Révision

Exercice 1. Calculer Δf où

1. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Solution. On utilise l'identité

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

1. On a, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\ &= \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right),\end{aligned}$$

et donc pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. On a, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y,z) &= \frac{-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x,2y,2z) \\ &= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z),\end{aligned}$$

et donc

$$\Delta f(x,y,z) = \operatorname{div}(-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)).$$

Pour calculer facilement, on utilise l'identité

$$\operatorname{div}(\theta F) = (\operatorname{grad} \theta) \cdot F + \theta \operatorname{div} F,$$

pour θ une fonction scalaire de C^1 et F un champ de vecteurs de C^1. Alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y,z) &= \mathrm{div}[-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)] \\ &= \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x,2y,2z)\cdot(x,y,z) - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.3 \\ &= 3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ &= 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculer

$$\int_{\Delta(ABC)} f\,ds$$

où $\Delta(ABC)$ est le triangle dans $\mathbb{R}^3$ avec les sommets

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,2,0), \quad \text{ et } C = (0,1,1).$$

Solution.[C'est conseillé de faire un dessin.]Vu que le triangle ne passe pas l'orgine $(0,0,0)$, on cherche d'abord le plan Σ passant A, B, C de la form

$$ax + by + cz = 1$$

En remplacant (x,y,z) par les coordonées de A, B, C un par un, on obtient.

$$\begin{cases} a = 1, \\ 2b = 1, \\ b + c = 1, \end{cases}$$

ce qui donne $(a,b,c) = (1, 1/2, 1/2)$ et donc l'equation du plan peut etre écrit par

$$2x + y + z = 2 \text{ (C'est equivalent d'érire } x + y/2 + z/2 = 1)$$

On pose $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine de projection de $\Delta(ABC)$ sur le plan Oxy. On paramétrise $\Delta(ABC)$ comme suivante

$$\Delta(ABC) = \{\sigma(x,y) = (x, y, 2-2x-y), (x,y) \in D\}$$

Comme D est le triangle passant les points $(1,0), (0,2), (0,1)$ sur le plan Oxy, on a (par faisant le dessin de D),

$$D = \{(x,y) : x \in [0,1], 1-x \leqslant y \leqslant 2-2x\}.$$

On a

$$\sigma_x(x,y) = (1,0,-2) \text{ et } \sigma_y(x,y) = (0,1,-1), (x,y) \in D$$

d'où

$$\sigma_x \times \sigma_y(x,y) = (2,1,1)$$

et donc
$$|\sigma_x \times \sigma_y(x,y)| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \text{ pour tout } (x,y) \in D.$$
On a
$$\begin{aligned}
\int_{\Delta(ABC)} f\,ds &= \int_D f(\sigma(x,y))|\sigma_x \times \sigma_y(x,y)|\,dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} [x^2+y^2+(2-2x-y)^2]\sqrt{6}\,dydx \\
&= \sqrt{6}\int_0^1 x^2(1-x)\,dx + \sqrt{6}\frac{7}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx + \frac{1}{3}\sqrt{6}\int_0^1 (y-(2-2x))^3\Big|_{1-x}^{2-2x}\,dx \\
&= \sqrt{6}\int_0^1 x^2(1-x)\,dx + \sqrt{6}\frac{7}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx + \frac{1}{3}\sqrt{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx \\
&= \sqrt{6}\left(1/3 - 1/4 + \frac{7}{3}1/4 + \frac{1}{3}1/4\right) \\
&= \sqrt{6}(\frac{1}{12} + \frac{8}{12}) \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer
$$\int_S z\,ds$$
où
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ et } z \geqslant 0\}$$
Solution. On paramétrise S par
$$S = \{\sigma(\theta,\phi) = 2(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) \text{ pour } \theta \in [0,2\pi), \phi \in [0,\pi/2)\}$$
On a
$$\partial_\theta\sigma(\theta,\phi) = 2(-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$$
et
$$\partial_\phi\sigma(\theta,\phi) = 2(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi).$$
Donc
$$\begin{aligned}
\partial_\theta\sigma \times \partial_\phi\sigma(\theta,\phi) &= (-4\sin^2\phi\cos\theta, -4\sin^2\phi\sin\theta, -4\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta - 4\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta) \\
&= (-4\sin^2\phi\cos\theta, -4\sin^2\phi\sin\theta, -4\sin\phi\cos\phi)
\end{aligned}$$
ce qui donne
$$\begin{aligned}
|\partial_\theta\sigma \times \partial_\phi\sigma(\theta,\phi)| &= \sqrt{16\sin^4\phi\cos^2\theta + 16\sin^4\phi\sin^2\theta + 16\sin^2\phi\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{16\sin^4\phi + 16\sin^2\phi\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{16\sin^2\phi} \\
&= 4|\sin\phi| \\
&= 4\sin\phi,
\end{aligned}$$

pour $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi/2]$.
Alors

$$\begin{aligned}\int_S z\, ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\cos\phi 4 \sin\phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 4\sin(2\phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\phi)\, d\phi \\ &= -\frac{8\pi}{2} \cos(2\phi)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= 8\pi.\end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer

$$\int_S y\, ds,$$

où

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3, \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant 6\}$$

Solution. On paramétrise S comme suivant

$$S = \{\sigma(\theta, z) = (\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta, z), \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 6].\}$$

On a

$$\partial_\theta \sigma(\theta, z) = (-\sqrt{3}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta, 0) \text{ et } \quad \partial_z \sigma(\theta, z) = (0, 0, 1),$$

ce qui donne

$$\partial_\theta \sigma \times \partial_z \sigma(\theta, z) = (\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta, 0).$$

Alors, on a

$$|\partial_\theta \sigma \times \partial_z \sigma(\theta, z)| = \sqrt{3\cos^2\theta + 3\sin^3\theta} = \sqrt{3}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_S y\, ds &= \int_0^6 \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\sin\theta)(\sqrt{3})\, d\theta\, dz \\ &= 3.6 \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{C}} \int_0^{2\pi} |x^2 - a - be^{ix} - ce^{-ix}|^2\, dx.$$

Solution. On pose

$$f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi].$$

On applique Proposition 2.2 pour $m = 1$. On a

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{C}} \int_0^{2\pi} |x^2 - a - be^{ix} - ce^{-ix}|^2\, dx = \int_0^{2\pi} |f - \sum_{-1}^{1} c_n(f) e^{inx}|^2\, dx$$

où c_n sont les coefficients de Fourier de f, définie par

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

On calcule c_n

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^3}{3} \\ &= \frac{4\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Pour $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(x^2\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(4\pi^2\frac{1}{-in} - 2x\frac{e^{-inx}}{-n^2}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2\frac{e^{-inx}}{-n^2}\,dx\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(4\pi^2\frac{1}{-in} - 4\pi\frac{1}{-n^2} + 0\Big) \\ &= i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$c_{-1} = 2 - 2\pi i,\ \text{ et } c_1 = 2 + 2\pi i$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{-1}^{1} c_n(f)e^{inx}|^2\,dx = \int_0^{2\pi} |x^2 - \frac{4\pi^2}{3} - (2-2\pi i)e^{-inx} - (2+2\pi i)e^{inx}|^2\,dx.$$

On a

$$\begin{aligned} &|x^2 - (2-2\pi i)e^{-inx} - (2+2\pi i)e^{ix}|^2 \\ &= |x^2 - \frac{4\pi^2}{3} - 2(e^{ix}+e^{-ix}) - 2\pi i(e^{ix}-e^{-ix})|^2 \\ &= |x^2 - \frac{4\pi^2}{3} - 4\cos x + 4\pi\sin x|^2 \\ &= x^4 + \frac{16\pi^4}{9} + 16\cos^2 x + 16\pi^2\sin^2 x \\ &\quad - \frac{8\pi^2}{3}x^2 - 8\cos x x^2 + 8\pi\sin x x^2 + \frac{32\pi^2}{3}\cos x \\ &\quad - \frac{32\pi^3}{3}\sin x - 32\pi\cos x\sin x. \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^{2\pi} x^4\,dx = \frac{(2\pi)^5}{5},$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{16\pi^4}{9}\,dx = \frac{32\pi^5}{9},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} 16\cos^2 x + 16\pi^2\sin^2 x\,dx &= 32\pi + (16\pi^2-16)\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx\\ &= 32\pi + (16\pi^2-16)\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\,dx\\ &= 32\pi + (16\pi^2-16)\int_0^{\pi}(1-\cos(2x))\,dx\\ &= 32\pi + (16\pi^2-16)\pi,\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} -\frac{8\pi^2}{3}x^2\,dx = -\frac{64\pi^5}{9},$$
$$\int_0^{2\pi} -8\cos x x^2\,dx = -16\pi a_1 = -16\pi 2 = -32\pi,$$
$$\int_0^{2\pi} 8\pi\sin x x^2\,dx = 16\pi^2 b_1 = 16\pi^2(-2\pi) = -32\pi^3,$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{32\pi^2}{3}\cos x - \frac{32\pi^3}{3}\sin x - 32\pi\cos x\sin x\,dx = 0.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{-1}^{1} c_n(f)e^{inx}|^2\,dx &= \frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{32\pi^5}{9} + 32\pi + (16\pi^2-16)\pi - \frac{64\pi^5}{9} - 32\pi - 32\pi^3\\ &= 32\pi^2\frac{4}{45} - 16\pi^3 - 16\pi\end{aligned}$$

On conclut

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{C}}\int_0^{2\pi} |x^2 - a - be^{ix} - ce^{-ix}|^2\,dx = 32\pi^2\frac{4}{45} - 16\pi^3 - 16\pi$$

Exercice 6. Supposon que

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x) - \partial_{xx}u(t,x) = 0, & t \geqslant 0, x\in(0,\pi),\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \\ u(0,x) = 2\sin(2x), & x\in(0,\pi).\end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x)e^{4t} = 2\sin(2x)$$

Solution. La solution de l'équation est donée par

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

où $a_n, n \geqslant 1$ sont déterminés uniquement tels que

$$u(0,x) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin(nx), x \in (0,\pi).$$

Comme

$$u(0,x) = 2\sin(2x),$$

on trouve que

$$a_2 = 2, a_n = 0 \text{ si } n \neq 2.$$

Ainsi, on obtient

$$u(t,x) = 2\sin(2x)e^{-4t},$$

et donc

$$u(t,x)e^{4t} = 2\sin(2x) \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in (0,\pi).$$

On conclut que

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x)e^{4t} = 2\sin(2x).$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π- périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x \leqslant 0, \\ 3 & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Calculer le série de Fourier de f et étudier sa convergence à $x = 0$.

Solution. Pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 3\cos(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} 1\cos(nx)\,dx\right] \\ &= \frac{3}{2n\pi}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n\pi}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 3\sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} 1\sin(nx)\,dx\right] \\ &= -\frac{3}{2n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n\pi}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} \\ &= \frac{3}{2\pi n}\left[1-(-1)^n\right] - \frac{1}{2\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \\ &= \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \end{aligned}$$

$$c_n = a_n - ib_n = -\frac{i}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right], n \neq 0$$

Pour $n = 0$, on a

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 3\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,dx = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 2, \quad b_0 = 0.$$

On a donc

$$S_N f(x) = 2 + 2\sum_1^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin(nx)$$

En $x = 0$, on a, par Théorème de Dirichlet,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(0) = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Exercice 8. Soit f une fonction $2\pi-$ périodique définie par

$$f(x) = x^2, \text{ si } x \in (0, 2\pi).$$

Calculer le série de Fourier de f.

Solution. On a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Pour $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{2\pi n}x^2\sin(nx)|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} 2x\sin(nx)\,dx \\
&= 0 + \frac{2}{2\pi n}\left[\frac{1}{n}x\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\left(\frac{1}{n}2\pi - 0\right) \\
&= \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx &= -\frac{1}{2\pi n}x^2\cos(nx)|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} 2x\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{(2\pi)^2}{2\pi n} + \frac{2}{2\pi n}\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx\right] \\
&= -\frac{2\pi}{n} + 0 + 0 \\
&= -\frac{2\pi}{n}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$S_N(f)(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2}\cos(nx) - \frac{2\pi}{n}\sin(nx)\right].$$
