Correction du QCM de l'examen 2016

Alexis Michelat*

10 janvier 2023

QCM

1. La bonne réponse est la réponse 4.
   On a $\operatorname{div} E = 2 - 1 + 2 = 3$.
2. La bonne réponse est la réponse 1.
   On a
   $$\operatorname{rot} E = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & -y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(2z) - \partial_z(-y) \\ \partial_z(2x) - \partial_x(2z) \\ \partial_x(-y) - \partial_y(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. La bonne réponse est la réponse 2.
   Par la formule des dérivées composées, on a $\nabla u(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)\cos(x^2+y^2+z^2)$.
4. La bonne réponse est la réponse 3.
   On a par la formule de Leibniz :
   $$\begin{aligned}\Delta u = \operatorname{div} \nabla u &= (2+2+2)\cos(x^2+y^2+z^2) + 2x \times (-2x \sin(x^2+y^2+z^2)) \\ &+ 2y \times (-2y\sin(x^2+y^2+z^2)) + 2z \times (-2z\sin(x^2+y^2+z^2)) \\ &= 6\cos(x^2+y^2+z^2) - 4(x^2+y^2+z^2)\sin(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$
   Pour trouver la bonne réponse, il suffisait de faire la moitié du calcul.
5. La bonne réponse est la réponse 4.
   Si $F(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 8$, alors $\Sigma = F^{-1}(\{0\})$. Par conséquent, l'espace tangent à Σ en x est donné par
   $$T_x\Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \{v : \langle \nabla F(x), v\rangle = \langle (2x_1, 2x_2, x_3), v\rangle = 0\}.$$
   On en déduit qu'une normale unitaire est donnée par $\nu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x_1^2+4x_2^2+x_3^2}}(2x_1, 2x_2, x_3)$, ce qui montre que $\nu((1,1,2)) = \frac{1}{\sqrt{4+4+4}}(2,2,2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Remarquez que la normale dans l'énoncé de la question n'est pas forcément unitaire. Par conséquent, on peut immédiatement éliminer les réponses 2 et 3 car si l'une était vraie, l'autre le serait également (c'est le même vecteur de signes opposés). Enfin, si on se souvient que la normale à $x \in S^2$ est donnée par $\nu(x) = x$, la normale variant continûment avec la surface (qui n'est qu'une sphère de rayon 2 déformée), la seule réponse possible est la quatrième.
   Bien entendu, l'espace tangent est une notion de géométrie différentielle qui n'a pas été abordée pendant le cours, et on peut plus simplement utiliser la paramétrisation (coordonnées sphériques modifiées)
   $$F(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ 2\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ 2\sqrt{2}\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

*EPFL B, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland alexis.michelat@epfl.ch

ce qui donne la normale (pas unitaire) suivante

$$\begin{aligned}\nu(\theta,\varphi)=\partial_\theta F\times\partial_\varphi F&=\begin{pmatrix}-2\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ 2\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\cos(\theta)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ -2\sqrt{2}\sin(\varphi)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-4\sqrt{2}\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ -4\sqrt{2}\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ -4\cos(\varphi)\end{pmatrix}=-2\sqrt{2}\begin{pmatrix}2F_1(\theta,\varphi)\\ 2F_2(\theta,\varphi)\\ F_3(\theta,\varphi)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui redonne la formule précédente.

6. Cette assertion est **fausse.**
En effet, on a $|\sin(t)|<1$ pour tout $t\in[0,2\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$, on a

$$\mathscr{L}(\Gamma)=\int_0^1\sqrt{|\gamma'(t)|^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1+\cos^2(t)+2\sin^2(t)}\,dt=\int_0^1\sqrt{2+\sin^2(t)}dt<\int_0^1\sqrt{2+1}\,dt=\sqrt{3}.$$

Si une inégalité stricte est vérifiée sur un intervalle à un nombre fini de points près, alors on a une inégalité stricte dans les intégrales. La preuve est la même que celle qui montre qu'une fonction *continue* $f>0$ sur un intervalle ouvert I est d'intégrale strictement positive.

7. Cette assertion est **vraie**.
Si $F(\theta,z)=\begin{pmatrix}z\cos(\theta)\\ z\sin(\theta)\\ z\end{pmatrix}$, alors on a

$$\partial_\theta F\times\partial_z F=\begin{pmatrix}-z\sin(\theta)\\ z\cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\cos(\theta)\\ z\sin(\theta)\\ -z\end{pmatrix},$$

ce qui montre comme $f=1$ sur Σ que

$$\int_\Sigma f\,ds=\int_0^{2\pi}\int_0^1|\partial_\theta F\times\partial_z F|d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}\,z\,d\theta\,dz=2\pi\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1=\pi\sqrt{2}.$$

8. Cette assertion est **vraie**.
En effet, on a

$$2\pi\,c_0(f)=\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi}-2\pi^2=0.$$

9. Cette assertion est **fausse**.
En effet, on a $f(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, qui est déjà une série trigonométrique. Trivialement, on a aussi

$$c_2(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2ix}dx=0.$$

10. Cette assertion est **fausse**.
Prendre $f=0$.