ vectoriel défini par

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto (y, x),$$

et soient $R \in \mathbb{R}, R > 0$ et A le domaine donné par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\right\}.$$

On définit par ∂A la frontière de A, et par $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^2$ la normale unitaire sortante de ∂A.
L'intégrale $\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dl$ est égale à :

- ☐ $\frac{3}{5}\pi^2 R$
- ☐ $\frac{3}{4}\pi R$
- ☐ 0
- ☐ πR^2

Question 2 Soit f le champ scalaire défini par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto xy + x + 1,$$

et soient $R \in \mathbb{R}, R > 0$ et Γ la courbe donnée par

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\right\}.$$

L'intégrale $\int_{\Gamma} f \, dl$ est égale à :

- ☐ $2\pi R$
- ☐ $2\pi R^2 + \pi R + 1$
- ☐ $2\pi R^3 + \pi R^2 + R$
- ☐ 0

Question 3 Soit F le champ vectoriel défini par

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

Le champ F est conservatif, c'est-à-dire qu'il dérive d'un potentiel,

- ☐ sur le domaine $\Omega = \{(x, y) :\ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- ☐ indépendamment du domaine considéré.
- ☐ sur le domaine $\Omega = \{(x, y) :\ 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 10\}$.
- ☐ sur le domaine $\Omega = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 10\}$.

Question 4 Les coefficients de Fourier réels non-nuls de la fonction f définie par

$$f(x) = 5 + \frac{1}{2}(5 - i\pi)3^{3ix} + \frac{1}{2}(5 + i\pi)e^{-3ix} - \frac{3}{2}e^{7ix} - \frac{3}{2}e^{-7ix}$$

sont

- ☐ a_3, a_7, b_3
- ☐ a_0, a_3, a_7
- ☐ a_0, a_3, b_3, a_7
- ☐ a_0, a_3, a_7, b_7

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

1. Soit la courbe
$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{1}{3}t^3, 3t, \frac{\sqrt{6}t^2}{2} \right) \;\middle|\; t \in [-1,1] \right\}$$
Calculer la longueur de Γ.
2. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par
$$F(x,y) = \big(x^2, y\cos(x^2)\big)$$
et Ω, le triangle de sommets $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, 0)$ et $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$. Calculer
$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \; dl$$
où ν est le champ de normale extérieure unité à Ω.

Question 6: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right).$$

1. Calculer le rotationnel de F .
2. Déterminer si F dérive d'un potentiel sur Ω. Si oui, donner un potentiel de F, si non, justifier.

Question 7: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que $\operatorname{div} F = 0$. Définissons $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$G(x,y) = \Big(F_2(-x,y), F_1(-x,y)\Big).$$

Montrer que G dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.

Question 8: *Cette question est notée sur 14 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7
☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ☐12 ☐13 ☐14

Soit le champ vectoriel $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $F(x,y,z) = (0,x,0)$ et la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right),\ y \geq 0, z \geq 0\right\}$$

Vérifier le théorème de Stokes pour F et Σ.
Indication : On pourra si nécessaire, utiliser les formules suivantes

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Question 9: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = -x^2 + 2\pi x.$$

1. Calculer $F_s f$, la série de Fourier en sinus de f.
2. En utilisant des résultats du cours, comparer $F_s f$ et f sur $[0, \pi]$.

Question 10: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{étendue par } 2\pi\text{-périodicité.}$$

Les coefficients de Fourier réels de g sont donnés par

$$a_0 = \frac{3\pi}{2} \ ;$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \geq 1 \ ;$$

$$b_n = \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

À l'aide de ceci et d'un résultat vu au cours, calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Question 11: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

1. Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction, en précisant les hypothèses.
2. À l'aide des propriétés des transformées de Fourier (transformée de la dérivée et convolution) trouver $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de

$$-10u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (9u(t) - 4u''(t))e^{-\frac{3}{2}|x-t|}dt = \frac{4x^2}{(2\pi + x^2)^2}$$

Si besoin, on pourra s'aider de la table des transformées de Fourier donnée en page 10.

	$f(y)$	$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (w > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w + i\alpha}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(w+i\alpha)b} - e^{-(w+i\alpha)c}}{w + i\alpha}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-iwy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(w+\alpha)b} - e^{-i(w+\alpha)c}}{w + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + w^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert w\alpha\rvert}}{\lvert w\rvert}$
7	$f(y) = \frac{e^{-\lvert wy\rvert}}{\lvert w\rvert} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + w^2}$
8	$f(y) = e^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert w\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
9	$f(y) = ye^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert w\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(y^2 + w^2)^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert w\rvert} - \lvert\alpha\rvert\right) e^{-\lvert w\alpha\rvert}$