Prof./Ens. XXX - Examen de XXX - Section XX

Date - durée : XhYYm

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ID

NOM DE L'ETUDIANT

SCIPER : **SCIPER** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient XX pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  +3 points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,

  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

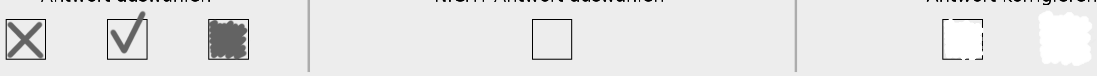
  +1 point si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,

  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit le champ vectoriel $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$E(x, y, z) = (x^2 - e^y, \sin z, y^2 + z),$$

et soit

$$S(x, y, z) = \operatorname{div} E(x, y, z),$$

Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, S vérifie

- ☐ $S(x, y, z) = 2x + 1$
- ☐ $S(x, y, z) = 2x + \cos z + 1$
- ☐ $S(x, y, z) = 2x + 2y$
- ☐ $S(x, y, z) = 2(x + 1)$

Solution. On a

$$\operatorname{div} E = 2x + 0 + 1 = 2x + 1.$$

Question 2 Soit la fonction $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ et soit $S(x, y) = \Delta u(x, y)$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, S vérifie

- ☐ $S(x, y) = 0$
- ☐ $S(x, y) = \dfrac{-1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- ☐ $S(x, y) = \dfrac{-1}{x^2 + y^2}$
- ☐ $S(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

Solution. On a

$$\nabla u(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(2x, 2y)$$

Alors, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\Delta u(x, y) = \operatorname{div}(\nabla u)(x, y) = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}(2x, 2y) \cdot (2x, 2y) + \frac{1}{x^2 + y^2}(2 + 2) = 0$$

Question 3 Soit Γ la frontière du triangle de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, et $(0, 1, 1)$ et soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 1$. Alors l'intégrale $\int_\Gamma f\, ds$ vaut

- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $4\sqrt{2}$
- ☐ $3\sqrt{2}$
- ☐ $2\sqrt{2}$

Solution. On a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ qui sont paramétrisé par

$$\gamma_1 = (0, 0, 0) + t(1, 1, 0) = (t, t, 0), t \in [0, 1],$$

$$\gamma_2 = (1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) = (1 - t, 1, t), t \in [0, 1],$$

$$\gamma_3 = (0,1,1) + t(0,-1,-1) = (0, 1-t, 1-t), t \in [0,1].$$

On a

$$\gamma_1' = (1,1,0), t \in [0,1],$$

$$\gamma_2' = (-1,0,1), t \in [0,1],$$

$$\gamma_3' = (0,-1,-1), t \in [0,1].$$

Donc,

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^1 \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Question 4 Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ et soit n le vecteur normal à ∂S, unitaire et dirigé vers l'exterieur. On rappelle que volume$(S) = \frac{4\pi}{3}$ et aire$(\partial S) = 4\pi$. On considère le champ vectoriel $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $F(x,y,z) = (2x, y, 1)$. Alors

$$\int_{\partial S} F \cdot n ds$$

vaut

- ☐ 4π
- ☐ $2\pi/3$
- ☐ $4\pi/3$
- ☐ 2π

Solution. En utilisant le théorème de Divergence, on a

$$\int_{\partial S} F \cdot n ds = \int_S \operatorname{div} F = \int_S 3 = 3 \times \text{volume}(S) = 4\pi.$$

Question 5 L'intégrale

$$S = \int_0^{2\pi} |1 + 2\cos x - \sin(2x)|^2\, dx,$$

vaut

- ☐ $S = 12\pi$
- ☐ $S = 8$
- ☐ $S = 6\pi$
- ☐ $S = 7\pi$

Solution. On a

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad b_2 = \frac{-1}{2}.$$

En utilisant l'identité de Parseval, on obtient

$$\int_0^{2\pi} |1 + 2\cos x - \sin(2x)|^2\, dx = 2\pi[a_0^2 + 2(a_1^2 + b_2^2)] = 2\pi[1 + 2(1 + 1/4)] = 7\pi.$$

Question 6 Soit u une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - 4\partial_{xx}^2 u(t,x) = \cos(2x) \text{ pour } t \geq 0, x \in [0,\pi], \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \text{ pour } t \geq 0, \\ u(0,x) = 0 \text{ pour } x \in [0,\pi], \end{cases}.$$

et soit $S : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$S(x) = \lim_{t \to +\infty} u(t,x).$$

Alors pour tout $x \in [0,\pi]$,

- ☐ $S(x) = 0$
- ☐ $S(x) = \cos(2x)/16$
- ☐ $S(x) = +\infty$
- ☐ $S(x) = 1$

Solution. On a

$$u(t,x) = \int_0^t e^{4.2^2(s-t)}\,ds \cos(2x) = \int_{-t}^0 e^{16s}\,ds \cos(2x) = \frac{1}{16}(1 - e^{-16t})\cos(2x).$$

Donc,

$$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = \cos(2x)/16.$$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 7 Soit $u \in C^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et soit le champ vectoriel $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) + (x, y, z).$$

Alors F dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Faux. Par exemple, on prend $u(x, y, z) = (y, 0, 0)$. On a $\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0, 0, 0) + (0, 0, -1) \neq 0$. Donc, F ne dérive par de potentiel.

Question 8 Soit Γ la courbe définie par $\Gamma = \{(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2}) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, 1]\}$. La longueur de cette courbe est $3/2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Faux. On a

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, t), t \in (0, 1).$$

Donc,

$$\text{longeur}(\Gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt < \int_0^1 (1 + t)\, dt = \frac{3}{2}.$$

Question 9 Soient $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ et $u, v \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Alors

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega \Delta v \cdot u.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Faux. Prendre $u(x, y, z) = x^2$, $v(x, y, z) = 1$. Alors, u et v ne satisfont pas l'indentité

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega \Delta v \cdot u.$$

Question 10 Soit le champ vectoriel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (2x - 2y, -2x + 1)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors f dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Vrai. On a

$$\operatorname{rot} f(x, y) = -2 + 2 = 0 \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc, f dérive d'un potentiel dans $\mathbb{R}^2$.

Question 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, 2π-périodique satisfaisant $f(x) = x + 1$ pour $x \in [0, \pi]$. Alors les coefficients de Fourier $c_n(f)$ satisfont

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \pi^2/3 + \pi + 1$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Vrai. En utilisant l'indentité de Parseval, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x+1|^2\,dx = \frac{1}{\pi}(\pi^3/3 + \pi^2 + \pi) = \frac{\pi^2}{3} + \pi + 1.$$

Question 12 L'intégrale

$$S = \int_0^{2\pi} |\cos(2x) - \sin x|^2\,dx$$

vaut $S = 4\pi$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Faux. On a

$$b_1 = \frac{-1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}.$$

En utilisant l'identité de Parseval, on a

$$S = \int_0^{2\pi} |\cos(2x) - \sin x|^2\,dx = 2\pi(2b_1^2 + 2a_2^2) = 4\pi(1/4 + 1/4) = 2\pi.$$

Question 13 Soient $u, v \in C^2([0, +\infty) \times [0, 1])$ telles que

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = \partial_t v(t,x) - \partial^2_{xx} v(t,x) \text{ pour } x \in [0,1], t \geq 0, \\ u(t,0) - v(t,0) = u(t,\pi) - v(t,\pi) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ u(0,x) = v(0,x) = 0 \text{ pour } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Alors $u = v$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Vrai. En posant $w = u - v$ sur $(0, \infty) \times [0, 1]$, on a

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) - \partial^2_{xx} w(t,x) = 0 \text{ pour } x \in [0,1], t \geq 0, \\ w(t,0) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ w(0,x) = 0 \text{ pour } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Donc, $w = 0$ par l'unicité du système. On obtient $u = v$.
Question 14 Soit la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{3} e^{-(k^2+1)t}[\sin(kx) + \cos(kx)] + 1,$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors u est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) + u(t,x) = 0 \text{ pour } t \geq 0, x \in [0, 2\pi], \\ u(t,0) = u(t,2\pi) \text{ pour } t \geq 0. \end{cases}$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Solution. Faux.En calculant $\partial_t u(t,x)$ et $\partial^2_{xx} u(t,x)$, on a

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{k=1}^{3} -(k^2+1)e^{-(k^2+1)t}[\sin(kx) + \cos(kx)],$$

$$\partial_{xx} u(t,x) = \sum_{k=1}^{3} -k^2 e^{-(k^2+1)t}[\sin(kx) + \cos(kx)].$$

Alors,

$$\partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = -\sum_{k=1}^{3} e^{-(k^2+1)t}[\sin(kx) + \cos(kx)] = -u(t,x) + 1.$$

Donc, u n'est pas une solution du système.

Troisème partie, question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 15: *Cette question est notée sur 3 points.*

Soit f la fonction paire définie sur $(-\pi, \pi)$ qui satisfait $f(x) = \sin x$ pour tout $x \in [0, \pi]$. On définit

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}.$$

En calculant les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, déduire la valeur de S.
Solution. On a $b_n = 0$ car f est paire.
On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)] \, dx \end{aligned}$$

Donc $a_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 0$ et

$$a_{2k}(f) = \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1} - \frac{\cos((2k-1)x)}{2k-1} \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi(4k^2 - 1)},$$

Alors,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{-4\cos(2kx)}{\pi(4k^2 - 1)} + \frac{2}{\pi} = \sin(x).$$

En utilisant $x = \pi/2$, on obtient

$$\sum_{k \geq 1} \frac{-4(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)} + \frac{2}{\pi} = 1.$$

Donc,

$$S = 1/2 - \pi/4.$$

Question 16: *Cette question est notée sur 3 points.*

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. Est-ce que les coefficients de Fourier $a_n(f), b_n(f), c_n(f)$ satisfont

$$|c_n(f)|^2 = |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$? Justifiez votre réponse.

Solution.
Réponse "NON.
Exemple: on pose $f(x) = e^{ix}$. on a,

$$c_1(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, dx = 1.$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix}\cos x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x)^2\, dx = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix}\sin x\, dx = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\, dx = i(1-\frac{1}{2}) = \frac{i}{2}$$

Alors,

$$|c_1|^2(f) \neq |a_1(f)|^2 + |b_1(f)|^2.$$

Question 17: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } t \geq 0, x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0, \\ u(0, x) = \sin(2x); \partial_t u(0, x) = 0 & \text{pour } x \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{1}$$

a. (2 points) On cherche des solutions de la forme $u(t, x) = a(t)\sin(2x)$. Écrire l'équation satisfait par a.

b. (2 points) Trouver a puis donner une solution $u \in C^2([0, \pi] \times [0, +\infty))$ de (1).

c. (2 points) Montrer que (1) a au plus une solution dans $C^2([0, \pi] \times [0, +\infty))$.

Solution. a. On trouve que a doit satifier les equations suivants

$$\begin{cases} a''(t) + 4a = 0, t > 0, \\ a(0) = 1, \\ a'(0) = 0. \end{cases}$$

b. On a la forme générale de a:

$$a(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t), t > 0.$$

Utilisant les conditions $a(0) = 1$ et $a'(0) = 0$, on trouve que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, d'òu on obtient

$$a(t) = \cos(2t), \quad t > 0.$$

On donc propose une solution

$$u(t, x) = \cos(2t)\sin(2x), \text{ pour } x \in [0, \pi], t > 0.$$

c. Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions. Posons $u = u_1 - u_2$. Alors, $u \in C^2([0, \pi] \times [0, +\infty)$ et

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(t, x) - \partial^2_{xx} u(t, x) = 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0, \\ u(0, x) = \partial_t(0, x) = 0 & \text{pour } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

On a

$$0 = \int_0^\pi [\partial_{tt} u(t, x) - \partial^2_{xx} u(t, x)]\partial_t u(t, x)\, dx = \frac{d}{2dt}\Big(\int_0^\pi |\partial_t u(t, x)|^2\, dx + \int_0^\pi |\partial_x(t, x)|^2\, dx\Big) \qquad t > 0$$

Cela implique, pour $t > 0$,

$$\int_0^\pi |\partial_t u(t, x)|^2\, dx\, dt + \int_0^\pi |\partial_x(t, x)|^2\, dx = 0.$$

On en déduit $u_t(t, x) = u_x(t, x) = 0$. Cela implique que u est constante, et donc, $u = 0$ par le fait $u(0, x) = 0$ sur $[0, \pi]$.