Corrigé Examen Analyse III

David Strütt

MATH-203(c), hiver 2020-2021

Exercice 1.
(i) $\mathrm{long}(\Gamma) = \int_\Gamma 1dl$.

$\gamma\colon [-1,1] \to \Gamma,\ \gamma(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, 3t, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2\right),\ \gamma'(t) = (t^2, 3, \sqrt{6}t),\ |\gamma'(t)| = t^2+3.$

$$\mathrm{long}(\Gamma) = \int_{-1}^{1} t^2 + 3dt = \frac{20}{3}$$

(ii) Par le théorème de la divergence,

$$\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle = \int_\Omega \mathrm{div}\, F.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\, F =& 2x + \cos(x^2). \\ \Omega =& \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le \sqrt{\pi/2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle \, dl =& \int_\Omega \mathrm{div}\, F(x,y) dxdy \\ =& \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^x 2x + \cos(x^2) dydx \\ =& \frac{1}{3}\frac{\pi^{3/2}}{2^{1/2}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2.
(i)

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, F =& \frac{\partial F^2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F^1}{\partial y}(x,y) \\ =& \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

(ii) F ne dérive pas d'un potentiel. Si Γ est le cercle centré en 0 de rayon 1, on a

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos(t), \sin(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t)\sin(t) dt = 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

d'où, F ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 3.
On a

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} G(x,y) =& \frac{\partial G^2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G^1}{\partial y}(x,y) \\ =& -\frac{\partial F^1}{\partial x}(-x,y) - \frac{\partial F^2}{\partial y}(-x,y) = -\operatorname{div} F(-x,y) = 0.\end{aligned}$$

G est donc un champ vectoriel à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^2$ qui est convexe. Ainsi, par un résultat du cours, G dérive d'un potentiel.

Exercice 4.

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour Σ, on repère la symmétrie cylindrique. $(x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r \in \mathbb{R}$. Les conditions deviennent

$$z = (r+1)(3-r), \;\; r\sin(\theta) \geq 0, \;\; z \geq 0$$

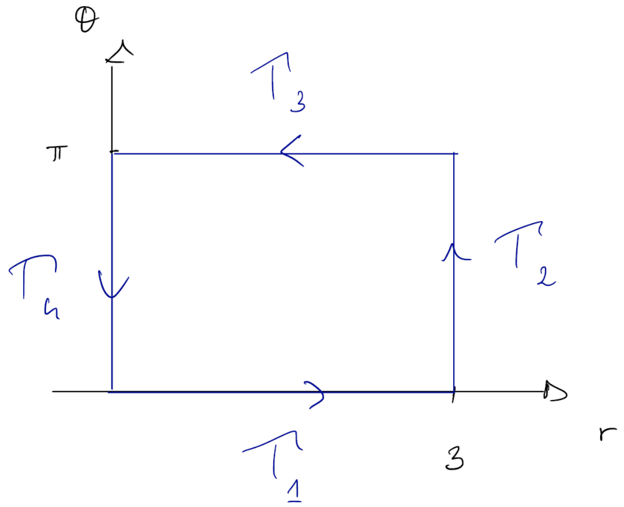
Une étude de signe de $r \mapsto (r+1)(3-r)$ nous donne que $z \geq 0$ implique $-1 \leq r \leq 3$ ce qui mis ensemble avec le fait que $r \geq 0$ nous donne $r \in [0,3]$. De plus, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\sin(\theta) \geq 0$ nous donne $\theta \in [0, \pi]$. On a donc comme paramétrisation

$$\begin{aligned}\sigma \colon [0,3] \times [0,\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\mapsto \sigma(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), -r^2 + 2r + 3).\end{aligned}$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2-2r \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (2r^2 - 2r)\cos(\theta) \\ (2r^2-2r)\sin(\theta) \\ r \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds = \int_0^3 \int_0^\pi \langle (0,0,1), \sigma_r \wedge \sigma_\theta \rangle \, d\theta dr = \int_0^3 \int_0^\pi r d\theta dr = \frac{9\pi}{2}$$



$$\partial\Sigma = \sigma(\Gamma_1) \cup \sigma(\Gamma_2) \cup \sigma(\Gamma_3) \cup \sigma(\Gamma_3)$$

$\sigma(\Gamma_1)$: $(t, 0)$, $t \in [0, 3]$, $\gamma_1(t) = \sigma(t, 0) = (t, 0, -t^2 + 2t + 3)$ et $\gamma_1'(t) = (1, 0, -2t + 2)$.

$\sigma(\Gamma_2)$: $(3, t)$, $t \in [0, \pi]$, $\gamma_2(t) = \sigma(3, t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 0)$ et $\gamma_2'(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t), 0)$.

$\sigma(\Gamma_3)$: $(3 - t, \pi)$, $t \in [0, 3]$, $\gamma_3(t) = \sigma(3 - t, \pi) = (t - 3, 0, 4t - t^2)$ et $\gamma_3'(t) = (1, 0, 4 - 2t)$

$\sigma(\Gamma_4)$: $(0, \pi - t)$, $t \in [0, \pi]$, $\gamma_4(t) = \sigma(0, \pi - t) = (0, 0, 3)$ qui est réduit à un point, on ignore.

$$\int_{\sigma(\Gamma_1)} F \cdot dl = \int_0^3 \langle (0, t, 0), (1, 0, -2t + 2) \rangle \, dt = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(\Gamma_2)} F \cdot dl &= \int_0^\pi \langle (0, 3\cos t, 0); (-3\sin t, 3\cos t, 0) \rangle \, dt = \int_0^\pi 9\cos^2(t) dt \\ &= 9 \int_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) dt = \frac{9\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{\sigma(\Gamma_3)} F \cdot dl = \int_0^3 \langle (0, t - 3, 0), (1, 0, 4 - 2t) \rangle \, dt = 0$$

d'où,

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = 0 + \frac{9\pi}{2} + 0 = \frac{9\pi}{2} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} F ds.$$

Exercice 5.

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx\\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2\pi x - x^2)\sin(nx)dx\\
\overset{IPP}{=}& \frac{2}{\pi}\left[(2\pi x - x^2)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{n=0}^{n=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2\pi - 2x)\frac{-\cos(nx)}{n}dx\\
=& \frac{2}{\pi}\left[(2\pi^2 - \pi^2)\frac{-\cos(n\pi)}{n} - (2\pi 0 - 0^2)\frac{-\cos(0)}{n}\right]\\
&+ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\\
=& \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\\
\overset{IPP}{=}& \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \underbrace{\frac{4}{\pi n}\left[(\pi - x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0}\\
&- \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi (-1)\sin(nx)dx\\
=& \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\\
=& \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} -\frac{2\pi}{n} - \frac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{2\pi}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.
$$

Ainsi,

$$
F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{2\pi^2 n^2 + 4}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^3}\right\}\sin(nx).
$$

Par le résultat du cours qui nous donne la convergence des séries de Fourier en sinus, on a

$$
F_s f(x) = \begin{cases} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{si } x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } L. \end{cases}
$$

Vu que f est continue sur $]0,\pi]$, on a

$$
F_s f(x) = \begin{cases} 2\pi x - x^2 & \text{sur }]0,\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } L. \end{cases}
$$

De plus, vu que $f(0) = 0 = F_s f(0)$ et $f(\pi) = \pi^2 \neq 0 = F_s f(\pi)$, on a que $F_s f$ et f coïncident sur $[0,\pi[$ mais sont différentes en π.

Exercice 6.
On évalue la série de Fourier de g en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sin(n0) = 0$ et $\cos(n0) = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
Fg(0) =& \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{(2k-1)^2\pi} \\
=& \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\
=& \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\frac{1}{(k-1/2)^2} \\
=& \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

De plus, vu que g est C^1 par morceaux, on a par le théorème de Dirichlet :

$$Fg(0) = \frac{g(0+0)+g(0-0)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Combinant les deux on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Exercice 7.
(i) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

La transformée de Fourier de f est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

(ii) Soit $f(x) = e^{-\frac{3}{2}|x|}$ et $h(x) = \frac{4x^2}{(2\pi+x^2)^2}$. On a alors que notre équation s'écrit

$$-10u + (9u - 4u'') * f = h.$$

On a par les tables que

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\frac{9}{4}+\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{6}{9+4\alpha^2}.$$

Ainsi, prenant la transformée de Fourier de notre équation, on obtient

$$\begin{aligned}
-10\hat{u} + \mathcal{F}\left[(9u - 4u'') * f\right] =& \hat{h} \\
-10\hat{u} + \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(9u - 4u'')\hat{f} =& \hat{h} \\
-10\hat{u} + \sqrt{2\pi}(9\hat{u} - 4\mathcal{F}(u''))\hat{f} =& \hat{h} \\
-10\hat{u} + \sqrt{2\pi}(9\hat{u} + 4\alpha^2\hat{u})\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{6}{9+4\alpha^2} =& \hat{h} \\
-10\hat{u} + 12\hat{u} =& \hat{h} \\
\hat{u} =& \frac{1}{2}\hat{h}.
\end{aligned}$$

D'où, par linéarité de la transformée de Fourier, on a

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\hat{h}) = \frac{1}{2}h = \frac{2x^2}{(2\pi + x^2)^2}$$