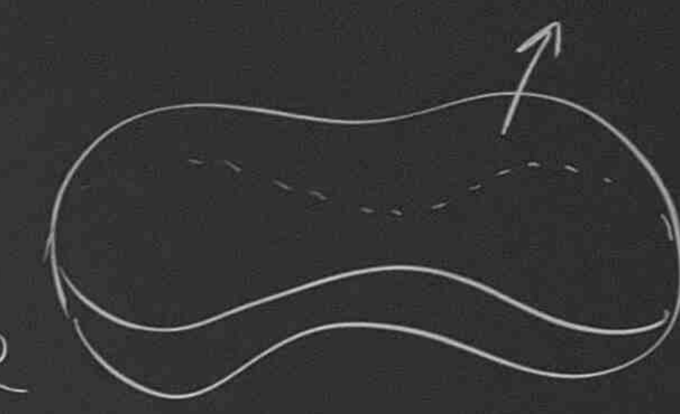
Cours vidéo photo

Examen QCM $\frac{2}{3}$ questions ouvertes $\frac{1}{3}$

Partie 1 : analyse vectorielle

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$\int \rightarrow$ courbe  , surface 

, volume 

principes de conservation de la physique

équations aux dérivées partielles

calcul numérique

Partie 2 : analyse complexe

utile en physique théorique

Semaine 1 : opérateurs div, grad, rot

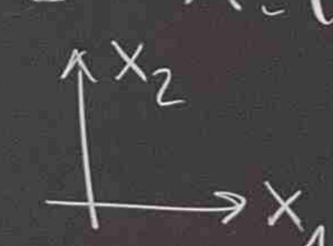
Chap 1 livre

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

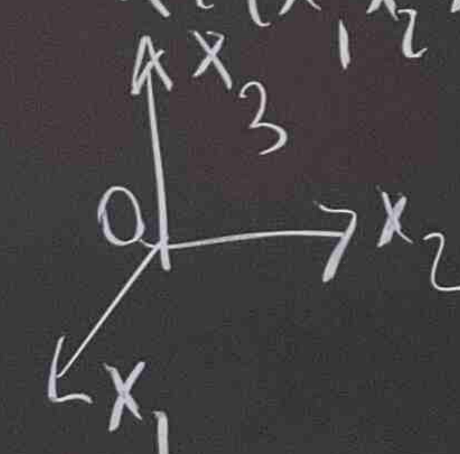
algèbre linéaire

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$n = 2 \quad \vec{x} = (x_1, x_2)$ ou (x, y)



$n = 3 \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ou (x, y, z)



Champ scalaire :

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{x} \longrightarrow f(\vec{x})$

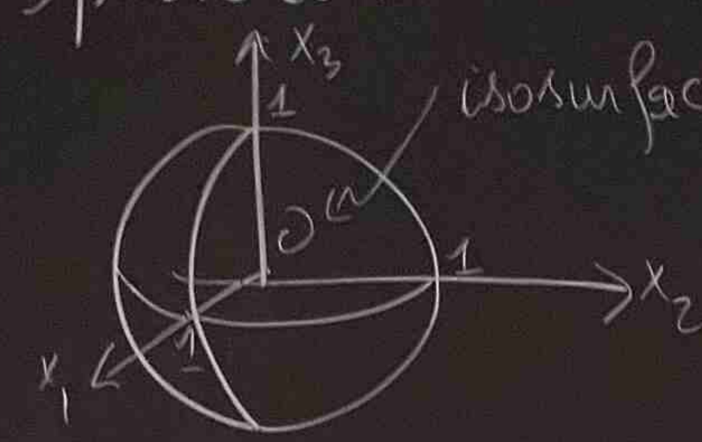
$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Ex $n=3$ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

isosurface $f = 1$

$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

Sphère centre O rayon 1



Champ vectoriel

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{x} \longrightarrow \vec{F}(\vec{x})$

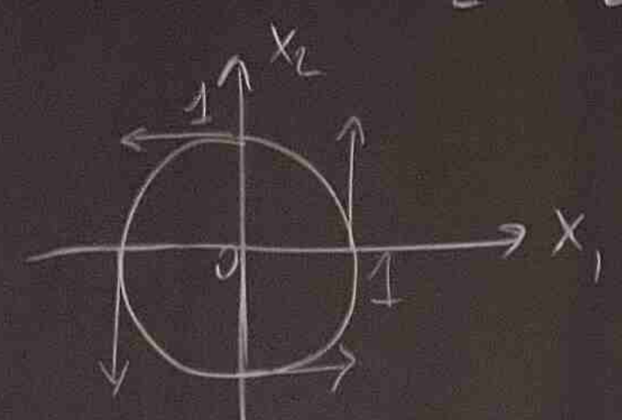
$= (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$

$= F_1 \vec{e}_1 + \dots + F_n \vec{e}_n$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$

Ex : $n=2$ $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

$F_1(x_1, x_2) = -x_2$ $F_2(x_1, x_2) = x_1$



$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

On dit que $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ si f est continue $\left(\forall \vec{a} \in \Omega, \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})\right)$

——— $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existent et soient continues

——— $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et sont continues $i, j = 1, \dots, n$

idem $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{x} \longrightarrow \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$

$\vec{F} \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^n$ si $F_i \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ $i = 1, \dots, n$

etc ...

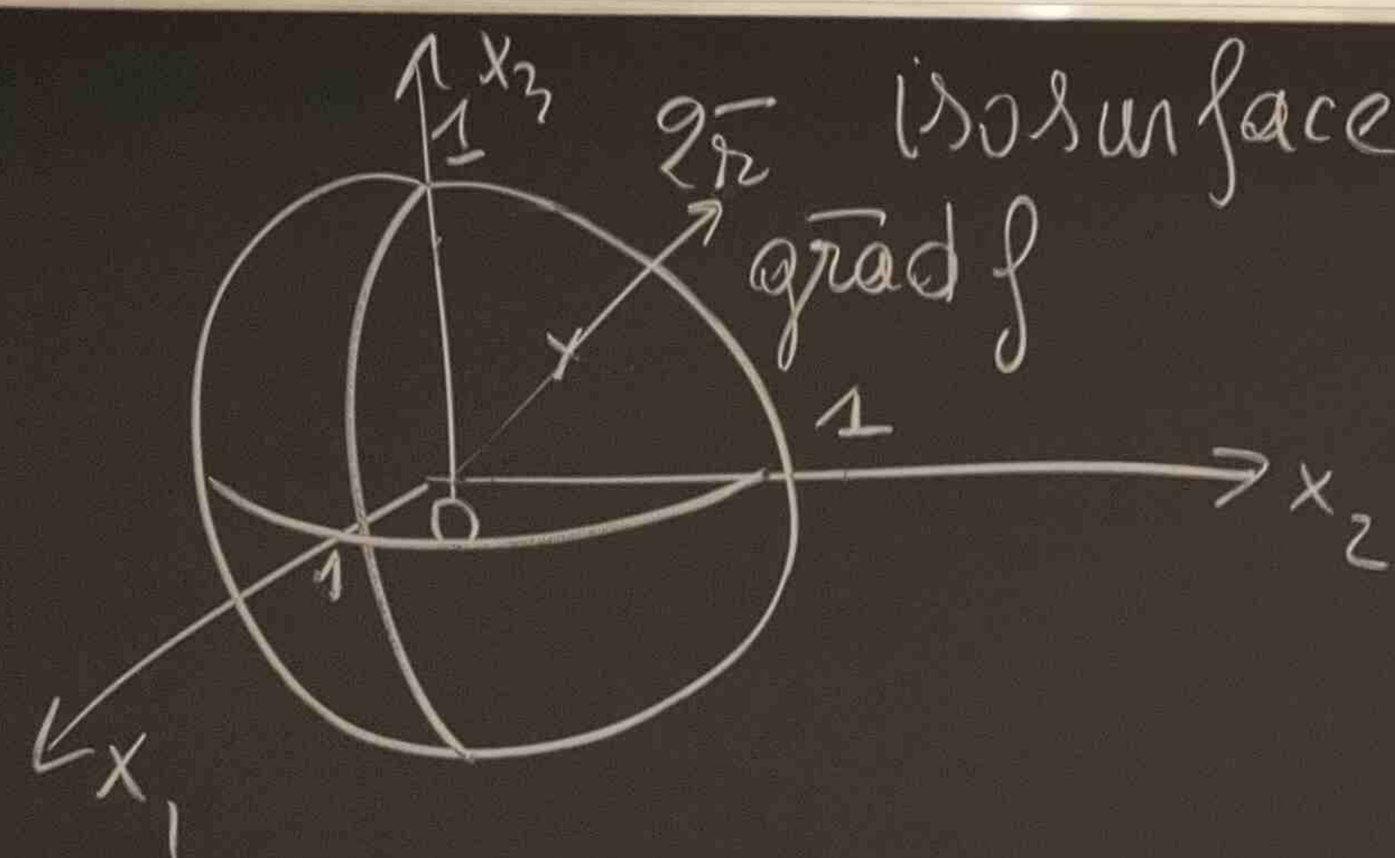
Opérateurs gradient, divergence, rotationnel
grad, div, rot / Curl

Opérateur : champ $\to$ autre champ

gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} : f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in (\mathcal{C}^0(\Omega))^n$

Ex : $n=3$ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (qu'on note r^2)

$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$ (qu'on note $2\vec{r}$)



isosurface 1 de f

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \quad \left(= \frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{\text{grad}}\, f(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}, \frac{-x_2}{(\ )^{3/2}}, \frac{-x_3}{(\ )^{3/2}} \right) \quad \left(= -\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Ex : $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \quad (= r)$

$$\vec{\text{grad}}\, f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{\ }}, \frac{x_3}{\sqrt{\ }} \right)$$ qu'on note $\frac{\vec{r}}{r}$

divergence : champ vectoriel $\longrightarrow$ champ scalaire

$$\vec F(\vec x) = \big(F_1(\vec x), F_2(\vec x), \dots, F_n(\vec x)\big) \longrightarrow \operatorname{div}\vec F(\vec x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\vec x)$$

$$\vec F \in \big(\mathcal{C}^1(\Omega)\big)^n \longrightarrow \operatorname{div} \vec F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$$

Ex : $n=2$ $\vec F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ $\operatorname{div}\vec F(x_1, x_2) = 0$ champ divergence nulle

On note aussi $\operatorname{div}\vec F = \vec\nabla \circ \vec F$

où $\vec\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$\vec F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

$$\operatorname{div}\vec F = \vec\nabla \cdot \vec F = \langle \vec\nabla, \vec F\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = \vec\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f\right)$$

rotationnel (curl) :

$n=2$: $\vec F(x_1, x_2) = \big(F_1(x_1, x_2), F_2(x_2)\big) \longrightarrow \operatorname{rot}\vec F(x_1, x_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\vec F \in \big(\mathcal{C}^1(\Omega)\big)^2 \longrightarrow \operatorname{rot}\vec F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

Ex : $\vec F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ $\operatorname{rot}\vec F(x_1, x_2) = 1 - (-1) = 2$ (tourbillon)

$n=3$: $\vec F(x_1,x_2,x_3)=(F_1(x_1,x_2,x_3),F_2(\ \ ),F_3(\ \ )) \longrightarrow \vec{rot}\,\vec F = \vec\nabla \wedge \vec F = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$

$\vec a,\vec b \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec a \wedge \vec b = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

§ × anglais

$(1,2,3)\to(2,3,1)$

$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$

$\vec F \in (C^1(\Omega))^3 \to \vec{rot}\,\vec F \in (C^0(\Omega))^3$

Ex : $\vec F(x_1,x_2,x_3)=(-x_2,x_1,0)$

$\vec{rot}\,\vec F = (0,0,2)$

$\vec F(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\ (=\vec\lambda)$

$\vec{rot}\,\vec F(x_1,x_2,x_3) = \vec 0$

$\mathrm{div}\,\vec F(x_1,x_2,x_3) = 3$

Laplacien : champ scalaire → champ scalaire

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $\quad f\in C^2(\Omega) \to \Delta f \in C^0(\Omega)$

$\Delta f(\vec x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec x)$

Thm 12 Rme

- $f\in C^2(\Omega)$ $\quad \Delta f = \mathrm{div}\,\vec{grad}\,f = \vec\nabla\cdot\vec\nabla f$
- $n=3$ $\quad$ —— $\quad \vec{rot}\,\vec{grad}\,f = \vec 0 \quad (= \vec\nabla\wedge\vec\nabla f)$

$\vec F\in(C^2(\Omega))^3$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{rot}\,\vec F = 0 \quad (= \vec\nabla\cdot\vec\nabla\wedge\vec F)$

$\vec a\cdot\vec a\wedge\vec b = 0$

- $f,g\in C^1(\Omega)$ $\quad \vec{grad}(fg) = g\,\vec{grad}\,f + f\,\vec{grad}\,g$
- $f\in C^1(\Omega), \vec F\in(C^1(\Omega))^n$ $\quad \mathrm{div}(f\vec F) = f\,\mathrm{div}\,\vec F + \vec F\cdot\vec{grad}\,f$
- $n=3$ $\quad \vec F\in(C^2(\Omega))^3$ $\quad \vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec F = -\Delta\vec F + \vec{grad}\,\mathrm{div}\,\vec F$

$(\Delta\vec F = (\Delta F_1,\Delta F_2,\Delta F_3))$

- $n=3$ $\quad f\in C^1(\Omega)$ $\quad \vec F\in(C^1(\Omega))^3$ $\quad \vec{rot}(f\vec F) = f\,\vec{rot}\,\vec F + \vec{grad}\,f\wedge\vec F$

Dem:

- $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f$$

- $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Semaine 1 (Chap 1 livre)

opérateurs $\vec{\text{grad}}$, div, $\vec{\text{rot}}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\vec{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

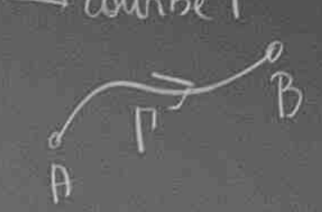
$\text{div}\, \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

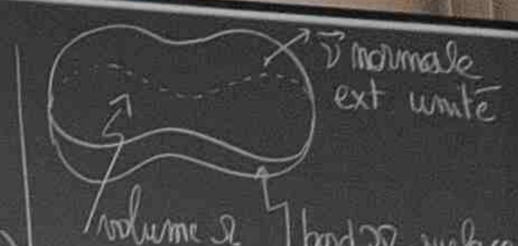
$\vec{\text{rot}}\, \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \dots\right)$

But du cours :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

$(a,b) \to$ courbe Γ $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A)$





$\iiint_\Omega \text{div}\, \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds$

Si $\text{div}\, \vec{v} = 0$ alors $0 = \iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu}\, ds$

"tout ce qui rentre sort" quel que soit Ω

Exemples :

Ex 1 : diffusion et convection de la chaleur

Soit un matériau occupant $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$k : \Omega \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \to k(\vec{x}) > 0$ coeff. de diffusion

$\rho c_p : \Omega \to \mathbb{R}$ > 0 chaleur spécifique

$T : \Omega \to \mathbb{R}$ température

$\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ champ de vitesse

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Ces grandeurs sont telles que

$\text{div}(-k\, \vec{\text{grad}}\, T) + \text{div}(\rho c_p \vec{v} T) = 0$

$\vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\rho c_p T \vec{v}) = 0$ (1)

$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-k(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial x_1}(\vec{x})\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-k \frac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-k \frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$
$+ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho c_p(\vec{x}) T(\vec{x}) v_1(\vec{x})\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho c_p T v_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho c_p T v_3\right) = 0$

Cette éq traduit un principe de conservation de l'én. thermique

En pratique, le pbm à résoudre est le suivant

Étant donné $k, \rho c_p, \Omega$, étant donné T sur $\partial\Omega$ (ou $k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nu}$), étant donné $\vec{v}$,

trouver $T : \Omega \to \mathbb{R}$ qui satisfait l'éq aux dérivées partielles (1) $\to$ méth. numérique

Ex 2 : champ de vitesse d'un fluide incompressible

éq. Navier-Stokes

$\rho, \mu > 0$ densité, viscosité

$\vec{g}$: gravité $(g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \to \vec{v}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), v_2(\vec{x}), v_3(\vec{x}))$ vitesse

$p : \Omega \to \mathbb{R}$ pression

sont telles que

$$\begin{cases} \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \mu \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \\ \text{div}\, \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Euler 1753 Navier Stokes 1850

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$

$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_1, \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_2, \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_3)$

$\Delta \vec{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$

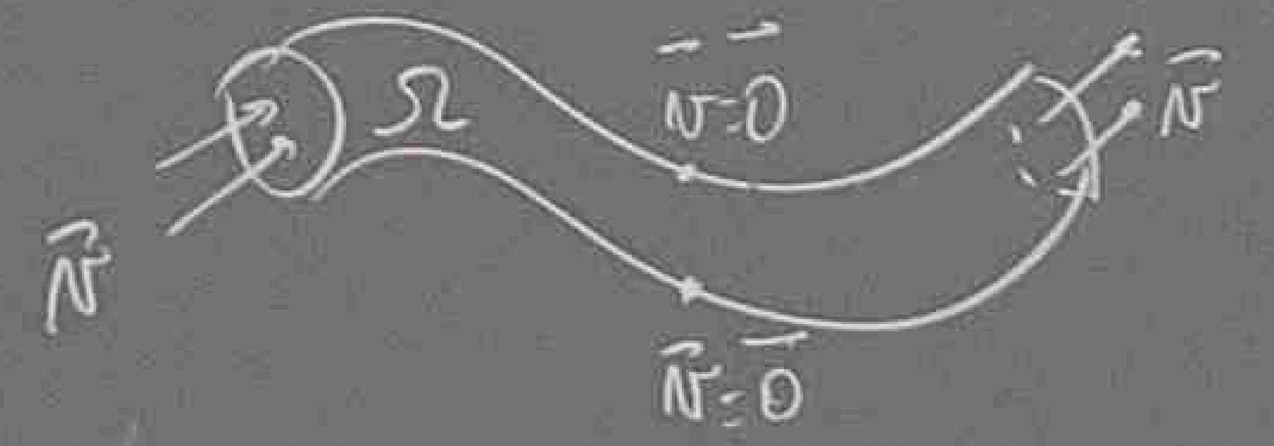
dérivées partielles (1) → méth. numérique

$x \to v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ vitesse

$p : \Omega \to \mathbb{R}$ pression

$(v \cdot \nabla) v = (v \cdot \nabla v_1, v \cdot \nabla v_2, v \cdot \nabla v_3)$

$$\begin{cases} \rho\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} v_1\right) - \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho g_1 \\ \rho\left(\text{—}\, v_2 \;\text{—}\, v_2 \;\text{—}\, v_2\right) - \mu\left(-v_2 - v_2 - v_2\right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho g_2 \\ \rho\left(\text{—}\, v_3 \;\text{—}\, v_3 \;\text{—}\, v_3\right) - \mu\left(-v_3 - v_3 - v_3\right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g_3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad (2)$$



Étant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ρ, μ, $\vec{g}$ donnés, étant donné $\vec{v}$ sur $\partial\Omega$, on cherche $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $p : \Omega \to \mathbb{R}$ qui satisfont (2)

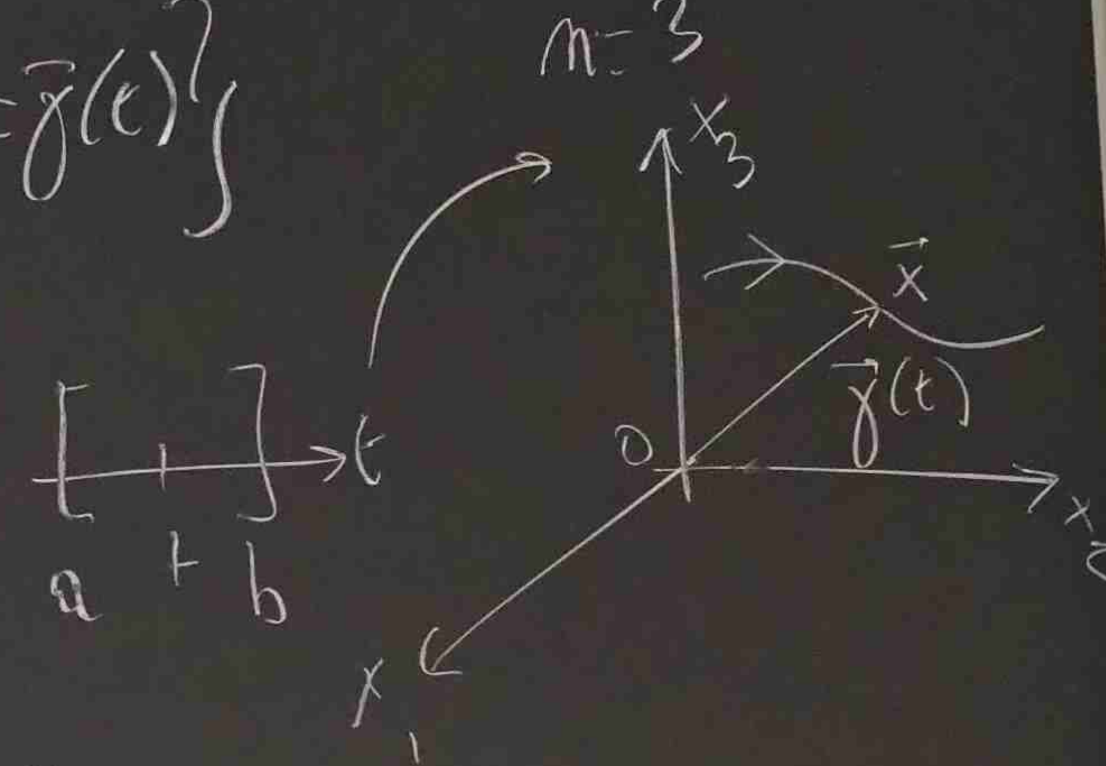
En pratique on utilise une méth. numérique

Chap 2 livre : intégrales curvilignes

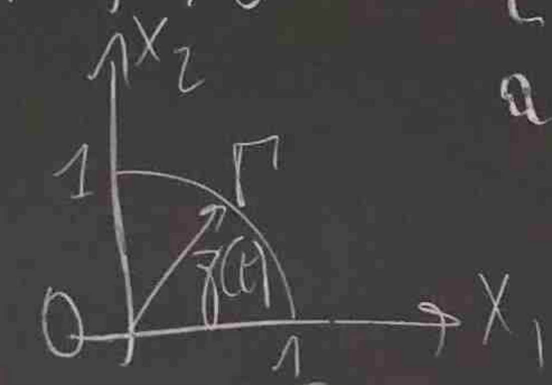
Def 2.1 et 8.8 livre

On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple régulière s'il existe un intervalle $[a,b]$ et une fonction $\vec{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longrightarrow \vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, appelée paramétrisation telle que

- $\Gamma = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \exists t \in [a,b], \vec{x} = \vec{\gamma}(t) \}$
- $\vec{\gamma} : [a,b[$ bijective $\mathcal{C}^1[a,b]$
  $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} \neq 0$



Ex : $n=3$, $\frac{1}{4}$ cercle unité plan Ox_1x_2



$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

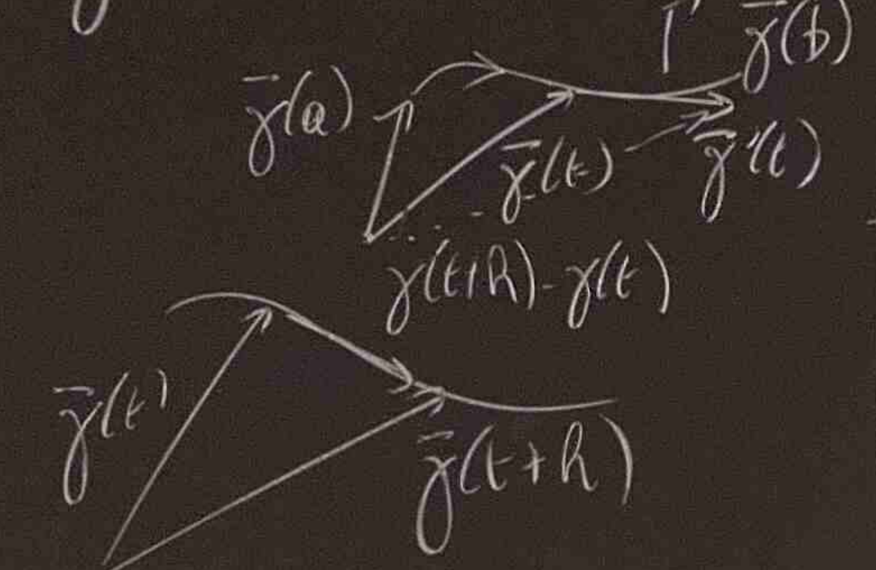
$\Gamma = \{(x_1, x_2, 0) ; \; x_1^2 + x_2^2 = 1, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0\}$

$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$

Remarques :

- il existe une infinité de param.
  ex : $\vec{\gamma}(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$
  $0 \leq t \leq \pi/4$

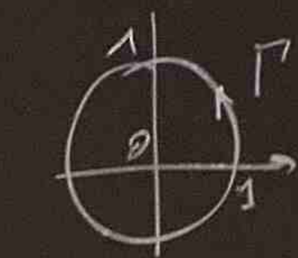
∘ $\vec{\gamma}'(t)$ donne la direction de la tangente



$$\vec{\gamma}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h)-\vec{\gamma}(t)}{h}$$

On dit que Γ est une courbe simple régulière fermée si $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$

Ex : $n=3$ cercle unité plan (Ox_1, x_2) :



$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

Déf. intégrales curvilignes

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ champ scalaire C^0

$\vec{x} \to f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

et soit $\vec{\gamma} : [a,b] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$

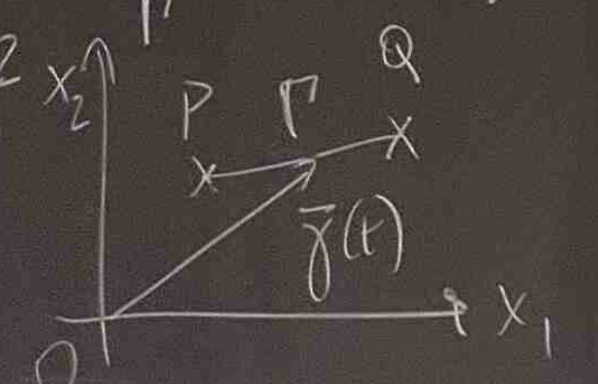
$t \to \vec{\gamma}(t)$

On déf. l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+\dots+(\gamma_n'(t))^2}\,dt$$

Si $f=1$ $\int_\Gamma dl$ = longueur de Γ

Ex : $n=2$

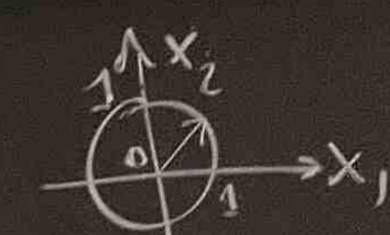


$\vec{\gamma}(t) = \vec{OP} + t\vec{PQ}$ $\quad 0 \le t \le 1$

$\vec{\gamma}'(t) = \vec{PQ}$ (= cste)

$\int_\Gamma dl = \int_0^1 \|\vec{PQ}\|\,dt = \|\vec{PQ}\| \int_0^1 dt = \|\vec{PQ}\|$

Ex : $n=2$ cercle unité



$f(x_1, x_2) = x_1$

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$f(\vec{\gamma}(t)) = \cos t$

$\int_\Gamma f\,dl = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 1\,dt = [\sin t]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$

Remarques :

∘ $\int_\Gamma f\,dl$ ne dépend pas de la param.

En effet soient 2 param

$\vec{\gamma} : [a,b] \to \Gamma$, $t \to \vec{\gamma}(t)$ $\qquad \tilde{\vec{\gamma}} : [\tilde{a},\tilde{b}] \to \Gamma$, $\tilde{t} \to \tilde{\vec{\gamma}}(\tilde{t})$

Soit $\varphi : [a,b] \to [\tilde{a},\tilde{b}]$ une bijection C^1

$t \to \varphi(t)$

telle que $\vec{\gamma}(t) = \tilde{\vec{\gamma}}(\varphi(t))$ et $\varphi'(t) > 0$

On effectue le chgt de var. $\tilde{t} = \varphi(t)$

$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$

$d\tilde{t} = \varphi'(t)\,dt$

$\vec{\gamma}'(t) = \tilde{\vec{\gamma}}'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

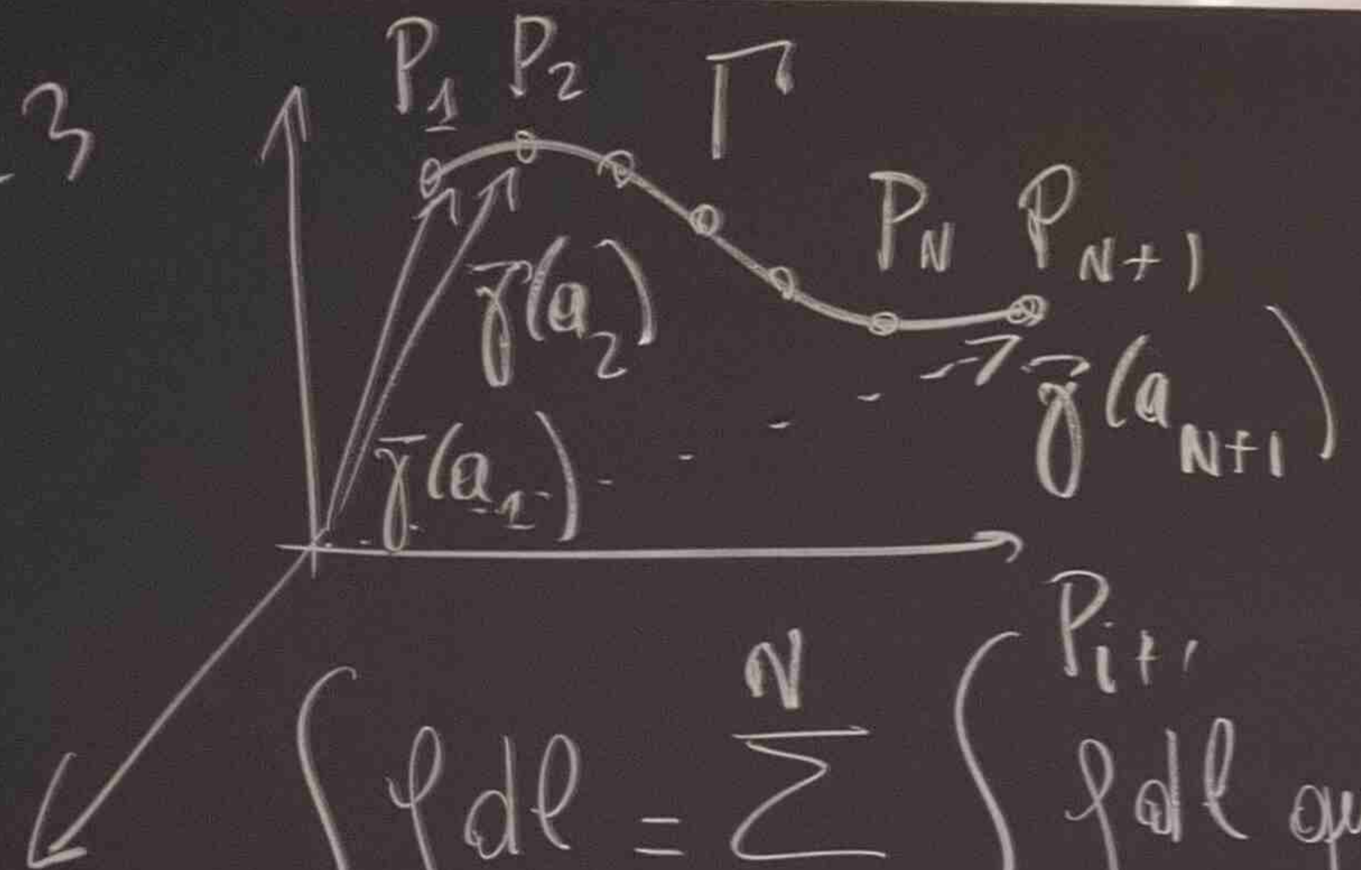
et donc $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \|\tilde{\vec{\gamma}}'(\varphi(t))\|\,\varphi'(t)$

finalement

$\int_\Gamma f\,dl = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\vec{\gamma}}(\tilde{t}))\,\|\tilde{\vec{\gamma}}'(\tilde{t})\|\,d\tilde{t}$

∘ Intuition de la formule

$n=3$



$$\int_\Gamma f\,dl = \sum_{i=1}^{N} \int_{P_i}^{P_{i+1}} f\,dl$$ qu'on approche par

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{P_{i+1}P_i}\; f(P_i)$$

D'autre part ($P_i = \gamma(a_i)$)

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

qu'on approche par

$$\sum_{i=1}^{N} |a_{i+1}-a_i|\; f(\gamma(a_i))\,\|\vec{\gamma}\,'(a_i)\|$$

$$\sum_{i=1}^{N} |a_{i+1}-a_i|\; f(P_i) \left\| \frac{\vec{\gamma}(a_{i+1})-\vec{\gamma}(a_i)}{a_{i+1}-a_i} \right\|$$

Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^0$ champ vectoriel

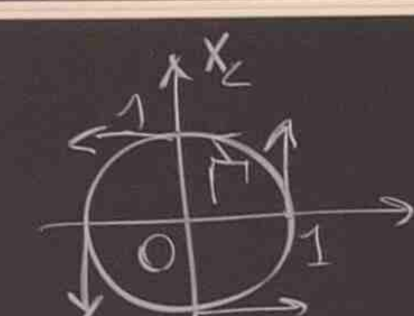
$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \to \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$$

On définit $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$ travail d'une force

$$= \int_a^b \left(F_1(\vec{\gamma}(t))\, \gamma_1'(t) + \dots + F_n(\vec{\gamma}(t))\, \gamma_n'(t) \right) dt$$

Ex : $n = 2$ $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \to (-x_2, x_1)$$



Γ : cercle centre O rayon 1 orienté dans le sens trigo.

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) = (-\sin t, \cos t)$

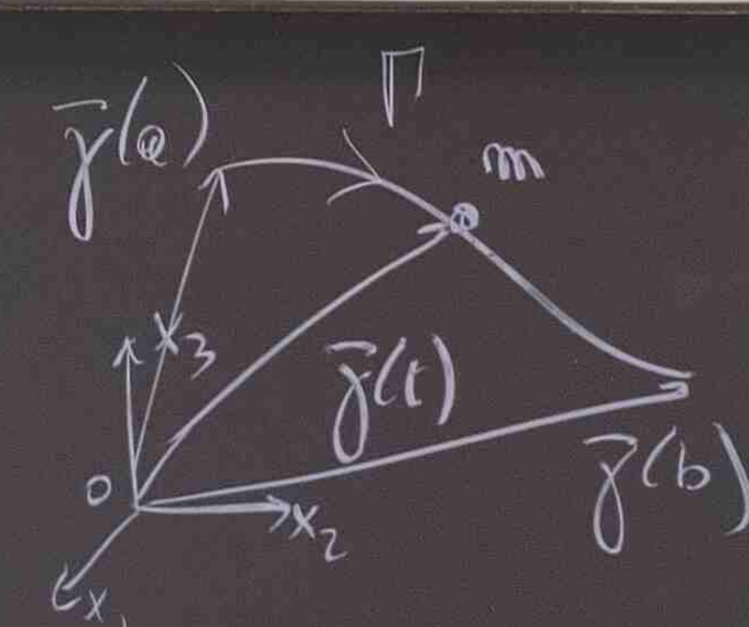
$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = 2\pi$$

Application : thm énergie cinétique

Soit une particule de masse m, de trajectoire $\vec{\gamma}(t)$, $a \le t \le b$ et soumise à une force $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))$, qui satisfait les eq de Newton.

Alors on a



$$\frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(a)\|^2 = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \quad (**)$$

En effet, si $\vec{\gamma} \in (C^2[a,b])^n$ et $\vec{F} \in C^0$, éq de Newton

$$m\,\vec{\gamma}''(t) = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))$$

On effectue le pdt scal. avec $\vec{\gamma}'(t)$

$$m\,\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t) \quad (*)$$

Or $\frac{d}{dt}\|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\,\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)$

$= 2\,\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t)$

donc $(*)$ donne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \|\vec{\gamma}'(t)\|^2\right) = \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)$$

On intègre entre $t=a$ et $t=b$

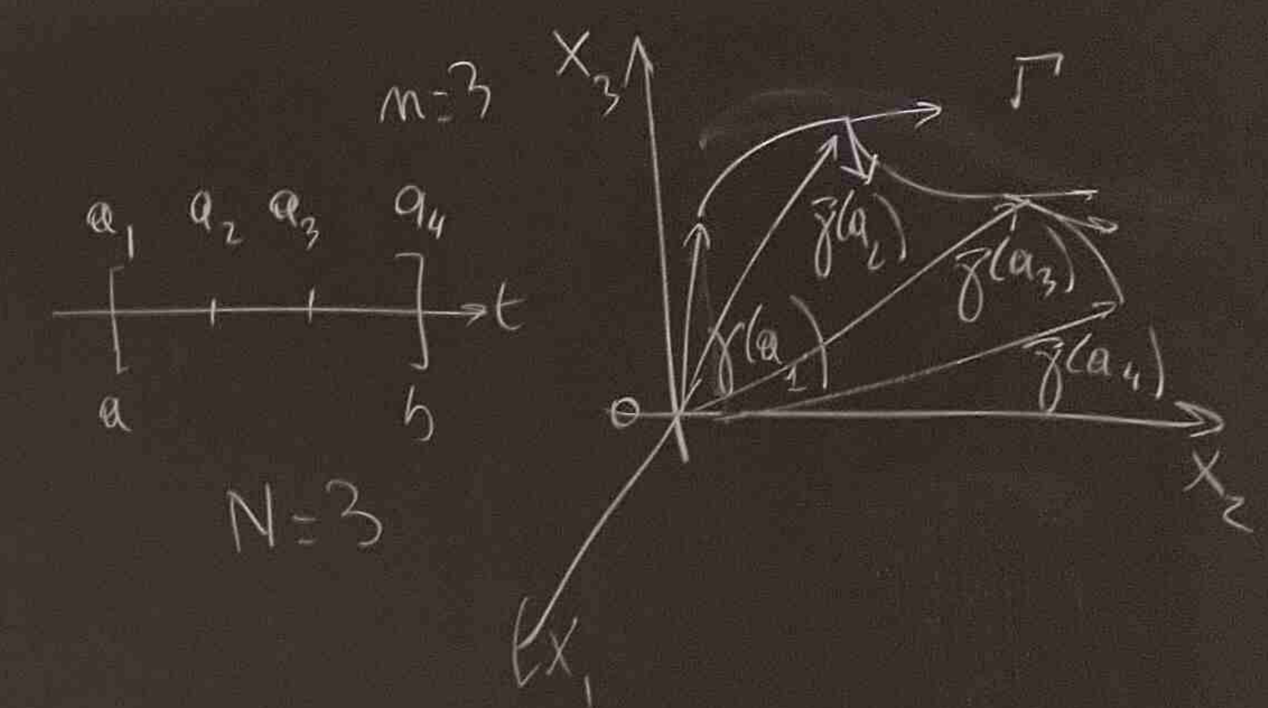
$$\int_a^b \frac{d}{dt}\|\frac{1}{2} m\,\vec{\gamma}'(t)\|^2 = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$$

qui est bien $(**)$

Extention à des courbes régulières par morceaux (déf 2.1 (iii))

Déf: On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est courbe simple régulière par morceaux si il existe $a = a_1 < a_2 < \dots < a_N < a_{N+1} = b$ et $\vec{\gamma}:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ telle que

$\vec{\gamma}:[a,b[$ bijective, C^0, $C^1[a_i, a_{i+1}]$, $1 \le i \le N$, $\vec{\gamma}'(t) \neq 0$

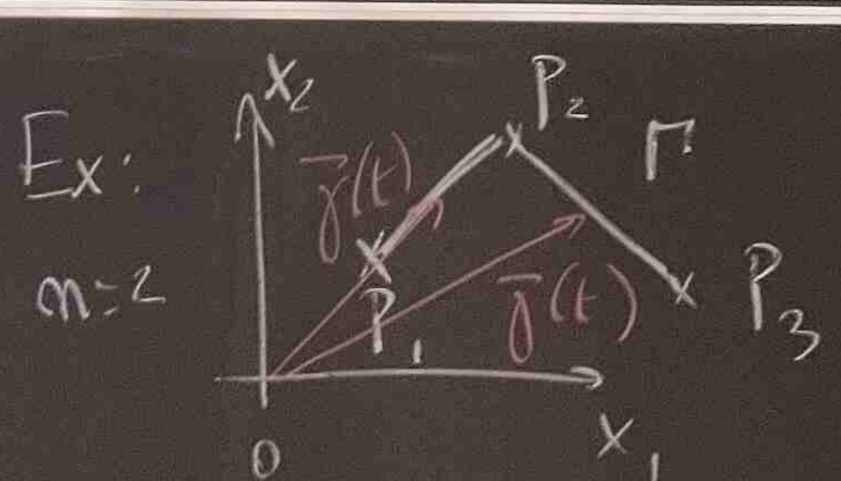


On définit $\int_\Gamma f\,d\ell = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^0

$\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^0 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$

Ex:



$\Gamma = P_1P_2 \cup P_2P_3$

P_1P_2: param $\vec{\gamma}(t) = \vec{OP_1} + t\,\vec{P_1P_2}$ $\quad 0 \le t \le 1$

P_2P_3: ______ $= \vec{OP_2} + t\,\vec{P_2P_3}$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$\int_\Gamma f\,dl = \int_0^1 f(\vec{OP_1}+t\,\vec{P_1P_2})\,\|\vec{P_1P_2}\|\,dt + \int_0^1 f(\vec{OP_2}+t\,\vec{P_2P_3})\,\|\vec{P_2P_3}\|\,dt$$

$\int_{P_i}^{P_{i+1}} f\,dl$ Correction

$\|\vec{P_iP_{i+1}}\|\, f(P_i)$

<u>Remarque</u> : · on n'a pas besoin d'expliciter $\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}$

· Attention la param doit aller de P_1 à P_2 puis de P_2 à P_3 si on doit calculer $\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dl}$

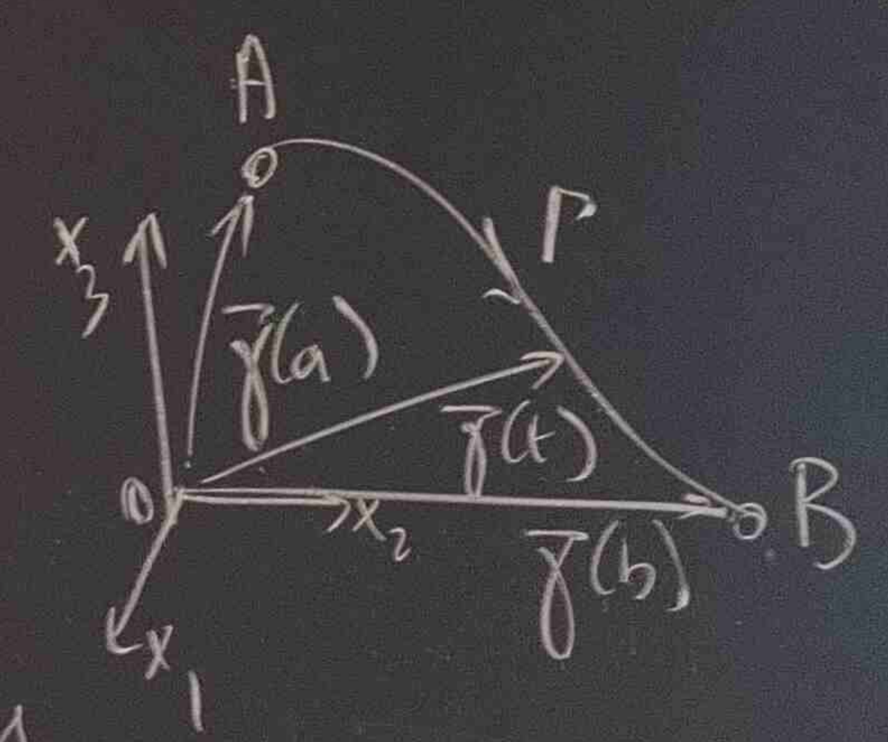
Rappel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

Analogue pour une courbe ?

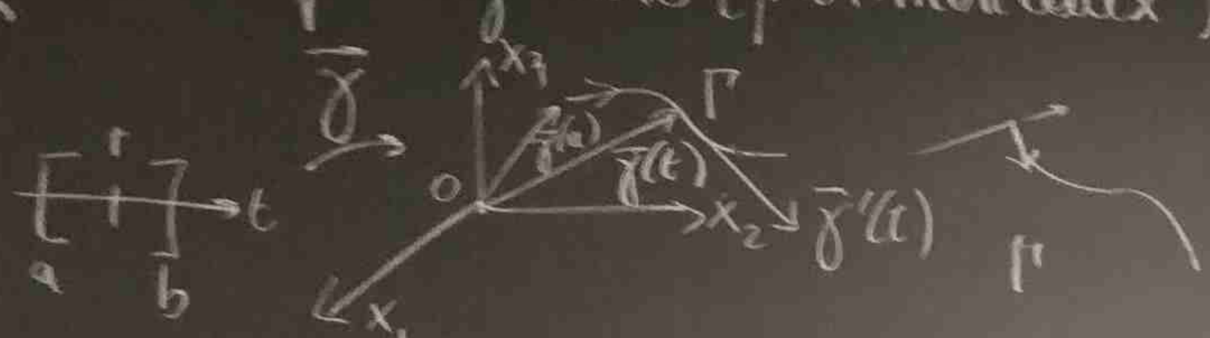
<u>Thm 3.3 (bis)</u> (pas dans le livre)

Soit Γ courbe simple, régulière par morceaux d'origine A extrem. B. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ch p scalaire C^1

On a : $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A) \quad \left(= f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))\right)$



Γ courbe simple régulière (par morceaux) $\subset \mathbb{R}^n$



$\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$ (C^1 morceaux)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\vec{x} \to f(\vec{x})$

$\int_\Gamma f \, d\ell = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (p ex force)
$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x})$

$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt$

Thm 33 (bis)

Γ courbe simple rég par morceaux $(A \to B)$, $\vec{\gamma}(a) \to \vec{\gamma}(b)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; C^1$

$\int_\Gamma \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A)$

Corollaire : Si $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^0 dérive d'un potentiel

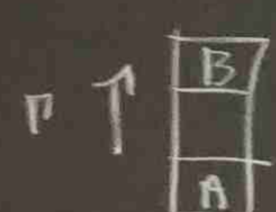
($\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; C^1$ tel que $\vec{F} = \vec{\text{grad}} f$)

alors $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_\Gamma \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A)$

travail de $\vec{F}$
- ne dépend que de A et B (et non pas du chemin)
- est nul si Γ est une courbe fermée $(A = B)$

ascenceur

$\vec{F}(\vec{x}) = (0, -m\|\vec{g}\|) = -\vec{\text{grad}}(m\|\vec{g}\| x_2)$



$\Gamma : A \to B \quad \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -m\|\vec{g}\| \left((x_2)_B - (x_2)_A \right) < 0$

$\Gamma : A \to B \to A \quad \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$ pas de travail
manque la dissipation d'énergie

Thm 33 : $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^0

$\left(\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; C^1 \text{ tq } \vec{F} = \vec{\text{grad}} f \right) \Leftrightarrow \Big(\forall \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ courbe simple régulière par morceaux fermée on a $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Big)$

Dem : cas où Γ est régulière

$\Rightarrow$: corollaire du thm 33 bis

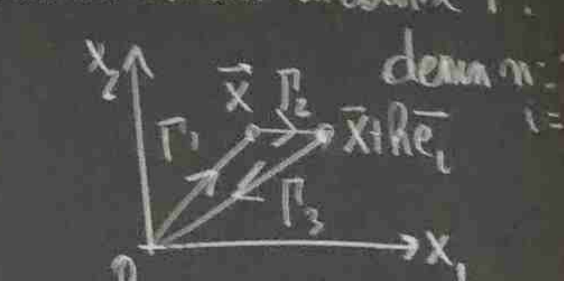
$\Leftarrow$: Supp $\forall \Gamma$ fermée $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$

et montrons $\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; C^1$ tq $\vec{F} = \vec{\text{grad}} f$

On va montrer $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$

$F_i(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

en choisissant la courbe Γ :



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$h > 0$ (destiné à $\to 0$)

Par hyp $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (*)$

param de Γ_1 : $\vec{\gamma}(t) = t\vec{x} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \vec{\gamma}'(t) = \vec{x}$

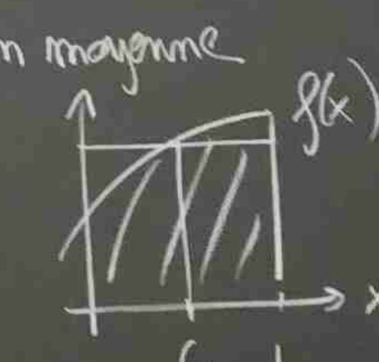
$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \vec{F}(t\vec{x}) \cdot \vec{x} \, dt \overset{\text{def}}{=} f(\vec{x})$

de même $\int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -f(\vec{x} + h\vec{e_i})$

finalement param Γ_2 : $\vec{\gamma}(t) = \vec{x} + th\vec{e_i} \quad 0 \leq t \leq 1$
$\vec{\gamma}'(t) = h\vec{e_i}$

$\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = h \int_0^1 \vec{F}(\vec{x} + th\vec{e_i}) \cdot \vec{e_i} \, dt = h \int_0^1 F_i(\vec{x} + th\vec{e_i}) dt$

thm moyenne



$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$

$\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = h F_i(\vec{x} + \theta h\vec{e_i})$

où $0 \leq \theta \leq 1$

$(*)$ donne : $\frac{f(\vec{x} + h\vec{e_i}) - f(\vec{x})}{h} = F_i(\vec{x} + \theta h\vec{e_i})$

$\lim_{h \to 0} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = F_i(\vec{x})$

manque la dissipation d'énergie

Dem: cas où Γ est régulière

Dem thm 3.3 bis

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

Γ courbe simple fermée régulière param $\vec{\gamma}(t)$

Calculons $\frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

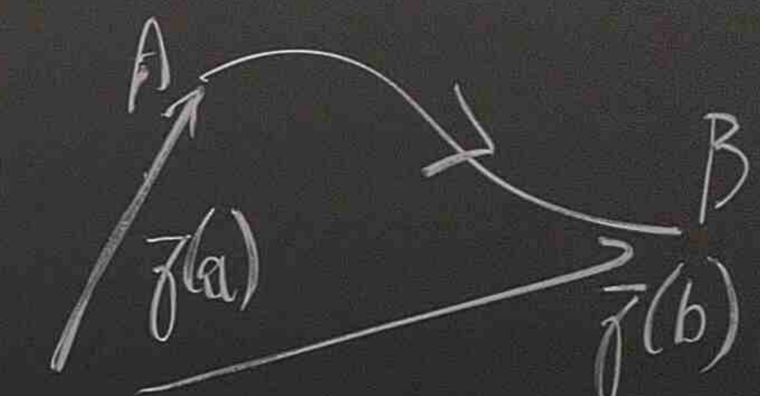
$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\gamma}(t))\, \gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\gamma}(t))\, \gamma_n'(t)$

$= \vec{\text{grad}}\, f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)$

Donc $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{\text{grad}}\, f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$

$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t))\, dt$

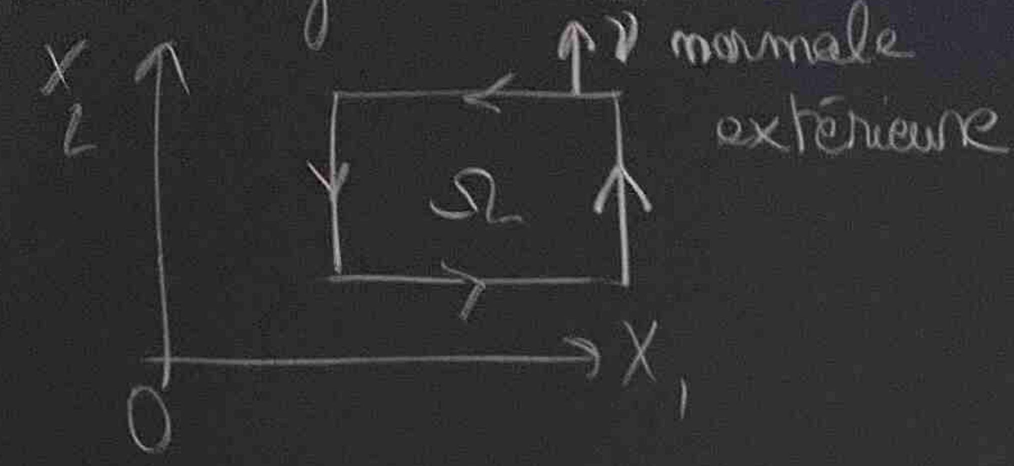
$= f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$

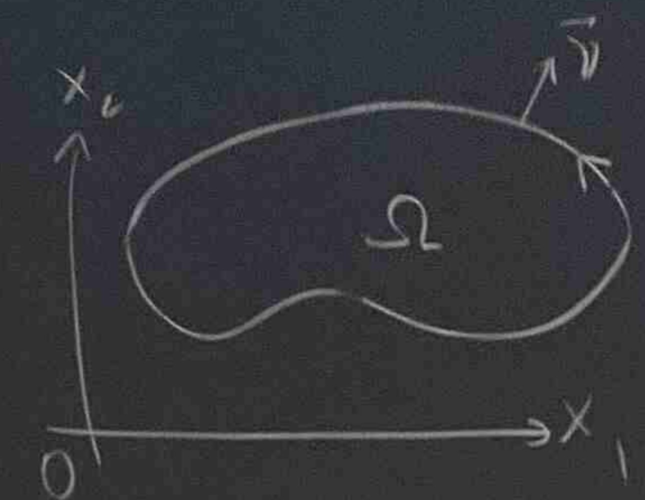


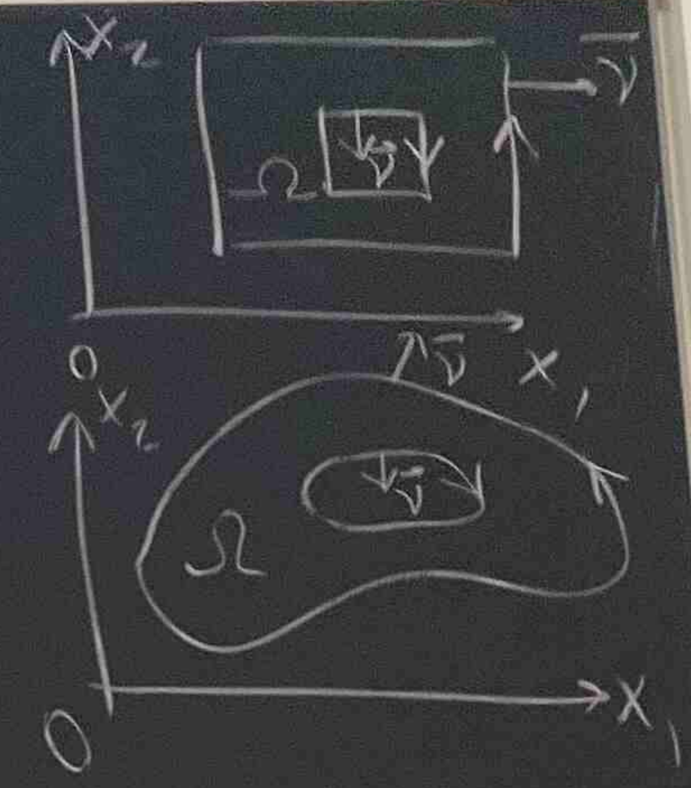
Sem 3 chap 4 livre : Théorème de Green

Domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

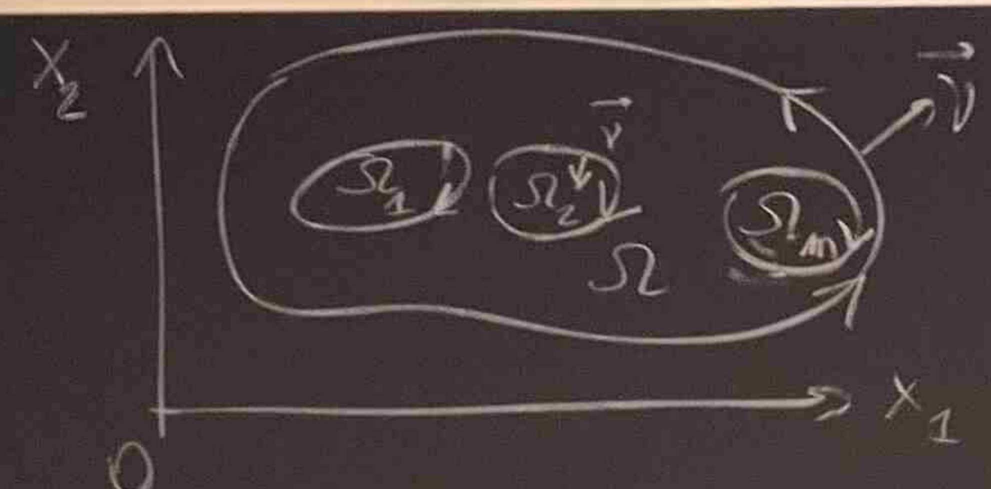
Ex :







Def.

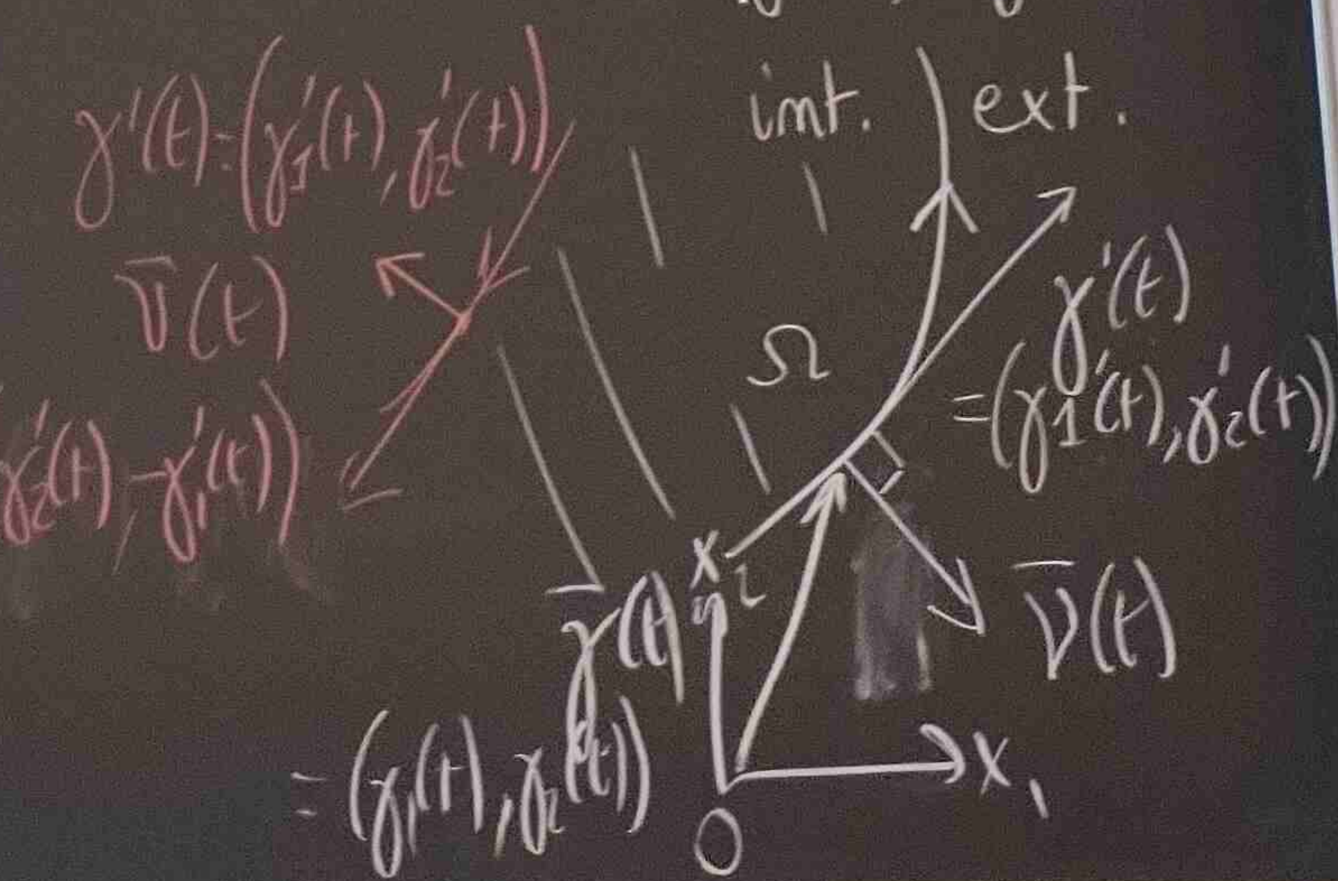


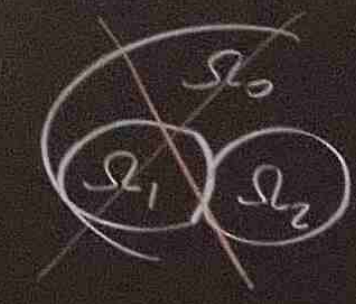
On dit que Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ s'il existe des ouverts bornés $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ tel que

- $\Omega = \Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m)$
- $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_0 \quad j = 1, \dots, m$
- $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset \quad j = 1, \dots, m$
- $\partial\Omega_i = \Gamma_i$ courbe simple fermée régulière par morceaux

- $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ est orienté positivement : en tout point $\vec{x} \in \partial\Omega$, $\vec{x} = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, la normale $\vec{\nu}(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ est orientée $= (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ vers l'extérieur

$\vec{\nu}(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$





$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Lemme (pas dans le livre):

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier orienté positivement, de normale extérieure unité. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ champ scalaire C^1, on a :

$\vec{\nu}(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t))$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, dl \qquad i = 1,2$$

Corollaire (Thm 4.2 et Corollaire 4.3 livre)

Ω domaine, orienté pos, normale ext unité $\vec{\nu}$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, C^1

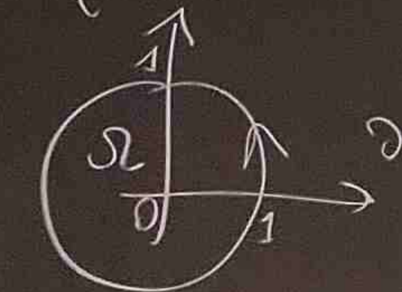
$\vec{x} \to \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(x_1,x_2), F_2(x_1,x_2))$ on a.

$$\iint_\Omega \text{rot}\,\vec{F}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\iint_\Omega \text{div}\,\vec{F}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, dl$$

Exemple de Calcul

Ω : disque unité $= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$



$F(x_1,x_2) = (-x_2^2, x_1)$

Vérifier $\iint_\Omega \text{rot}\,\vec{F}\,dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1 + 2x_2$$

$$\iint_\Omega (1+2x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, (1 + 2r\sin\theta) r$$

$x_1 = r\cos\theta \quad 0 \leq r \leq 1$

$x_2 = r\sin\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$= \int_0^1 r \left[\theta - 2r\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr$$

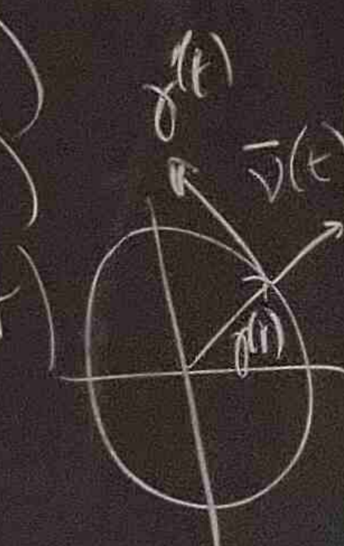
$$= \int_0^1 r\,dr\, 2\pi = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} 2\pi = \pi$$

$\partial\Omega$: cercle unité param.

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$

$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\vec{\nu}(t) = (\cos t, \sin t)$

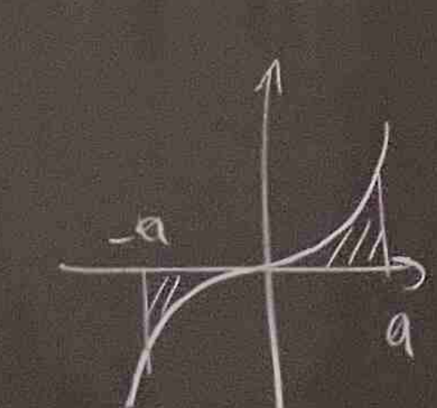


$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

car $\int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t\, dt = 0$ (fct impaire)



$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dt = \pi$$

Dem. du corollaire à partir du lemme

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}\,\vec F\,dx_1\,dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)dx_1\,dx_2$$

lemme

$$= \int_{\partial\Omega}\left(F_2\nu_1 - F_1\nu_2\right)d\ell$$

$f=F_2 \quad i=1$

$f=F_1 \quad i=2$

où $\vec\nu(t)=\dfrac{(\gamma_2'(t),\,-\gamma_1'(t))}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}}$

$$= \int_a^b \frac{F_2(\vec\gamma(t))\gamma_2'(t)+F_1(\vec\gamma(t))\gamma_1'(t)}{\|\vec\gamma'(t)\|}\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)+F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b \vec F(\gamma(t))\cdot\vec\gamma'(t)\,dt = \int_{\partial\Omega}\vec F\cdot d\vec\ell$$

$$\iint_\Omega \mathrm{div}\,\vec F\,dx_1\,dx_2 = \iint_\Omega\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)dx_1\,dx_2$$

lemme

$$= \int_{\partial\Omega}\left(F_1\nu_1+F_2\nu_2\right)d\ell = \int_{\partial\Omega}\vec F\cdot\vec\nu\,d\ell$$

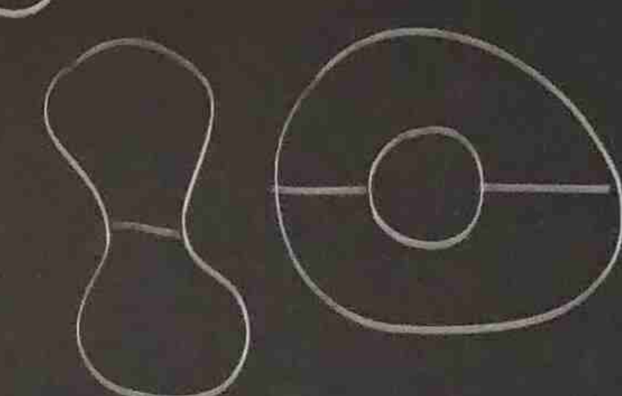
$f=F_1 \quad i=1$

$f=F_2 \quad i=2$

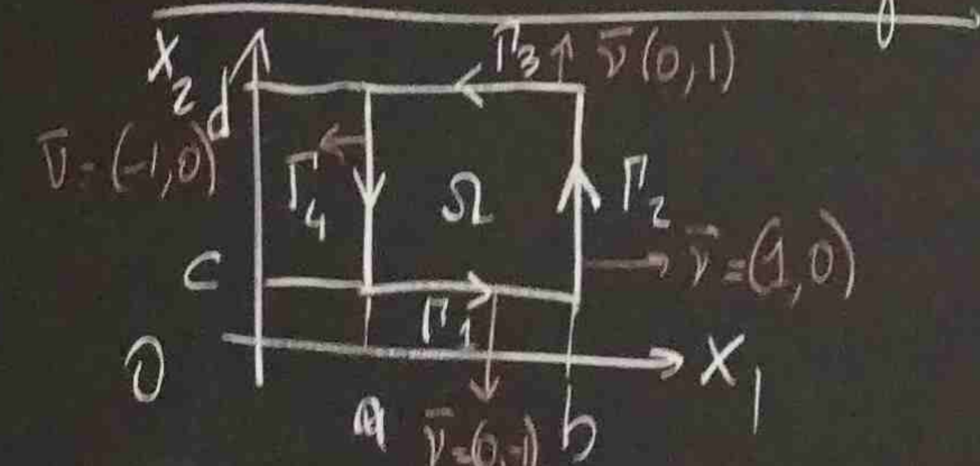
Dem. du lemme cas particuliers

- Ω est un rectangle
- Ω :

- généralisations



Cas où Ω est un rectangle



$i=1$: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} f\nu_1\,d\ell$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=\int_c^d dx_2\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\,dx_1$$

$$=\int_c^d dx_2\left(f(b,x_2)-f(a,x_2)\right) \qquad (1)$$

D'autre part $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f\nu_1\,d\ell = \left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}\right) f\nu_1\,d\ell = \int_{\Gamma_2} f\nu_1\,d\ell + \int_{\Gamma_4} f\nu_1\,d\ell$

Γ_2 : param $\vec{\gamma}(t) = (b, t) \quad c \leq t \leq d$

$\vec{\gamma}'(t) = (0,1) \quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$

$\vec{\nu}(t) = (1,0)$

$$\int_{\Gamma_2} f \nu_1 \, dl = \int_c^d f(b,t) \cdot 1 \, dt$$

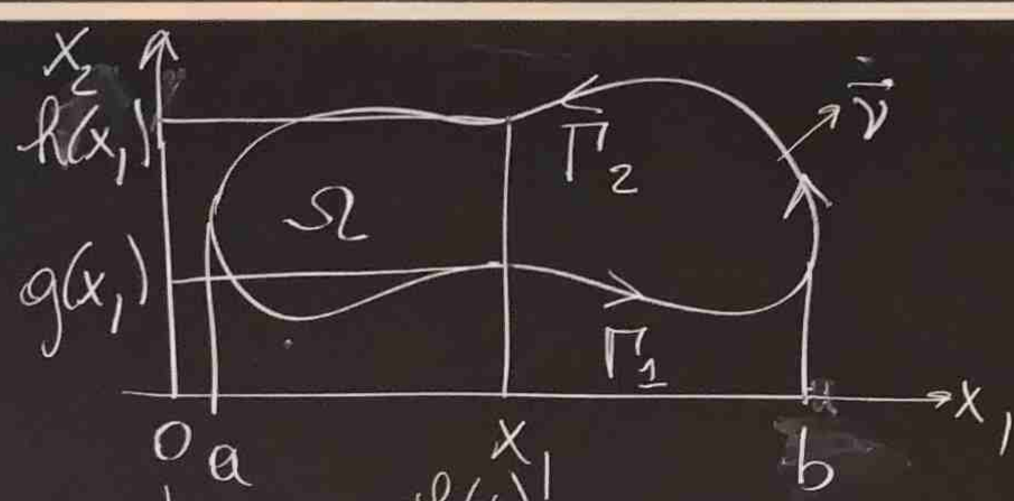
Par mimétisme

$$\int_{\Gamma_2} f \nu_1 \, dl = -\int_c^d f(a,t) \, dt$$

donc $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f \nu_1 \, dl = \int_c^d \big(f(b,t) - f(a,t)\big) \, dt$

qui est bien (1)

Cas où Ω est :



Lemme $i=2$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} \, dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} dx_2 \, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

$$= \int_a^b dx_1 \Big(f(x_1, h(x_1)) - f(x_1, g(x_1)) \Big) \quad (2)$$

$$\int_{\partial\Omega} f \nu_2 \, dl = \int_{\Gamma_1} f \nu_2 \, dl + \int_{\Gamma_2} f \nu_2 \, dl$$

Γ_1 : paramétrisation $\vec{\gamma}(t) = (t, g(t)) \quad a \leq t \leq b$

$\vec{\gamma}'(t) = (1, g'(t)) \quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + (g'(t))^2}$

$$\vec{\nu}(t) = \frac{(g'(t), -1)}{\sqrt{1 + (g'(t))^2}}$$

$$\int_{\Gamma_1} f \nu_2 \, dl = \int_a^b f(t, g(t)) \frac{-1}{\sqrt{1+(g'(t))^2}} \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt = -\int_a^b f(t, g(t)) \, dt$$

Par mimétisme (substitution)

$$\int_{\Gamma_2} f \nu_2 \, dl = \int_a^b f(t, h(t)) \, dt$$

Finaleme

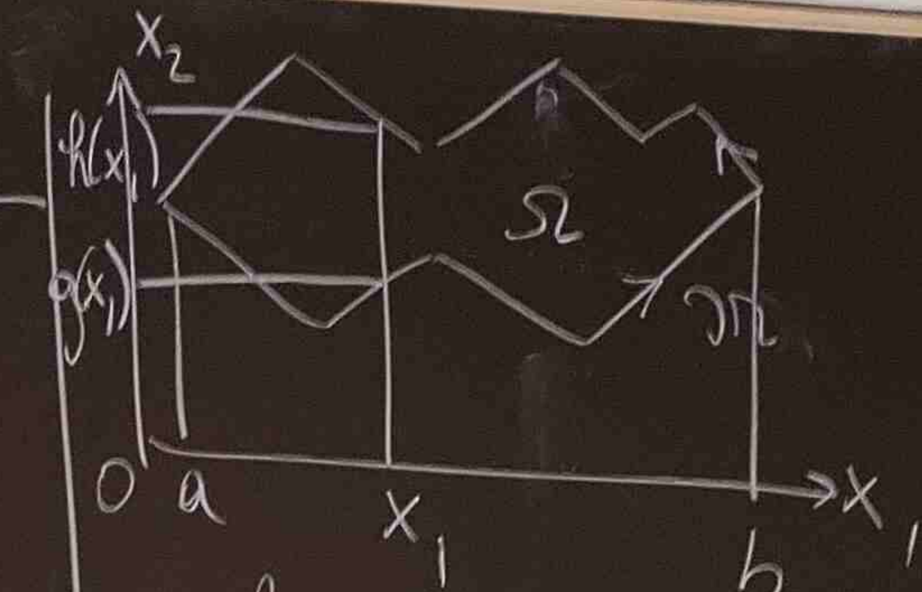
qui conve

géné

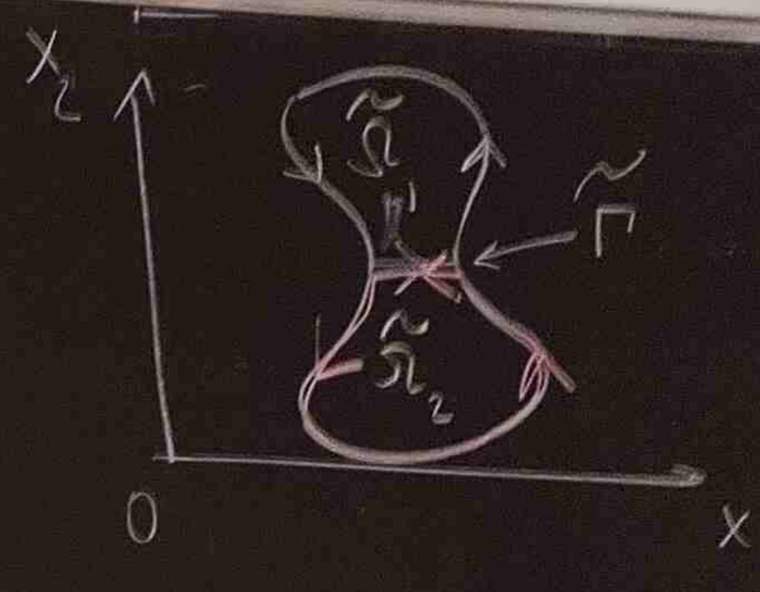
Finalement $\int_{\partial\Omega} f \nu_2 \, dl = \int_a^b \big(f(t,h(t)) - f(t,g(t)) \big) dt$

qui correspond bien à (2)

• généralisations :



g, h sont régulière par morceaux



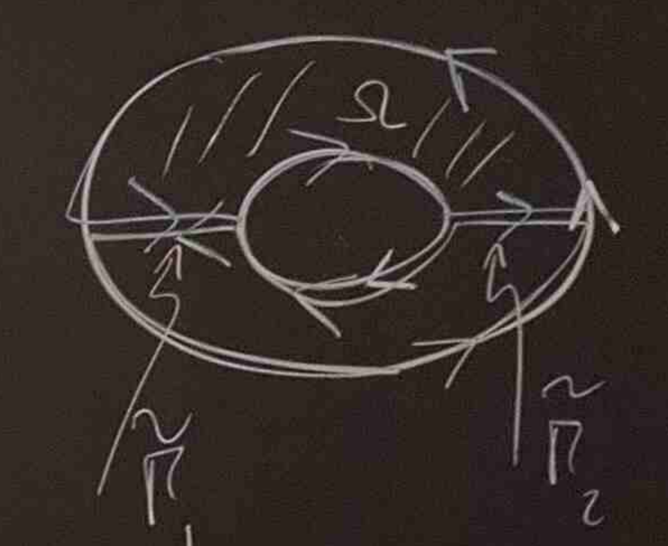
$$\iint_{\tilde{\Omega}_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\tilde{\Omega}_1} f \nu_2 \, dl$$

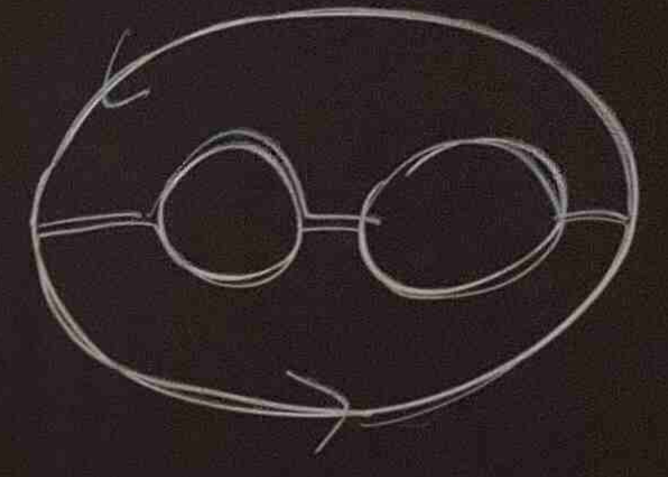
$$\iint_{\tilde{\Omega}_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\tilde{\Omega}_2} f \nu_2 \, dl$$

$\Omega = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_2 \, dl$$

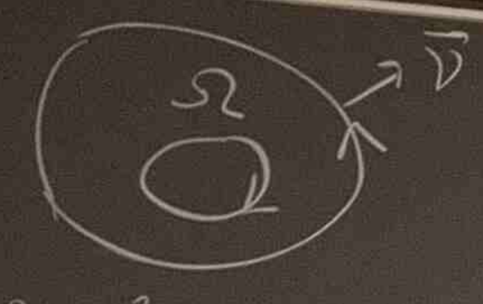
les intégrales sur $\tilde{\Gamma}$ s'annullent





les intégrales sur $\tilde{\Gamma}_1$ et $\tilde{\Gamma}_2$ s'annullent

on obtient aussi $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_2 \, dl$



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \,dl$, $i = 1,2$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$ $\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\,dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,dl$

Lemme: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

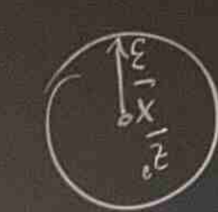
Si $\iint_\Omega f\,dx_1 dx_2 = 0$ pour tout domaine rég. Ω

Alors $f(x_1,x_2) = 0$ $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

Dem: théorème de la moyenne

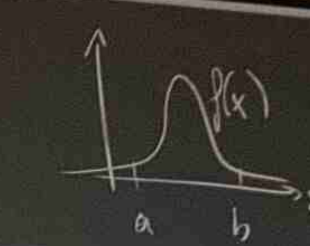
$\forall \bar{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ on choisit

$\Omega = B(\bar{x},\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ donné



$0 \overset{hyp}{=} \iint_{B(\bar{x},\varepsilon)} f(y_1,y_2)\,dy_1 dy_2 \overset{\text{thm moye}}{=} f(z_1,z_2)\,4\pi\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(x_1,x_2)$

où $(z_1,z_2) \in B(\bar{x},\varepsilon)$

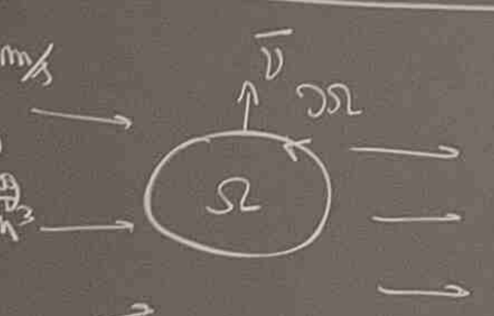


et donc $f(x_1,x_2) = 0$ $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

Application: eq. conservation de la masse

vitesse $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ m/s

densité $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\frac{kg}{m^3}$



Soit Ω domaine rég quelconque

On a: $\int_{\partial\Omega} \rho\vec{v}\cdot\vec{\nu}\,dl = 0$ $\quad m \frac{kg}{m^3}\frac{m}{s} = \frac{kg}{m\,s}$

(masse entrante = masse sortante)

Thm divergence $(\vec{F} = \rho\vec{v})$

$\iint_\Omega \operatorname{div}(\rho\vec{v})\,dx_1 dx_2 = 0$ pour tout Ω

D'après le lemme $(f = \operatorname{div}(\rho\vec{v}))$ on a:

$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$

(si ρ = cste $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, liquides)

Si $\rho(x_1,x_2,t)$ et $\vec{v}(x_1,x_2,t)$, on a.

$\frac{d}{dt}\left(\iint_\Omega \rho(x_1,x_2,t)\,dx_1 dx_2\right) + \int_{\partial\Omega} \rho\vec{v}\cdot\vec{\nu}\,dl = 0$

La variation au cours du temps de la masse + masse entrante et sortante = 0

$\iint_\Omega \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}(x_1,x_2,t) + \operatorname{div}\rho\vec{v}(x_1,x_2,t)\right) dx_1 dx_2 = 0$

Lemme $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$

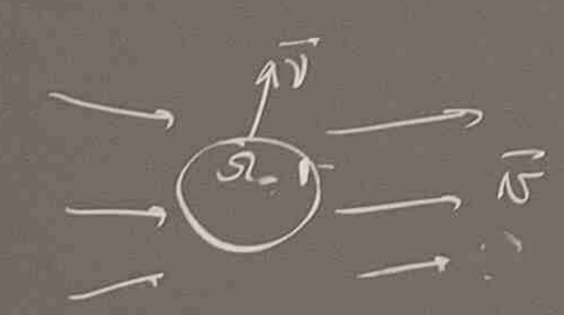
Conservation de la chaleur

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ température

$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vitesse

$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ coefficient de diffusion (>0)

$\rho c_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Chaleur spécifique (>0) par unité de volume



Energie thermique :

$\int_{\partial\Omega} -k\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T\cdot\vec{\nu}\,dl + \int_{\partial\Omega} \rho c_p T\,\vec{v}\cdot\vec{\nu}\,dl = 0$

énergie thermique (entr. ou sortante) due à la diffusion de la chaleur

enthalpie — en. th. due au transport

Ceci est vrai pour tout domaine Ω

Thm divergence

$\iint_\Omega -\operatorname{div}(k\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T)\,dx_1 dx_2 + \iint_\Omega \operatorname{div}(\rho c_p T\vec{v})\,dx_1 dx_2 = 0$

Lemme : $-\operatorname{div}(k\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T) + \operatorname{div}(\rho c_p T\vec{v}) = 0$ (x_1,x_2) $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

Si k = cste >0 ρc_p = cste >0 $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ $\quad -k\Delta T + \rho c_p\,\vec{v}\cdot\nabla T = 0$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coefficient de diffusion (>0)

$\rho c_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Chaleur spécifique (>0) par unité de volume

Energie thermique :

(entrant ou sortante) due à la diffusion de la chaleur

due au transport

Ceci est vrai pour tout domaine Ω

Lemme : $-\mathrm{div}(k$

Si $k = \text{cste} > 0$ $\rho c_p =$

Si $T(x_1, x_2, t)$

$\vec{v}$ ——

k ——

ρc_p ——

principe de conservation

$$\frac{d}{dt}\left(\iint_\Omega \rho c_p T \, dx_1 dx_2\right) + \int_{\partial\Omega} -k \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \cdot \vec{\nu} \, dl + \int_{\partial\Omega} \rho c_p T \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, dl = 0$$

Var. temps én. th. dans Ω

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \mathrm{div}(-k \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}) + \mathrm{div}(\rho c_p T \vec{v})\right) dx_1 dx_2 = 0$$

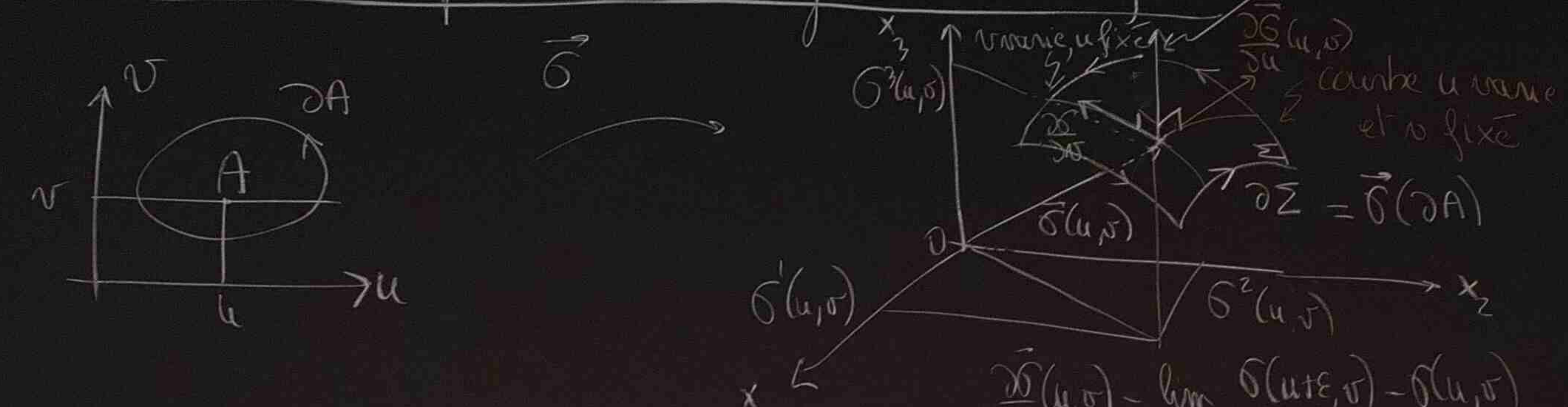
vrai pour tout Ω

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) - \mathrm{div}(k \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} T) + \mathrm{div}(\rho c_p T \vec{v}) = 0$$

Si $\rho c_p = \text{cste}$, $k = \text{cste}$, $\mathrm{div} \vec{v} = 0$, on a :

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{évolution}} - \underbrace{k \Delta T}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\rho c_p \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} T}_{\text{transport}} = 0$$

Semaine 4 Chap 5 livre : intégrales de surface



$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}$ normale

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma(u+\varepsilon, v) - \sigma(u,v)}{\varepsilon}$$

Def (8.12 livre) :

(i) On dit que Σ est une surface régulière, s'il existe un domaine $A \subset \mathbb{R}^2$ tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière par morceaux et une paramétrisation $\vec{\sigma} : \overline{A} \to \Sigma$, $u, v \to \vec{\sigma}(u,v) = (\sigma^1(u,v), \sigma^2(u,v), \sigma^3(u,v))$ telle que $\vec{\sigma} : A \to \Sigma$ est bijective, C^1, $\left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}\right)(u,v) \neq 0$

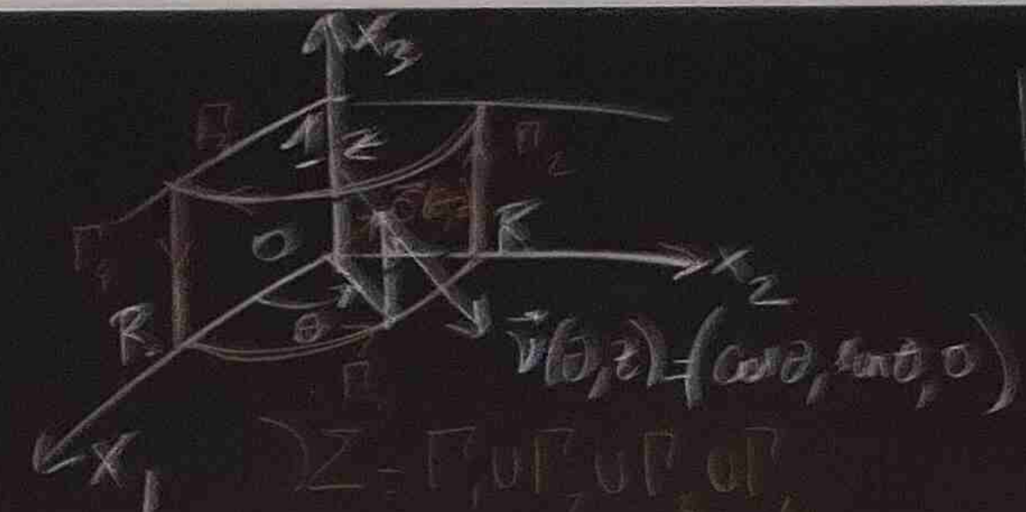
Le vecteur $\vec{\nu}(u,v) = \dfrac{\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\|}$ est appelé normale unité

(ii) le bord de Σ, noté $\partial \Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$. Le sens de parcours de $\partial \Sigma$ est obtenu en parcourant ∂A dans le sens positif

Ex: 1/4 de cylindre

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1^2 + x_2^2 = R^2 ;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

$\vec{\sigma}$



$\vec{\sigma}(\theta,z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

Remarque : si on définit

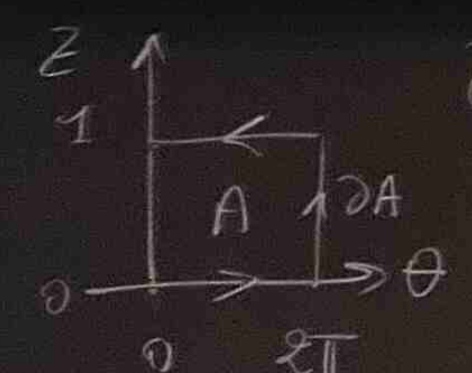
$\vec{\sigma}(z,\theta) = (R\cos\theta, \sin\theta, z)$

puisque $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

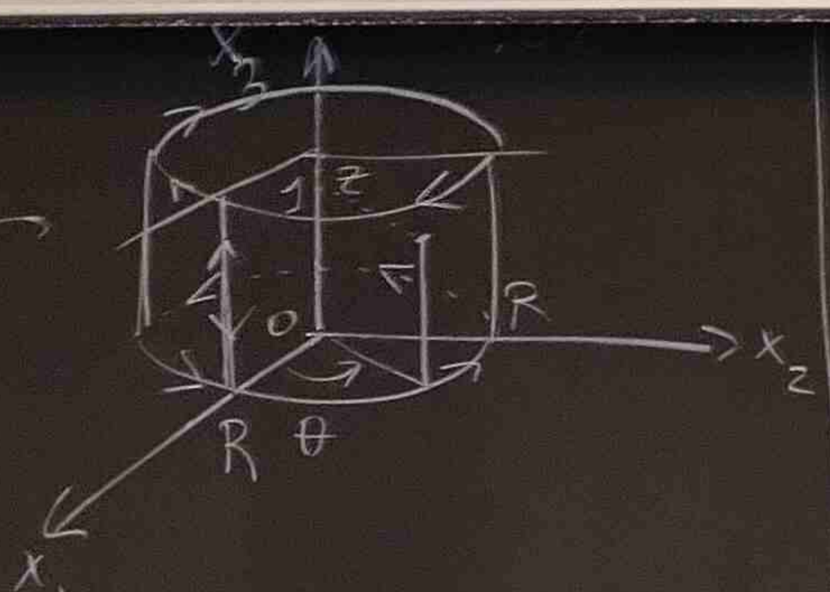
$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial z} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} = (-R\cos\theta, -R\sin\theta, 0)$

la direction de la normale a changé

Attention le cylindre n'est pas une surface régulière.



$\vec{\sigma}$



$\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1^2+x_2^2 = R^2 ;\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$

$\vec{\sigma}(\theta,z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$

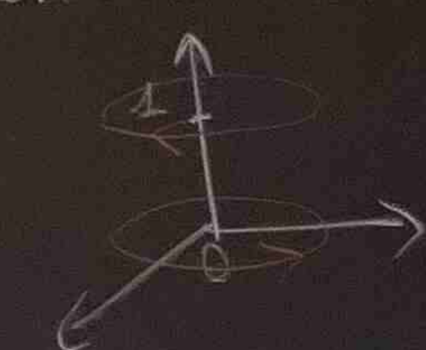
pas une bijection : $\bar{A} \to \Sigma$

$\sigma(0,z) = \sigma(2\pi,z)$

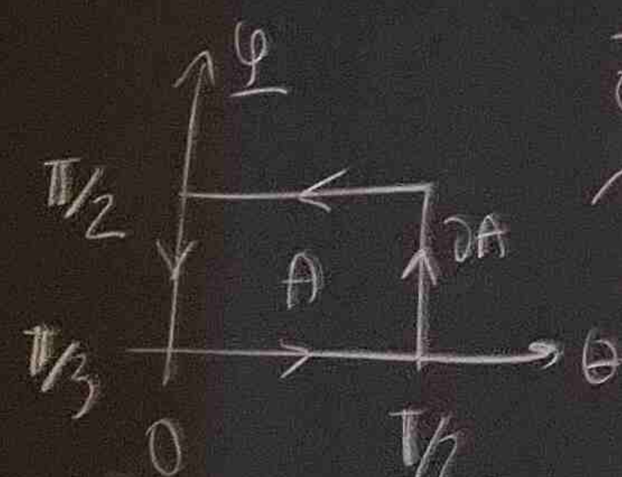
mais ceci n'a pas d'importance pour le calcul d'intégrales

Par contre, il faut savoir définir $\partial\Sigma$

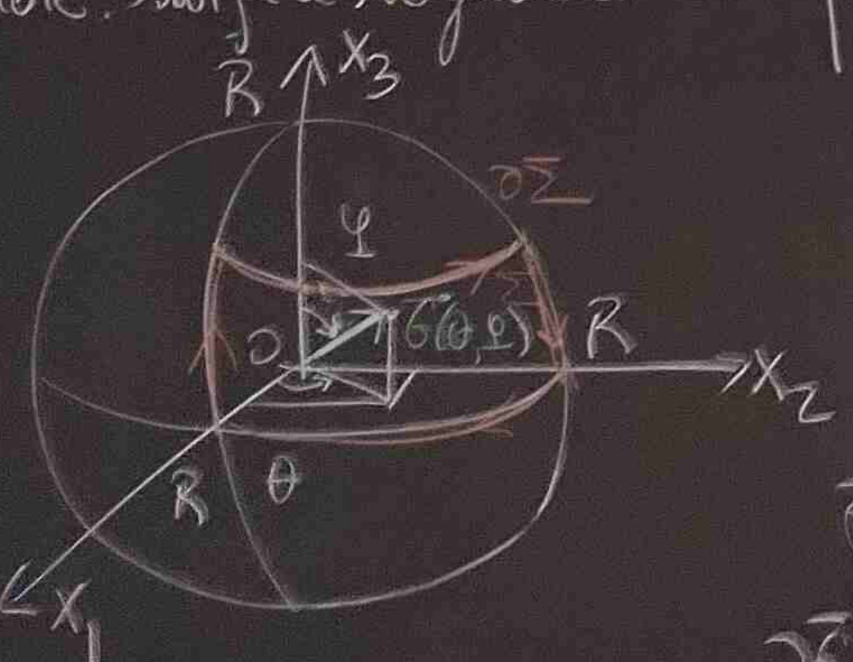
On prend $\vec{\sigma}(\partial A)$ et on supprime les points et les arêtes parcourues 2 fois en sens inverse

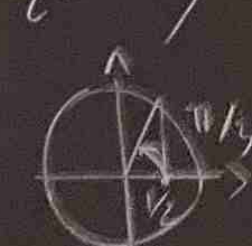


Ex : morceau de sphère : surface régulière $\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = R^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 0 \leq x_3 \leq R/2\}$



$\vec{\sigma}$





$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi} = (-R^2\cos\theta\sin^2\varphi, -R^2\sin\theta\sin^2\varphi, -R^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi} = -R\sin\varphi\ \vec{\sigma}(\theta,\varphi)$

dirigé vers O

$\vec{\sigma}(\varphi,\theta) =$ même chose $= (R\cos\theta\sin\varphi, \ldots\ldots)$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} = R\sin\varphi\ \vec{\sigma}(\theta,\varphi)$

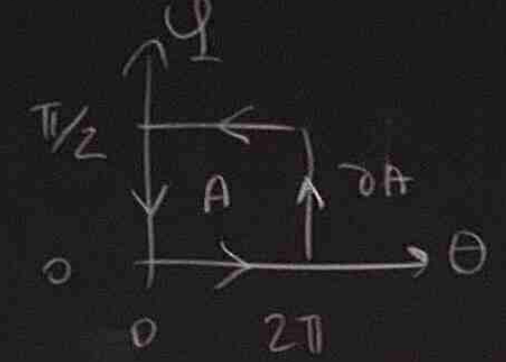
dirigé vers l'extérieur

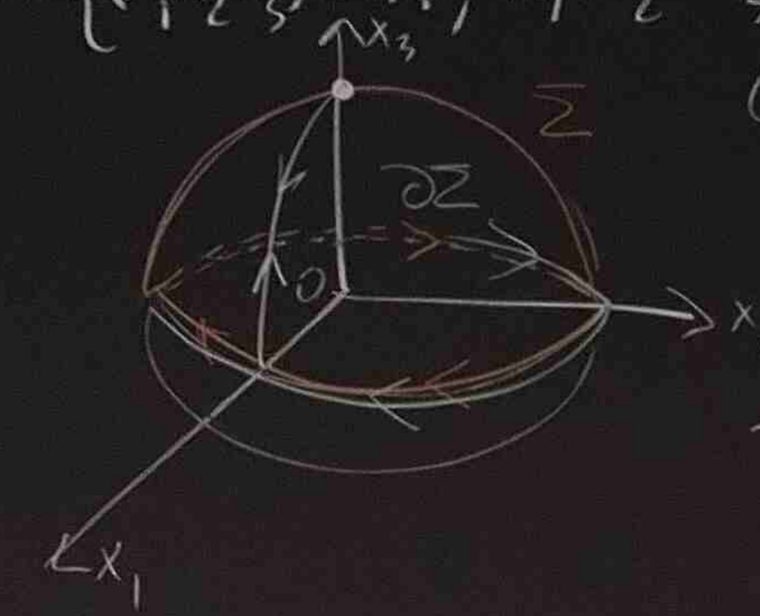
...ttention le cylindre n'est pas une surface régulière!

...n définir $\partial\Sigma$ ... supprime ... parcourues ...

...in φ $\vec{\sigma}(\theta,\varphi)$ ... chose ... $(\varphi, \ldots)$ ... φ $\vec{\sigma}(\theta,\varphi)$ ... l'extérieur

Ex: 1/2 sphère $\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = R^2,\ x_3 \geq 0\}$

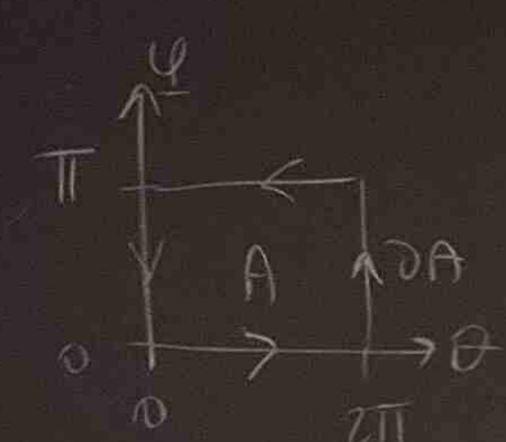


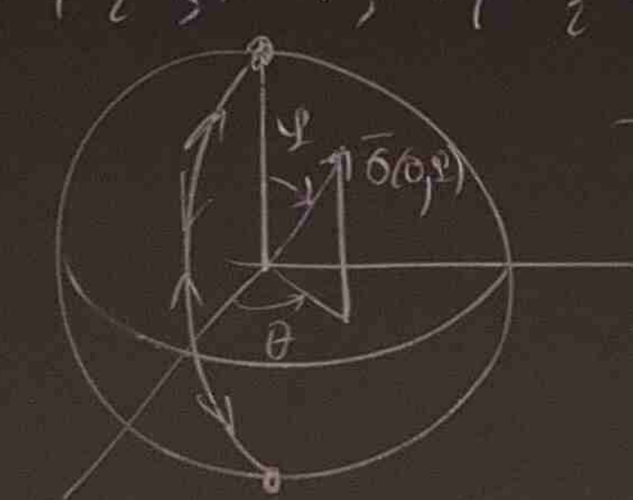


On supprime le pôle nord et le méridien de Greenwich

$\partial\Sigma$ = cercle sur l'équateur

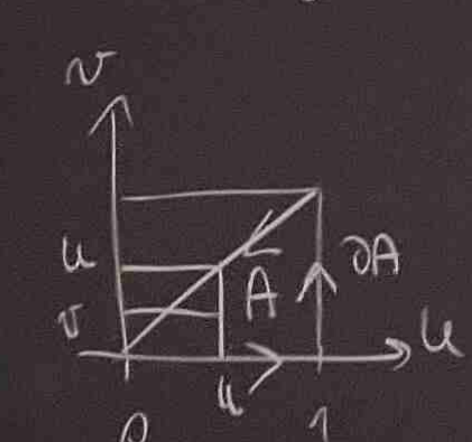
Ex: sphère $\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = R^2\}$

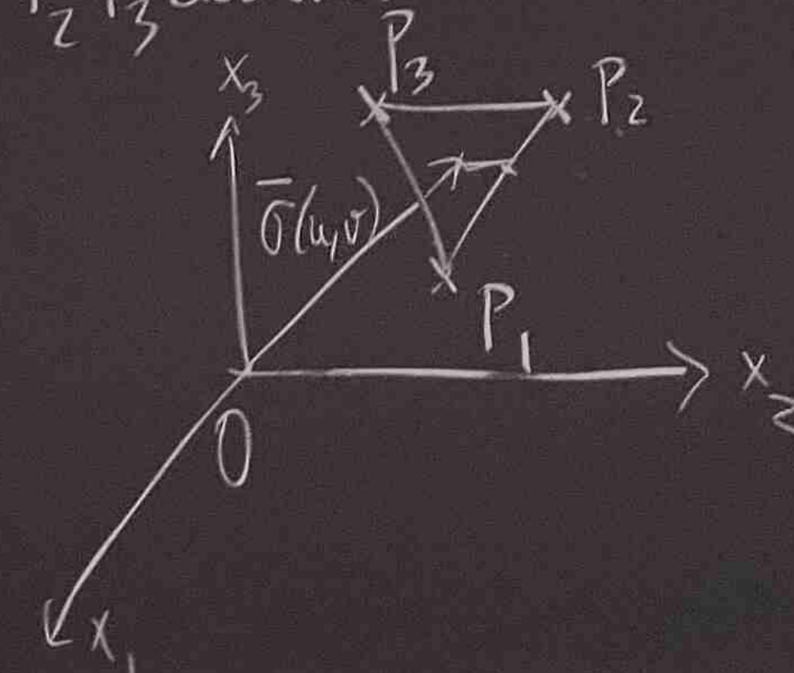




$\partial\Sigma = \emptyset$!

Ex: triangle $P_1P_2P_3$ dans $\mathbb{R}^3$





$\vec{\sigma}(u,v) = \vec{OP_1} + u\,\vec{P_1P_2} + v\,\vec{P_2P_3}$

$0 \leq u \leq 1 \quad 0 \leq v \leq u$

$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} = \vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_2P_3}$

Def 5.2.5.3 livre

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de param. $\vec{\sigma} : A \to \Sigma$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ champ scalaire C^0

Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ —— vectoriel C^0

On définit

$$\iint_\Sigma f\, ds = \iint_A f(\vec{\sigma}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \qquad \left(\text{Si } f = 1 \iint_\Sigma ds = \text{aire}(\Sigma)\right)$$

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right) du\, dv \quad \left(= \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds \right)$$

En effet
$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \underbrace{\vec{\nu}(u,v)}_{\dfrac{\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\|}} \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

$$= \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

$$= (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

puisque $a \wedge b = -b \wedge a$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = (-R\cos\theta, -R\sin\theta, 0)$$

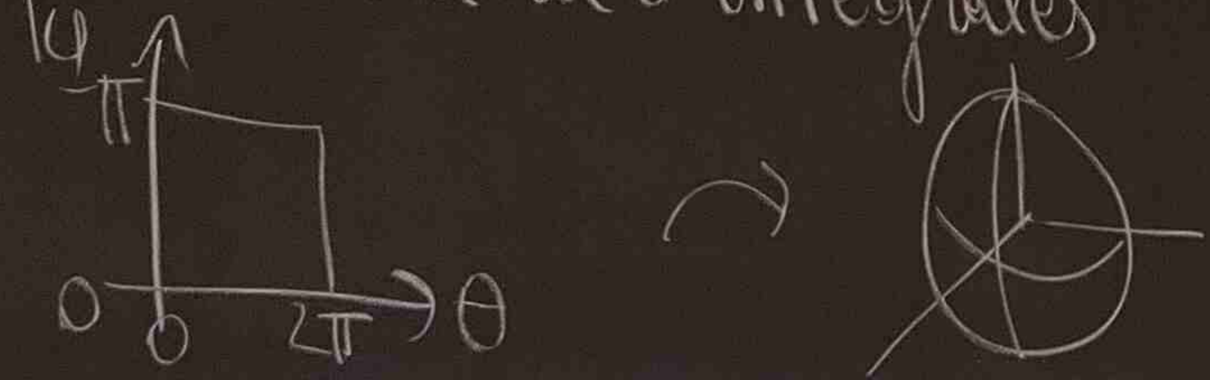
la direction de la normale a changé

... n'est pas une surface régulière.

Ex : Σ sphère centre O rayon R

(pas une surface régulière)

mais ce n'est pas important pour le calcul d'intégrales



$$\sigma(\varphi,\theta) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = R\sin\varphi\,\vec{\sigma}(\varphi,\theta)$$ normale vers l'ext

$$\| \text{———} \| = R^2 \sin\varphi$$ (à vérifier)

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad \iint_\Sigma f\,ds = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \; R^2 R^2 \sin\varphi$$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\pi R^4 \cdot 2 = 4\pi R^4$$

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (0,0,x_3)$$

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \; \underbrace{(0,0,R\cos\varphi)\cdot R\sin\varphi\,\vec{\sigma}(\varphi,\theta)}_{R\cos\varphi\, R^2 \sin\varphi\cos\varphi}$$

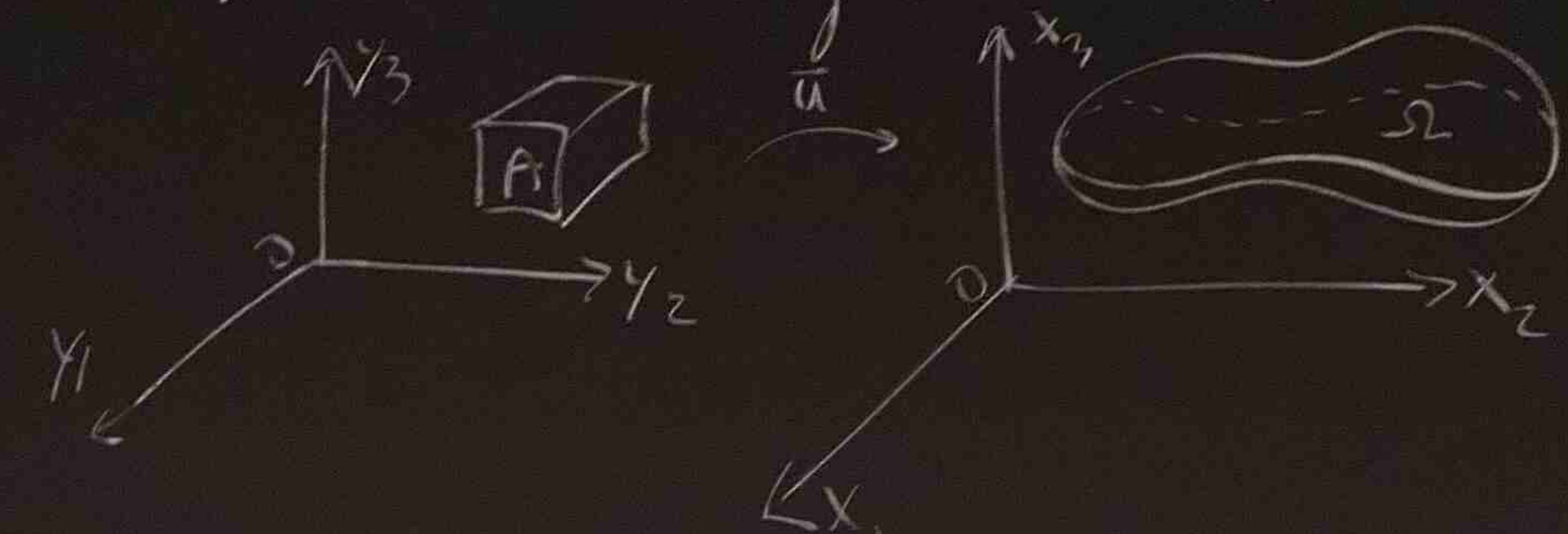
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

$\vec{F}(x_1 x_2 x_3) = (0, 0, x_3)$
$\vec{\nu}$
$\vec{F} \cdot \vec{\nu} > 0$
$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu} > 0$
Boule $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$
volume
∂V = surface sphère Σ
$\partial \Sigma = \emptyset$
$\vec{\sigma} : \bar{A} \to \Sigma$ bijective C^1
$\partial \Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$
$\vec{\nu} = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}$
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^0
$\iint_\Sigma f ds = \iint_A f(\vec{\sigma}(u,v)) \| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \| du dv$
$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^0
$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu} ds = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot (\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}) du dv$
Surfaces régulières par morceaux
Ex : on plie une feuille
ou alors
interdit
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
$\vec{\sigma} : \bar{A} \to \Sigma$ bijective continue, C^1 par morceaux
$\vec{\nu}$ discontinue
$\partial \Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$
Si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_m$ (Σ_i surfaces régulières orientées)
$\iint_\Sigma f ds = \sum_{i=1}^m \iint_{\Sigma_i} f ds$
$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^m \iint_{\Sigma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}$
param. de Σ_1 : $\vec{\sigma}(u,v) = (u, 0, v)$ $0 \le u, v \le 1$ $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = (1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,-1,0)$ (1)
ou alors $\vec{\sigma}(u,v) = (v, 0, u)$ —— $= (0,1,0)$ (2)
param de Σ_2 : $\vec{\sigma}(u,v) = (u, v, 0)$ —— $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = (1,0,0) \wedge (0,1,0) = (0,0,1)$ (3)
ou alors $\vec{\sigma}(u,v) = (v, u, 0)$ —— $(0,0,-1)$ (4)
$\vec{F}(x_1 x_2 x_3) = (1,1,1)$
$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu} ds = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{\nu} ds + \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{\nu} ds$
param (1) et (4) : $\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = -1 - 1 = -2$
—— (2) et (3) : $\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1 + 1 = 2$
Autres ex :
Ex n'est pas une surface régulière par morceaux
cf déf 8.13 ième
car $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ est une courbe
B


Ex: boîte à chaussures sans couvercle
Ex: boîte à chaussure avec couvercle
Ex: cône
est une surface régulière par morceaux
Σ1 ∩ Σ2 ∩ Σ3 = O un point
∂Σ = σ(∂A) on supprime les arêtes parcourues 2x sens inverse
toutes les arêtes de ∂Σ = σ(∂A) sont parcourues 2x en sens inverse
∂Σ = ∅
sans couvercle
avec couvercle
B

Chap 6 : thm divergence

Rappel (8.5 livre) : calcul d'intégrales dans $\mathbb{R}^3$



$\vec{u} : A \to \Omega \quad C^1$

$\vec{y} \to \vec{x} = \vec{u}(\vec{y})$

$(y_1, y_2, y_3) \to (x_1, x_2, x_3)$

$x_1 = u_1(y_1, y_2, y_3)$

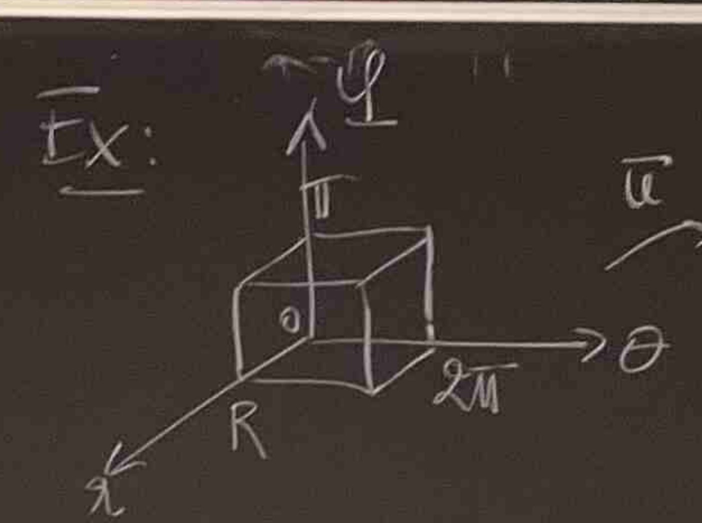
$x_2 = u_2(y_1, y_2, y_3)$

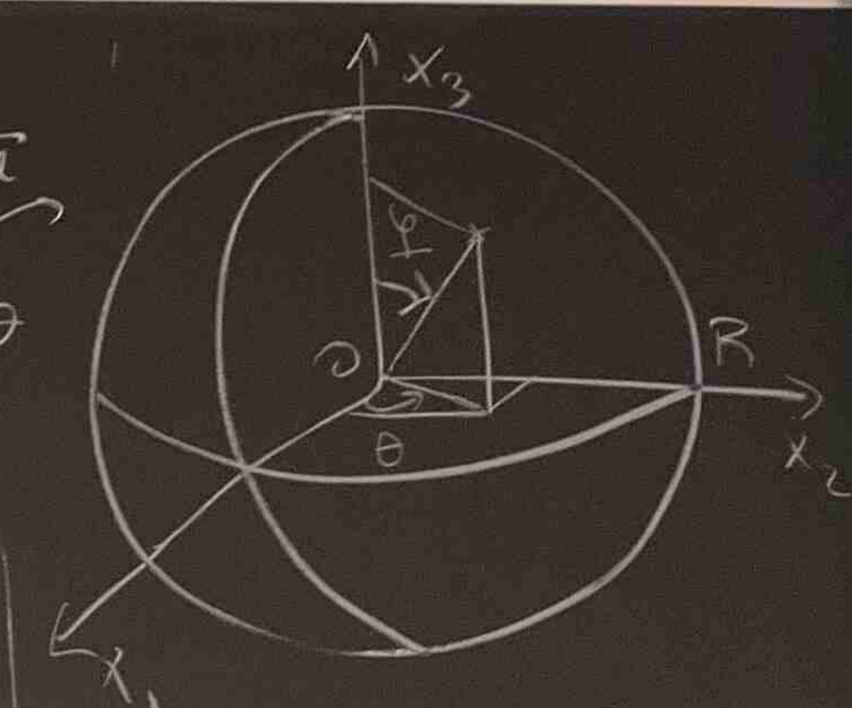
$x_3 = u_3(y_1, y_2, y_3)$

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \frac{\partial u_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \times & \times \\ \times & \times & \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

$$\iiint_\Omega \underbrace{f(x_1, x_2, x_3)}_{f(\vec{x})} \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_A f(\vec{u}(y)) \left| \det \nabla \vec{u}(\vec{y}) \right| dy_1 dy_2 dy_3$$

Ex :





Ω : boule centre O rayon R

$= \{x_1 x_2 x_3 \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$

$x_1 = r \cos\theta \sin\varphi = u_1(r, \theta, \varphi)$

$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi = u_2$ ——

$x_3 = r \cos\varphi = u_3$ ——

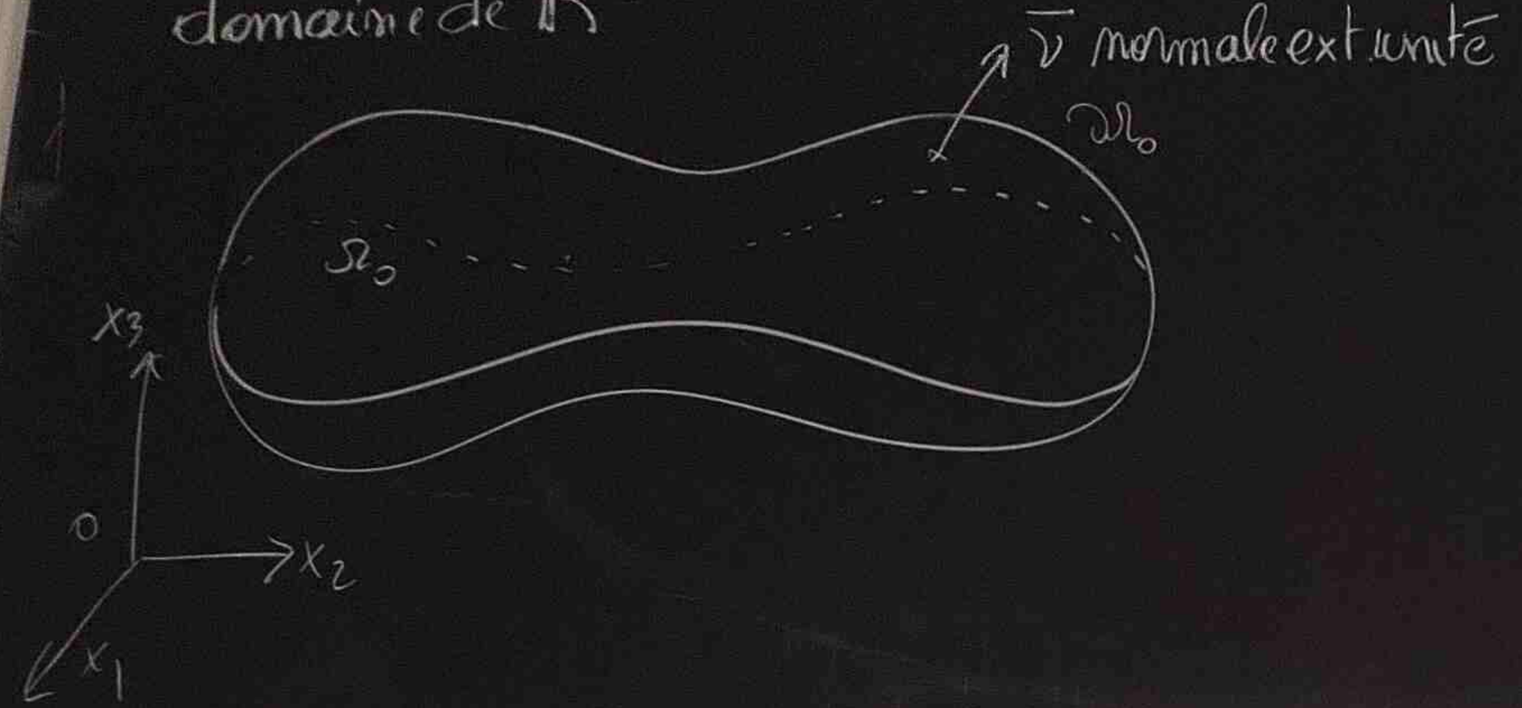
$\nabla u = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

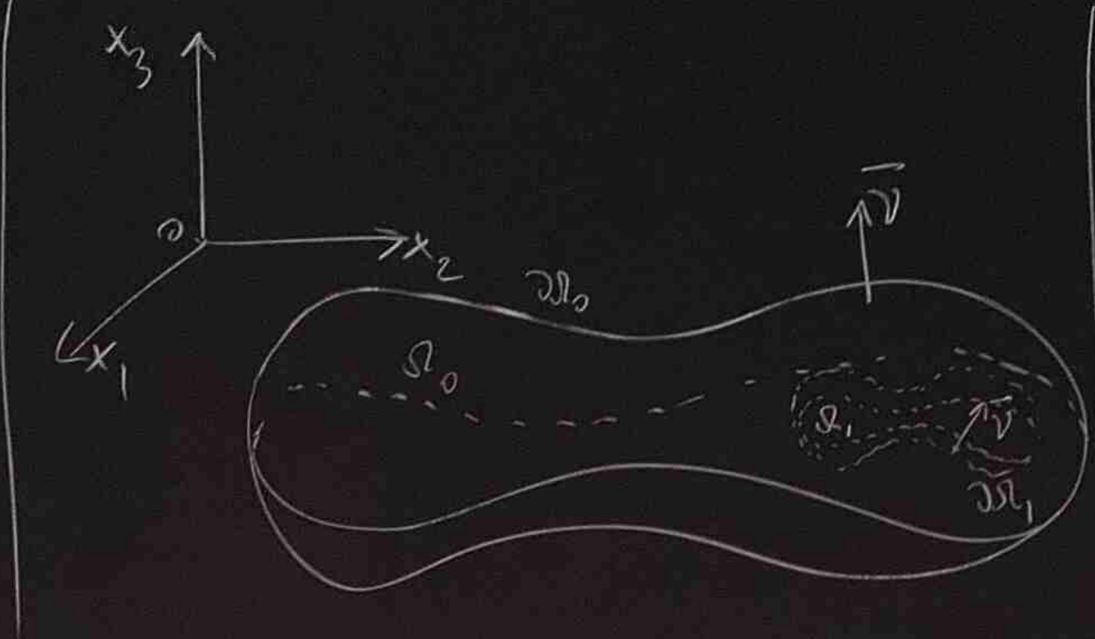
$|\det \nabla u(r, \theta, \varphi)| = r^2 \sin\varphi$

$$\iiint_\Omega dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \; r^2 \sin\varphi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

domaine de $\mathbb{R}^3$





Déf 6.1 livre: On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier, s'il existe des ouverts bornés $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ tels que

- $\Omega = \Omega_0 \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \dots \bar{\Omega}_m)$
- $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_0 \quad j = 1, \dots, m$
- $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset \quad i, j = 1, \dots, m \quad i \neq j$
- $\partial\Omega_j$ sont des surfaces régulières par morceaux telles que $\partial\partial\Omega_j = \emptyset$ (surfaces fermées) $j = 0, 1, \dots, m$
- $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_m$ et il existe un champ de normales extérieures continues par morceaux

Lemme: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine régulier $f: \Omega \to \mathbb{R}$ C^1, on a

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 x_2 x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_i \, ds \quad i = 1, 2, 3$$

Corollaire (Thm 6.2 livre)

Thm de la divergence

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine régulier $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1, on a

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds \left(= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{ds} \right)$$

Dem du corollaire à partir du lemme:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

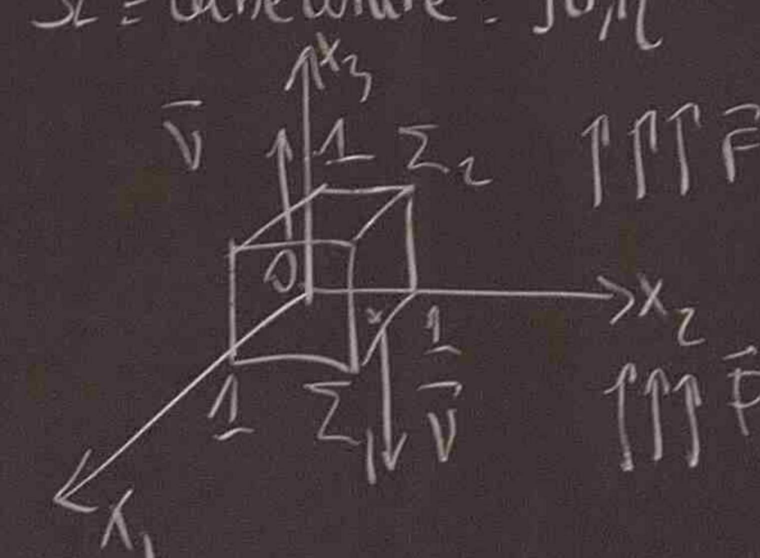
$$\overset{\text{lemme}}{=} \iint_{\partial\Omega} \left(F_1 \nu_1 + F_2 \nu_2 + F_3 \nu_3 \right) ds$$

$$= \iint_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{\nu})\, ds$$

Ex sans calculs:

$\vec{F}(x_1 x_2 x_3) = (0, 0, 1)$

$\Omega = \text{cube unité} =]0,1[^3$



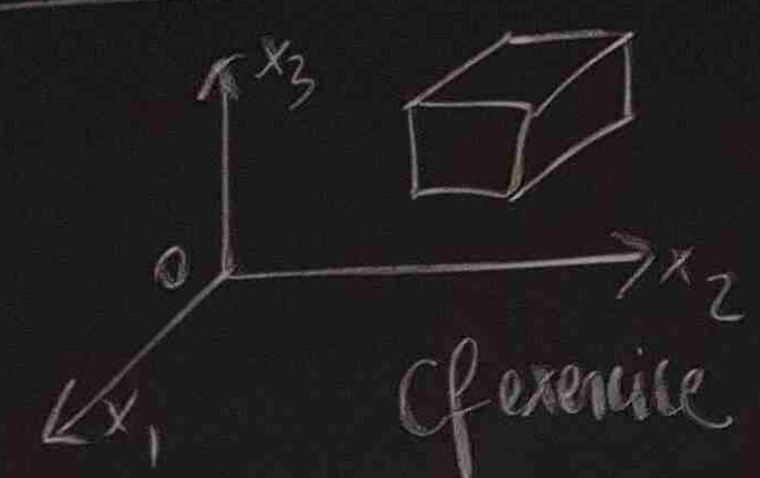
$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \qquad \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0$

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds = \iint_{\partial\Omega} \nu_3\, ds$$

$$= \iint_{\Sigma_1} \nu_3\, ds + \iint_{\Sigma_2} \nu_3\, ds = -1 + 1 = 0$$

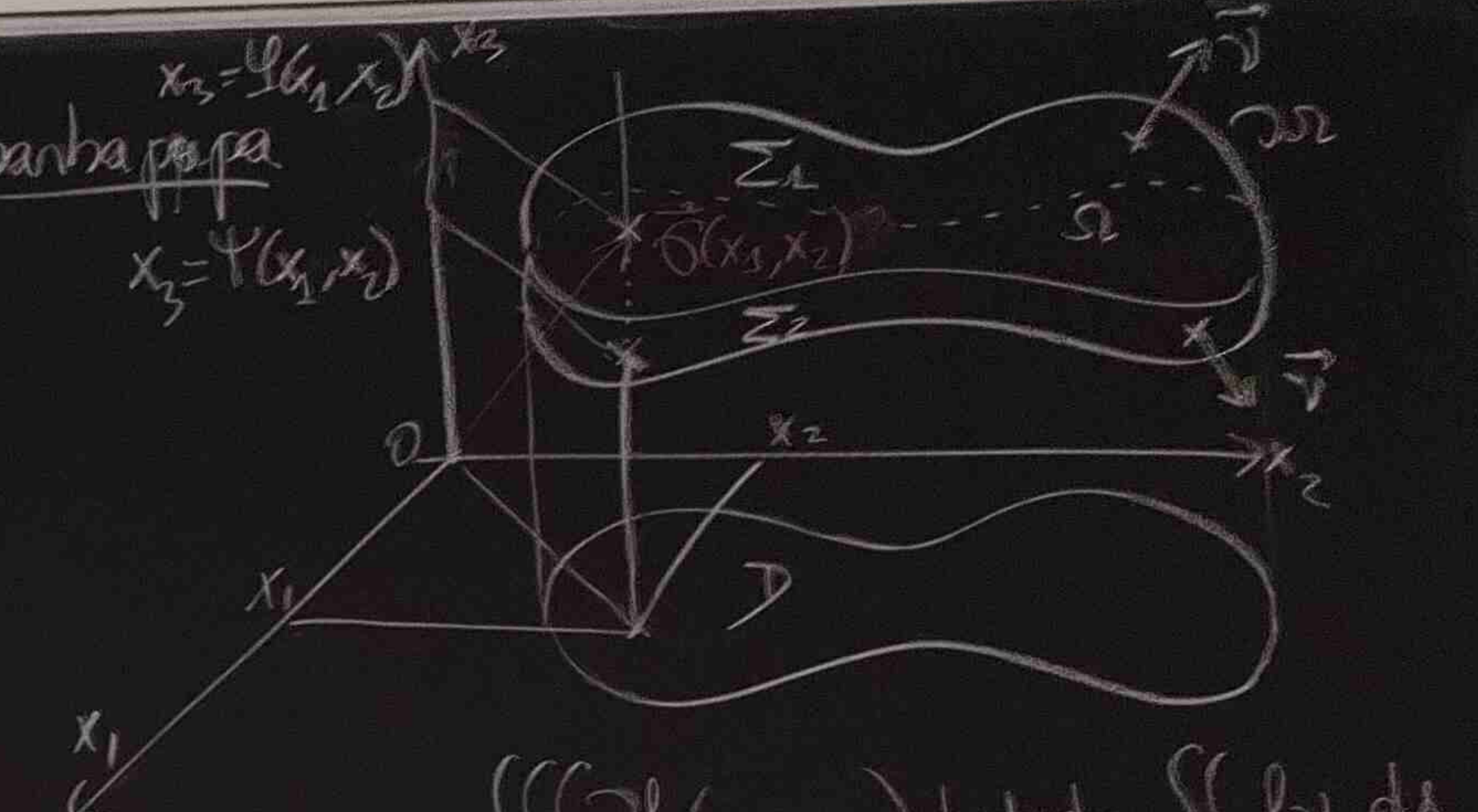
Dem lemme : cas particuliers

Ω parallélépipède rectangle



Cf exercice

Ω barbapapa



On va montrer que $\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f\nu_3\,ds$

En effet $\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_D dx_1dx_2 \int_{\psi(x_1,x_2)}^{\varphi(x_1,x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3$

$$= \iint_D dx_1dx_2 \left(f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) - f(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) \right)$$

D'autre part $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

paramétrisation de Σ_1 :

$\vec\sigma(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \varphi(x_1,x_2)) \quad (x_1,x_2)\in D$

$$\frac{\partial\vec\sigma}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial\vec\sigma}{\partial x_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, 1\right)$$

normale vers le haut

OK

$$\vec\nu(x_1,x_2) = \frac{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}}$$

$$\iint_{\Sigma_1} f\nu_3\,ds = \iint_D dx_1dx_2$$

$$= \iint_D dx_1dx_2 \; f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}$$

$$= \iint_D f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\,dx_1dx_2$$

param de Σ_2 : $\vec{\sigma}(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \psi(x_1,x_2))$

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial x_2} = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, 1\right)$$

normale vers le haut ! on veut $\nu_3 < 0$ il faudrait permuter l'ordre des paramètres, ou alors changer le signe de l'intégrale

$\iint_{\Sigma_2} f\nu_3 \, ds$ à la fin du calcul.

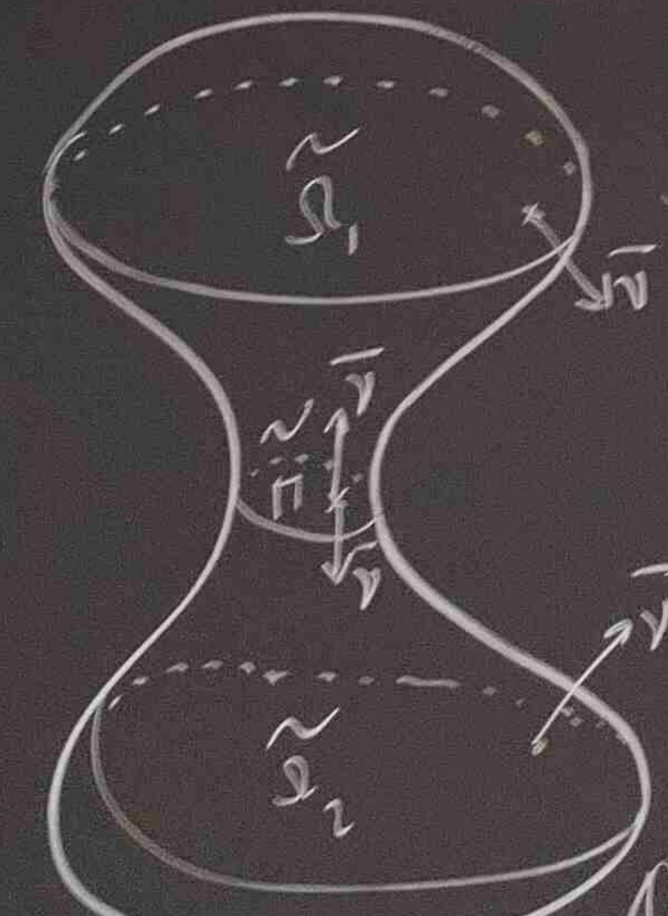
On trouve $\iint_{\Sigma_2} f\nu_3 \, ds =$

$$= -\iint_D f(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\,dx_1\,dx_2$$

Conclusion : on a bien

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f\nu_3\,ds = \iint_D f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\,dx_1\,dx_2 - \iint_D f(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\,dx_1\,dx_2$$

Que se passe-t-il avec d'autres Ω ?



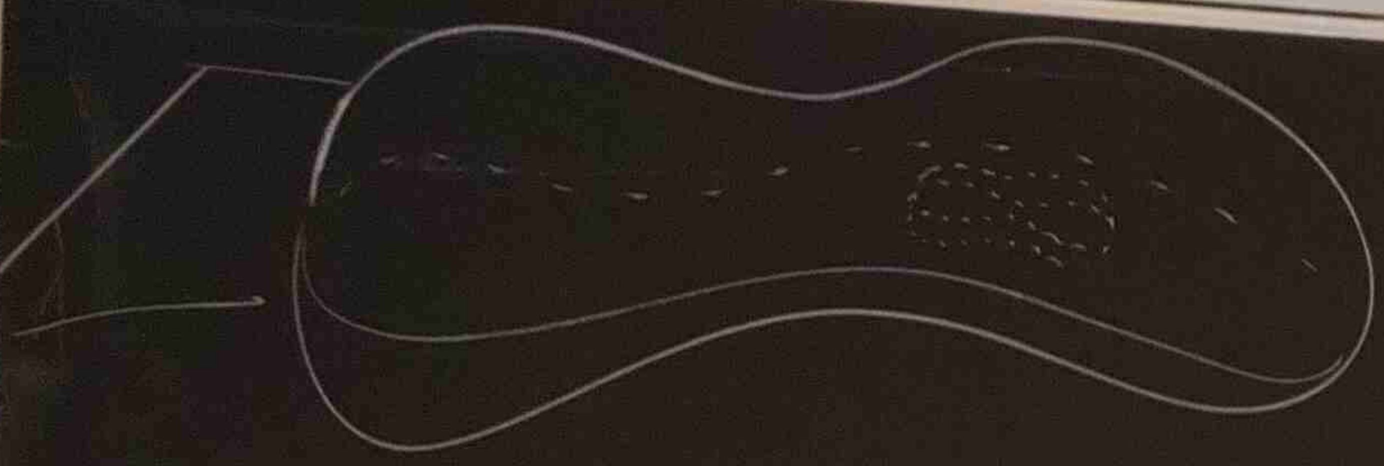
$\Omega = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$

$$\iiint_{\tilde{\Omega}_1} \frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iint_{\partial\tilde{\Omega}_1} f\nu_3\,ds$$

$$\iiint_{\tilde{\Omega}_2} \text{———} = \iint_{\partial\tilde{\Omega}_2} f\nu_3\,ds$$

on somme (les intégrales sur $\tilde{\Gamma}$ s'annullent)

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f\nu_3\,ds$$



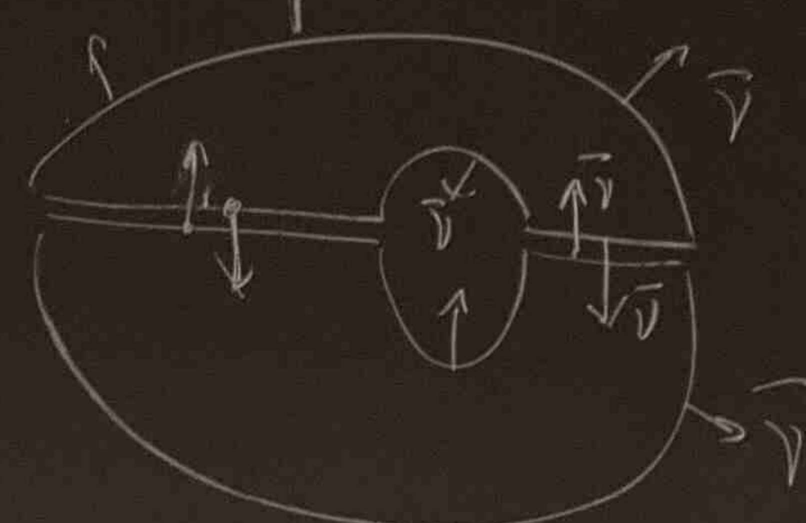
on coupe par un plan horizontal

on obtient 2 volume sans trous

on somme sur les 2 volumes

certaines intégrales de surface s'annulent et on obtient le résultat

Coupe



Application équation de la chaleur

$k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $k(\vec{x})>0$ coeff de diffusion $\mathcal{C}^1$

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ température $\mathcal{C}^2$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ source ou puit de chaleur

Conservation énergie (thermique)

$$\iint_{\partial\Omega} -\underbrace{k\,\vec{grad}\,T\cdot\vec{\nu}}_{\text{flux chaleur}}\,ds = \iiint_{\Omega} f\,dx_1dx_2dx_3$$

Thm divergence $$\iiint_{\Omega} div(-k\,\vec{grad}\,T)\,dx_1dx_2dx_3 = \iiint_{\Omega} f\,dx_1dx_2dx_3$$

Puisque Ω est arbitraire (quelconque) on en déduit

$$-div(k\,\vec{grad}\,T) = f \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) = f$$

Problème mathématique:

Étant donné le domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^3$

$k(\vec{x})$

$f(\vec{x})$

Étant donné T sur $\partial\Omega$,

on cherche $T:\Omega\to\mathbb{R}$

tel que

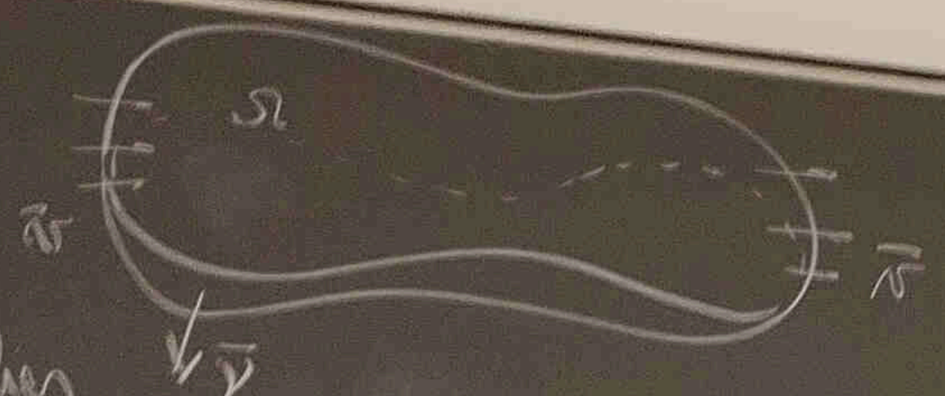
$$-div(k\,\vec{grad}\,T) = f \text{ dans } \Omega$$

Soit $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\vec{g} \in \mathbb{R}^3$ $\rho > 0$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine régulier quelconque, on a le principe suivant



$$\iint_{\partial\Omega} \left(\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nu}) + p\vec{\nu}\right)ds = \iiint_{\Omega} \rho\vec{g}\,dx_1dx_2dx_3$$

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\vec{\nu}\,ds = 0$$

On veut montrer (grâce au thm divergence) que

$$\begin{cases} \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}p = \rho\vec{g} & (1) \\ \operatorname{div}\vec{v} = 0 & (2) \end{cases}$$

Euler 1753

(1) s'écrit $\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i$ $i = 1,2,3$

i.e. $\rho\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}v_i + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}v_i + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}v_i\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i$ $i = 1,2,3$

4 eq (1) et (2) scalaires

4 inconnues v_1 v_2 v_3 p

En effet, appliquons le thm de la divergence à $\iint_{\partial\Omega} \rho v_i(\vec{v}\cdot\vec{\nu})ds$

$$\iint_{\partial\Omega} \rho v_i(\vec{v}\cdot\vec{\nu})ds = \iint_{\partial\Omega} (\underbrace{\rho v_i\vec{v}}_{\vec{F}}\cdot\vec{\nu})ds$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\underbrace{\rho v_i}_{f}\,\underbrace{\vec{v}}_{\vec{F}})dx_1dx_2dx_3$$

$$= \iiint_{\Omega} \Big(\rho v_i \underbrace{\operatorname{div}\vec{v}}_{0} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\rho v_i)}_{\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_i}\Big)dx_1dx_2dx_3$$

$$= \iiint_{\Omega} \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_i\,dx_1dx_2dx_3$$

D'autre part

$$\iint_{\partial\Omega} p\nu_i\,ds = \iiint_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3$$

Donc $\iiint_{\Omega} \left(\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}\right)dx_1dx_2dx_3 = \iiint_{\Omega} \rho g_i\,dx_1dx_2dx_3$ $i = 1,2,3$

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\vec{\nu}\,ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{v}\,dx_1dx_2dx_3$$

mais $\forall\,\Omega$, $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f\nu_i\,ds \quad i = 1,2,3$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,ds$$

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}f$$

Puisque Ω est quelconque

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \quad i = 1,2,3$$

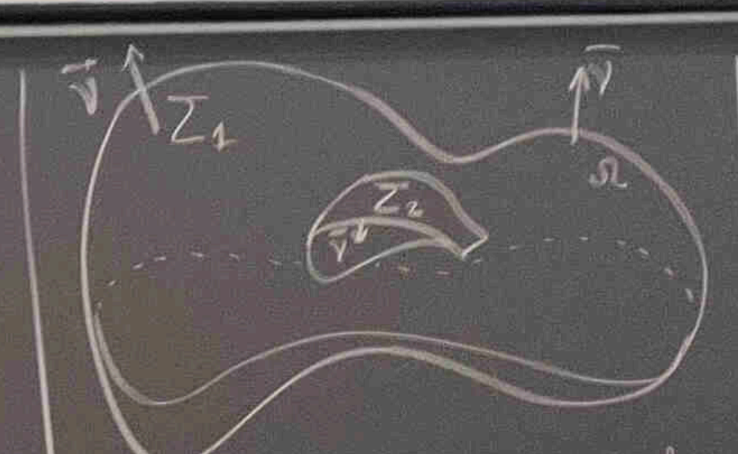
i.e. $\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$ eq cons. qté mvt

$\operatorname{div}\vec{v} = 0$ eq cons. masse

Conséquence : paradoxe de D'Alembert ~ 1750

"Une aile d'avion ne porte pas" (si le champ de vitesse satisfait les eq. d'Euler)

Donc le modèle est incomplet, il manque la viscosité : $\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}p = \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$ (Navier Stokes 1850)



aile d'avion dans un grand volume de $\mathbb{R}^3$, Ω : air autour de l'aile

$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

On sait

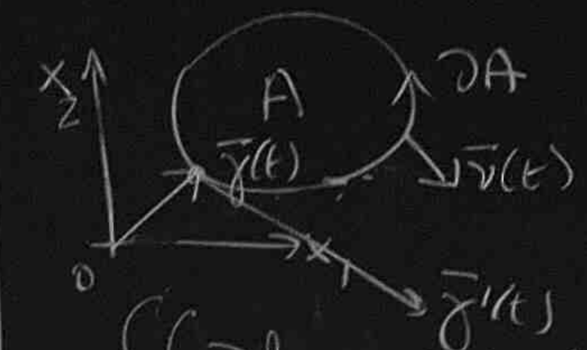
$$\iint_{\partial\Omega} \left(\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nu}) + p\vec{\nu}\right)ds = 0 \text{ (pas de gravité)}$$

Donc $\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} \left(\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nu}) + p\vec{\nu}\right)ds = 0$


$\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$ eq cons. qté mvt
$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ eq cons. masse
champ de vitesse satisfait les eq. d'Euler)
Donc le modèle est incomplet, il manque
la viscosité : $\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}p = \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$ (Navier Stokes 1850)
aile d'avion dans un grand volume de $\mathbb{R}^3$, Ω : air autour de l'aile
Σ_2
Ω
On sait
$\iint_{\partial\Omega} (\rho(\vec{v}.\vec{\nu})\vec{v} + p\vec{\nu})ds = 0$ (pas de gravité)
Donc $\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} (\rho(\vec{v}.\vec{\nu})\vec{v} + p\vec{\nu})ds = 0$
Si on peut montrer que $\iint_{\Sigma_1} (\rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{\nu}) + p\vec{\nu})ds = \vec{0}$
alors $\iint_{\Sigma_2} (\rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{\nu}) + p\vec{\nu})ds = 0$
Si de plus $\vec{v}.\vec{\nu} = 0$ sur Σ_2 (les particules d'air glissent sur l'aile) alors $\iint_{\Sigma_2} p\vec{\nu}\,ds = \vec{0}$ = force
Montrons $\iint_{\Sigma_1} (\rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{\nu}) + p\vec{\nu})ds = \vec{0}$
Supposons $\vec{v} = \vec{V}$, $p = P$
$\vec{v} = \vec{V}$ constante ($\vec{V} \in \mathbb{R}^3$)
$p = P$ constante ($P \in \mathbb{R}$)
On a : $\iint_{\Sigma_1} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{\nu})ds = \iint_{\Sigma_1} \rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{\nu})ds$
$= \rho\vec{V} \iint_{\Sigma_1} \vec{V}.\vec{\nu}\,ds = \rho\vec{V} \iiint \underbrace{\mathrm{div}\vec{V}}_{0} dx_1 dx_2 dx_3$
$= \vec{0}$
De même $\iint_{\Sigma_1} p\vec{\nu}\,ds = P \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{\nu}\,ds}_{0} = \vec{0}$
B
C
6

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A)$$



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ $\mathcal{C}^1$

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} f \nu_i\, dl \qquad i = 1, 2$$

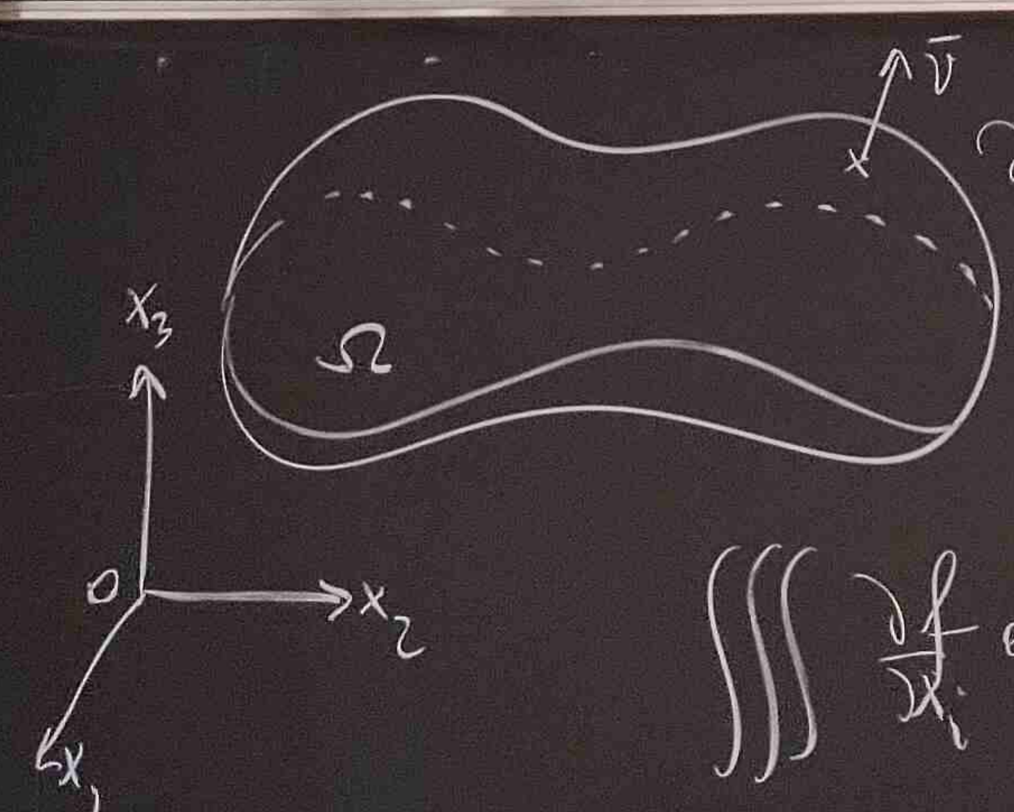
$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \to \left(F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)\right)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\iint_A \text{div}\, \vec{F}\, dx_1 dx_2 = \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, dl$$

$$\iint_A \text{rot}\, \vec{F}\, dx_1 dx_2 = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$



$\partial\Omega$ surface fermée

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x_1 x_2 x_3) \to f(x_1, x_2 x_3)$

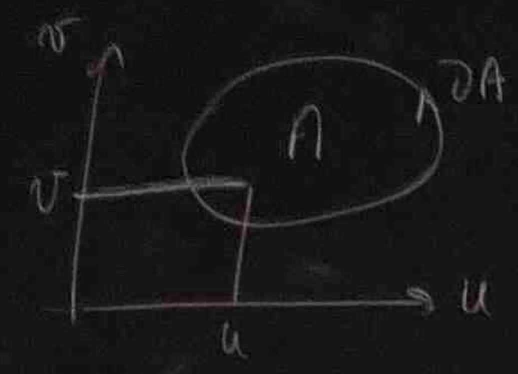
$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_i\, ds \qquad i = 1, 2, 3$$

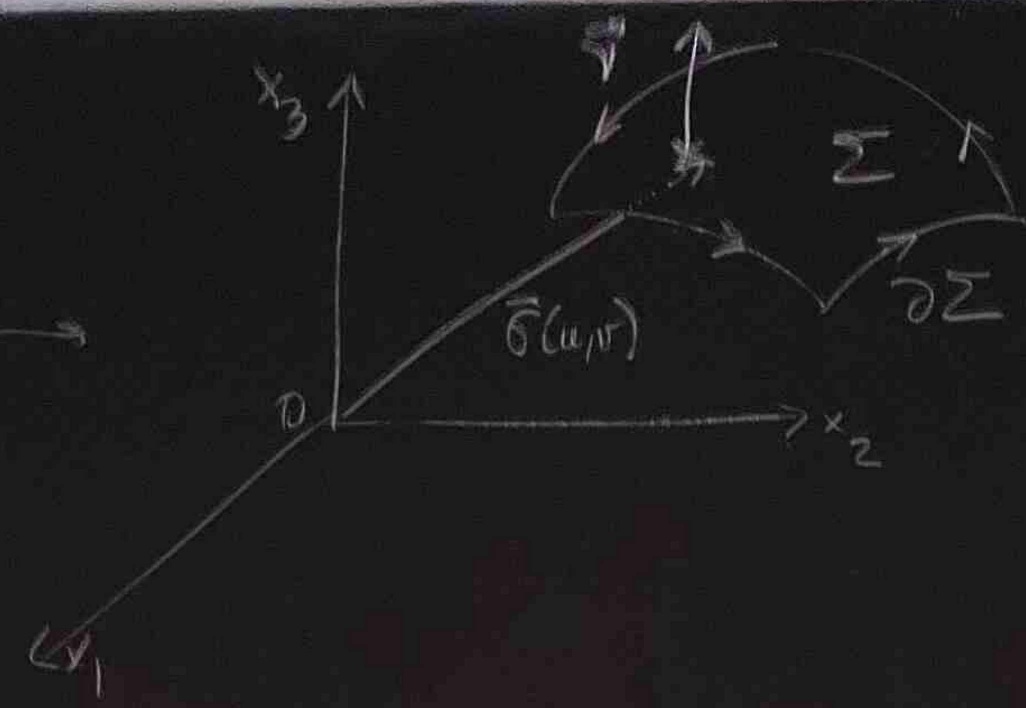
$$\iiint_\Omega \text{div}\, \vec{F}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, ds$$

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

il manque le thm de Stokes

Chap 7 suite : Thm de Stokes





Thm 7.1 suite (Stokes)

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière par morceaux orientable de bord $\partial\Sigma$ orienté en parcourant ∂A positivement. Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1, on a

$$\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}\,\vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

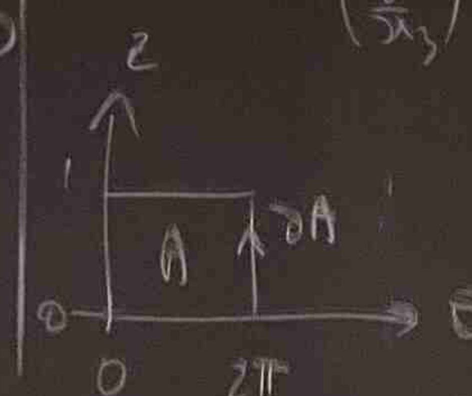
Corollaire : si Σ est une surface fermée $\partial\Sigma = \emptyset$ alors on a $\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}\,\vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$

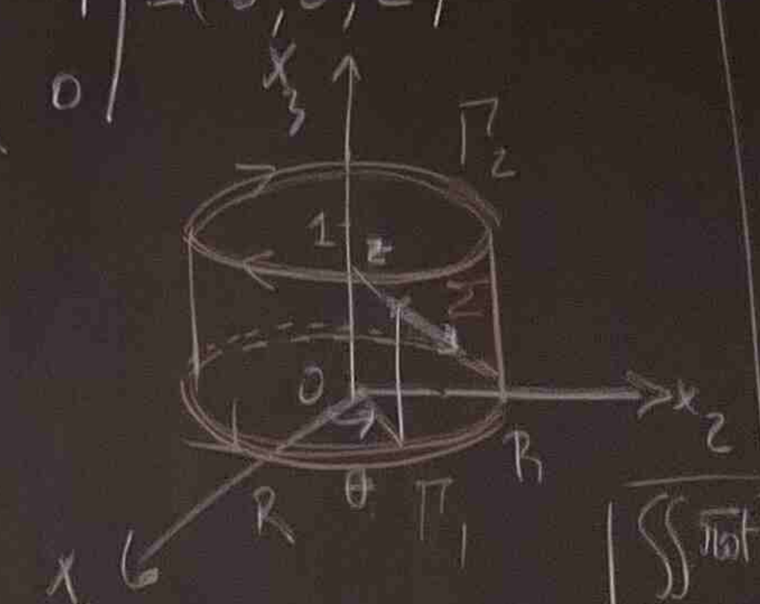
Ex. de calcul :

$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$

$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 2)$$





$\vec{\sigma}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$

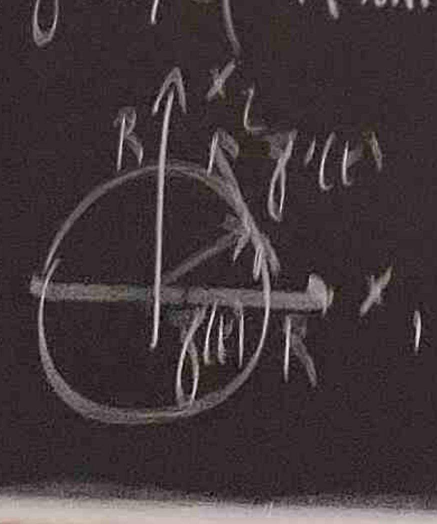
$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}\,\vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \underbrace{(0, 0, 2) \cdot (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)}_{0} = 0$$

$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

param Γ_1 : $\vec{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\vec{\gamma}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$ c'est la bonne orientation



$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} dt\, (-R\sin t, R\cos t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} dt\ R^2 = 2\pi R^2$$

param Γ_2 : si on prend $\vec{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$ on a la mauvaise orientation.

On garde cette param et on change le signe de l'intégrale à la fin du calcul

Ou alors on intègre $\int_{2\pi}^{0} dt$

param de Γ_2 (Γ_2 dans le mauvais sens)

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, 1)$$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$$

$$\int_0^{2\pi} dt\, (-R\sin t, R\cos t, 0)\cdot(-R\sin t, R\cos t, 0) = 2\pi R^2 \quad \text{donc} \quad \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot\vec{dl} = -2\pi R^2$$

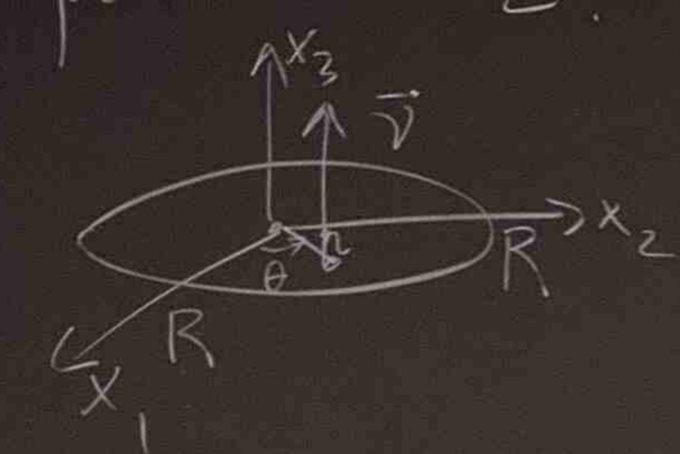
Finalement on a bien $\int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{dl} = 0 = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}\vec{F}\cdot\vec{ds}$

On ajoute le fond du cylindre à Σ

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \underbrace{\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2 \leq R^2, x_3 = 0\}}_{\hat{\Sigma}}$$

Appliquons le thm de Stokes

param de $\hat{\Sigma}$: $\vec{\sigma}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ $\quad 0\leq r\leq R \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$

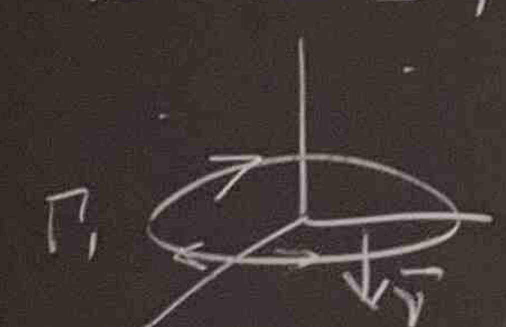


$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial r}\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} = (0,0,r) \quad \text{mauvaise direction!}$$

On change le signe de $\iint_{\hat{\Sigma}}$ à la fin du calcul

$$\iint_{\hat{\Sigma}} \vec{\text{rot}}\vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta\ 2r = 2\pi R^2 \quad \text{change le signe} \quad \iint_{\hat{\Sigma}} \vec{\text{rot}}\vec{F}\cdot\vec{ds} = -2\pi R^2$$

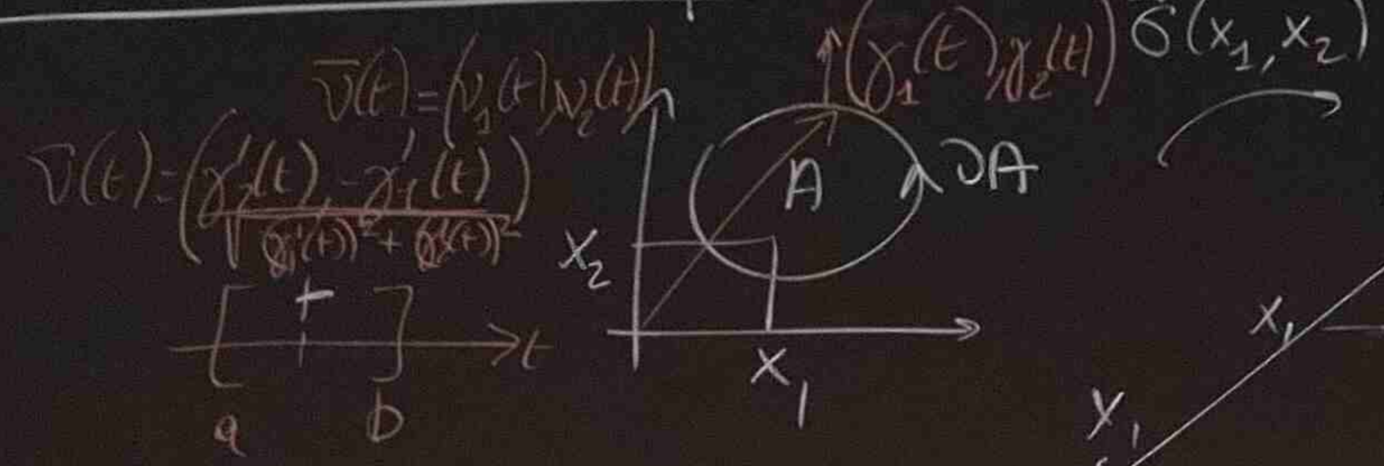
bord de $\tilde{\Sigma}$? Γ_2 (Γ_1 ne fait pas partie du bord de $\tilde{\Sigma}$ car il est parcouru 2x en sens inverse)

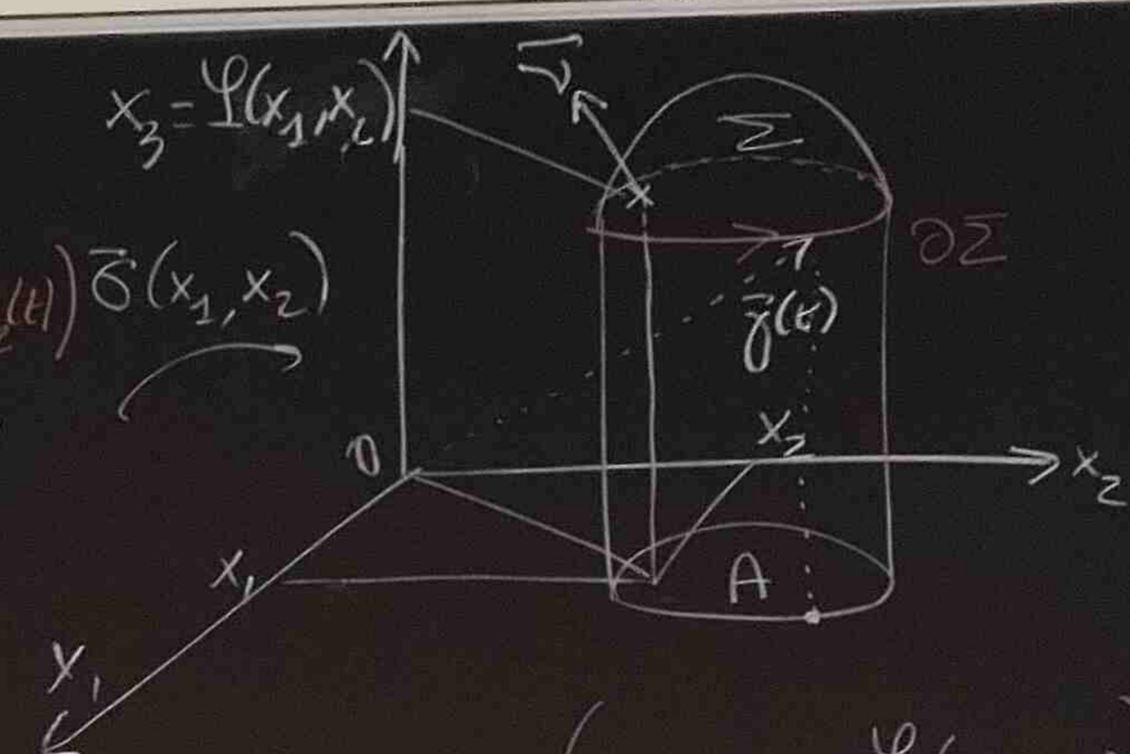


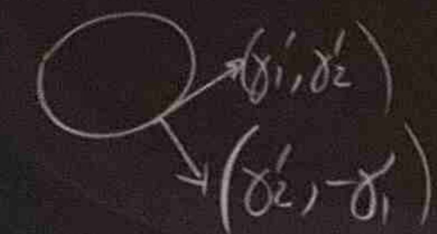
$$\int_{\partial\tilde{\Sigma}} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{dl} = -2\pi R^2$$

On a bien $\iint_{\tilde{\Sigma}} \vec{\text{rot}}\vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{\partial\tilde{\Sigma}}\vec{F}\cdot\vec{dl}$

Dem thm Stokes cas part







$$\vec\sigma(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \varphi(x_1,x_2))$$

Cas où $\vec F(x_1,x_2,x_3) = (F_1(x_1,x_2), F_2(x_1,x_2), 0)$

$$\frac{\partial\vec\sigma}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial\vec\sigma}{\partial x_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, 1\right)$$

$$\vec{rot}\,\vec F = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}\\\frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\0\end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

normale vers le haut → orientation de ∂Σ

$$\iint_\Sigma \vec{rot}\,\vec F \cdot \vec{ds} = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_{\partial A} (F_2\nu_1 - F_1\nu_2)\, dl$$

Thm Green Chap 4

param de ∂Σ : $\vec\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\big)$

$$\vec\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\right)$$

$$\int_{\partial\Sigma} \vec F \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec F(\vec\gamma(t))\cdot\vec\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \Big(F_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\Big)dt$$

or $\int_{\partial A} (F_2\nu_1 - F_1\nu_2)\, dl =$

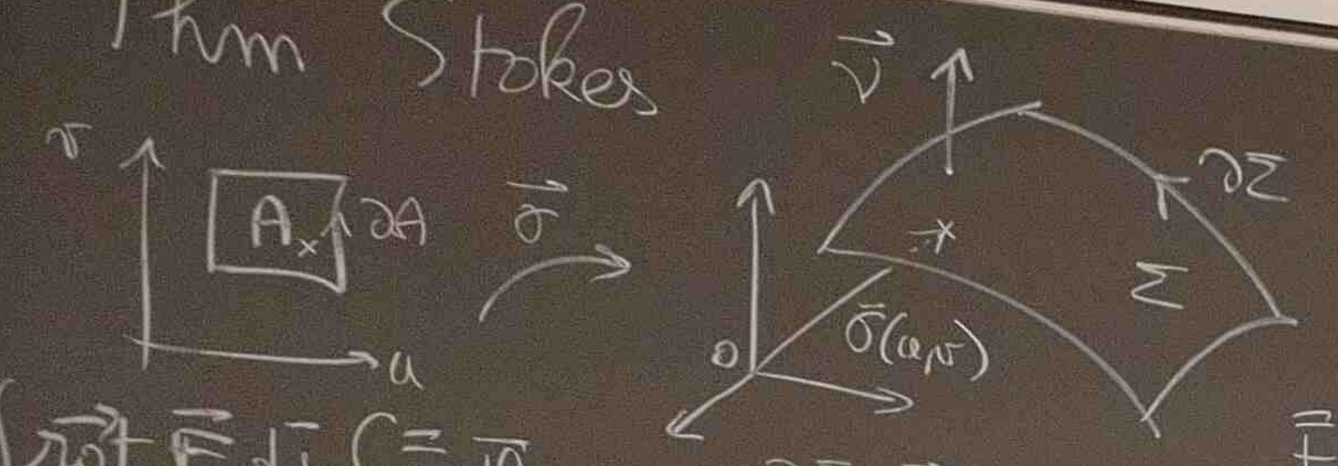
$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)$$

$$\int_{\partial A} (F_2 \nu_1 - F_1 \nu_2)\, d\ell = \int_a^b \left(F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}} - F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \frac{(-\gamma_1'(t))}{\sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}} \right) \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}\, dt$$

$$= \int_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$$

On a bien $\iint_{\Sigma} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$

Thm Stokes



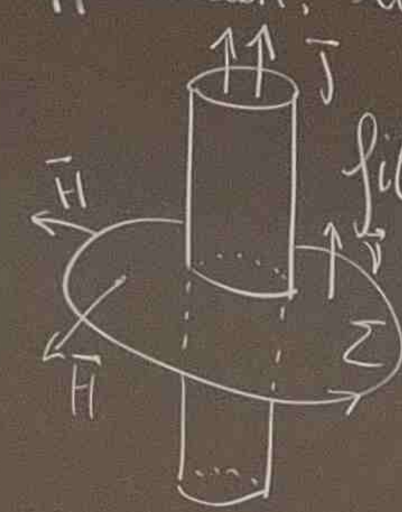
$$\iint_{\Sigma} \vec{rot}\, \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$\partial\Sigma = \vec{\sigma}(\partial A)$

orienté lorsque ∂A est parcouru dans le sens positif

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

Application : loi d'Ampère



fil, densité de courant $\vec{j}$ (A/m^2)

Σ surface imaginaire quelconque

$\partial\Sigma$

Ce fil crée un champ magnétique $\vec{H}$ (A/m)

et on a la loi d'Ampère

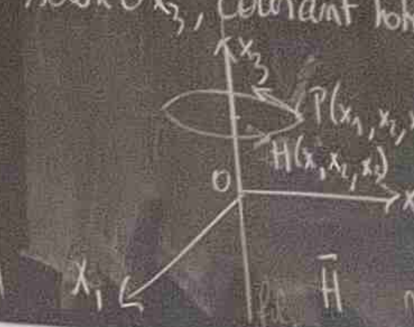
$$\int_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (A)$$

Thm Stokes

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot}\, \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$ puisque Σ est quelconque

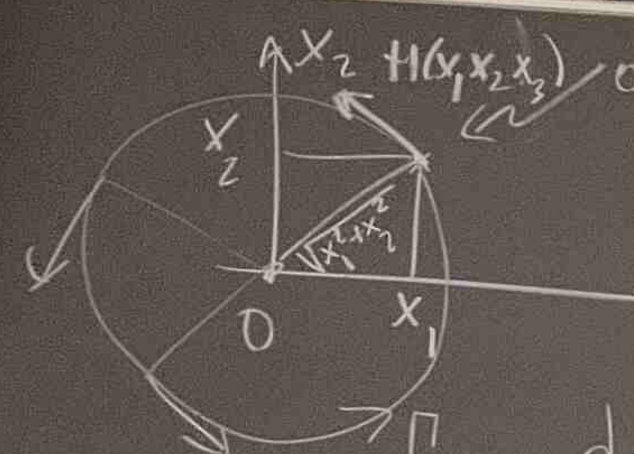
$\vec{rot}\, \vec{H} = \vec{j}$

Cas particulier : fil infiniment long selon Ox_3, courant total J (A)



$P(x_1, x_2, x_3)$ $\vec{H}(x_1, x_2, x_3)$?

invariance selon x_3 : $\vec{H}$ ne dépend pas de x_3



on veut calculer $\vec{H}$ en ce point

Γ : cercle centre O rayon $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\vec{H}(x_1, x_2)$ tangent à Γ

donc $\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \alpha\,(-x_2, x_1, 0)$

On détermine α avec la loi d'Ampère :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = J \text{ courant total}$$

param de Γ : $\vec{\gamma}(t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,(\cos t, \sin t, 0)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\gamma}\,'(t) = \sqrt{}\,(-\sin t, \cos t, 0)$

$\vec{H}(\gamma(t)) = \alpha\,(-\sin t, \cos t, 0)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

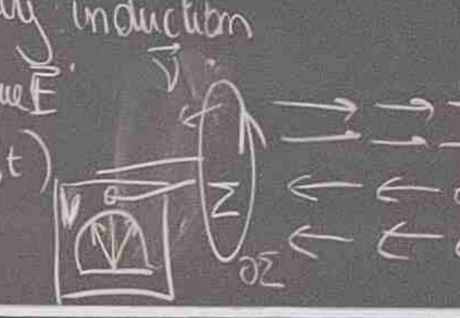
donc $\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = (x_1^2 + x_2^2)\,\alpha\, 2\pi = J \to \alpha$

Finalement $\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{J}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}\,(-x_2, x_1, 0)$

loi de Faraday induction

Champ électrique $\vec{E}$

$\vec{E}(x_1, x_2, x_3, t)$



$\vec{B}(x_1, x_2, x_3, t)$

$B(x_1, x_2, x_3, s)$

Pour toute boucle $(\partial\Sigma)$ — surface Σ on a

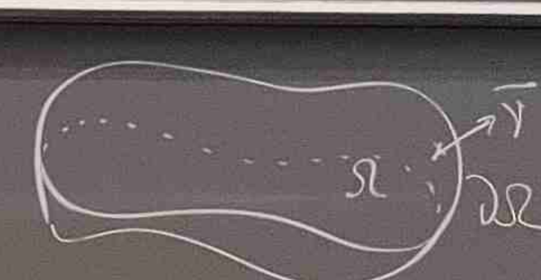
$$\int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot}\, \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Puisque Σ est quelconque :

$$\vec{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Remarques sur le thm div et Stokes :

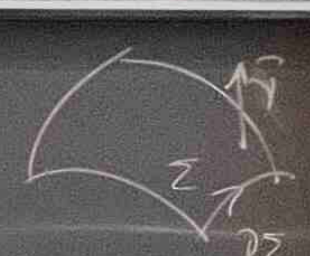


Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^2$, on sait que $\text{div}\, \vec{rot}\, \vec{F} = 0$

d'autre part on a, pour tout domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\iiint_{\Omega} \text{div}\, \vec{rot}\, \vec{F}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \underset{\text{thm div}}{=} \iint_{\partial\Omega} \vec{rot}\, \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{\nu}\, ds}_{d\vec{s}} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\partial\Omega = \emptyset} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, on sait que $\vec{rot}\, \vec{grad}\, f = 0$



d'autre on a, pour toute surface Σ de $\mathbb{R}^3$:

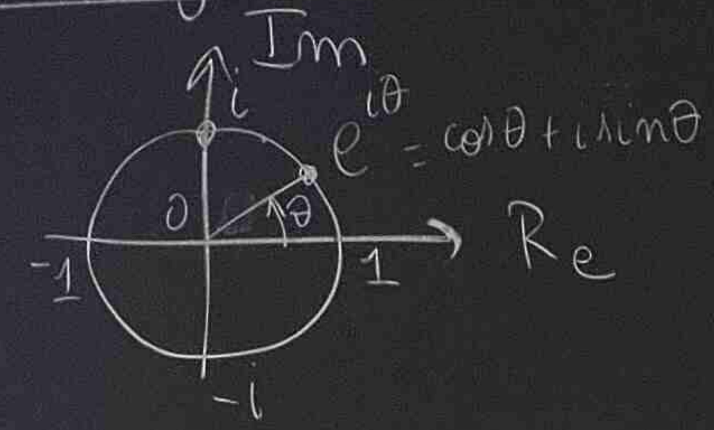
$$\iint_{\Sigma} \vec{rot}\, \vec{grad}\, f \cdot d\vec{s} \underset{\text{thm Stokes}}{=} \int_{\partial\Sigma} \vec{grad}\, f \cdot d\vec{l} \underset{\text{thm gradient}}{=} f(B) - f(A) = 0$$ car $A = B$, $\partial\Sigma$ est une courbe fermée

2e partie - Analyse complexe

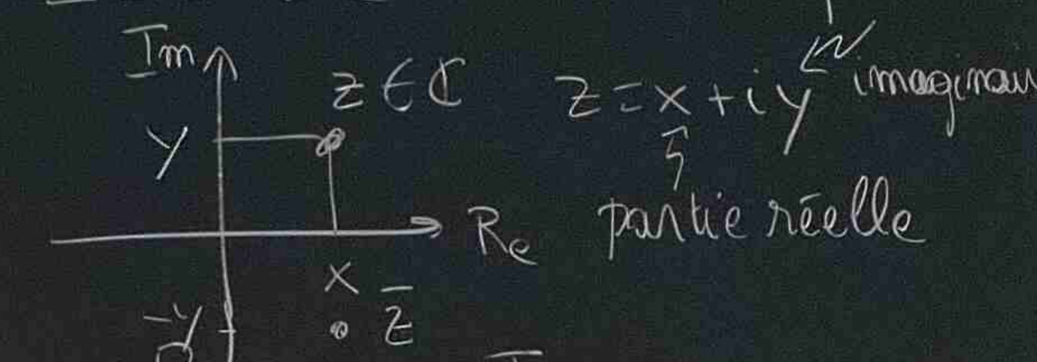
Chap 9 : fonctions holomorphe
cond. Cauchy-Riemann

Rappels dans $\mathbb{C}$

i tel que $i^2 = -1$

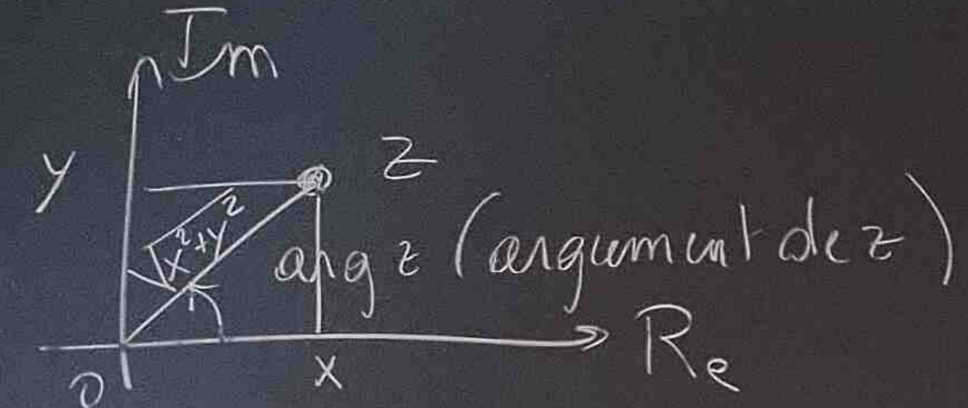


$1 = e^{i0} = e^{i2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$



$\mathrm{Re}\, z = x$ $\quad \mathrm{Im}\, z = y$

Conjugué complexe $\bar{z} = x - iy$



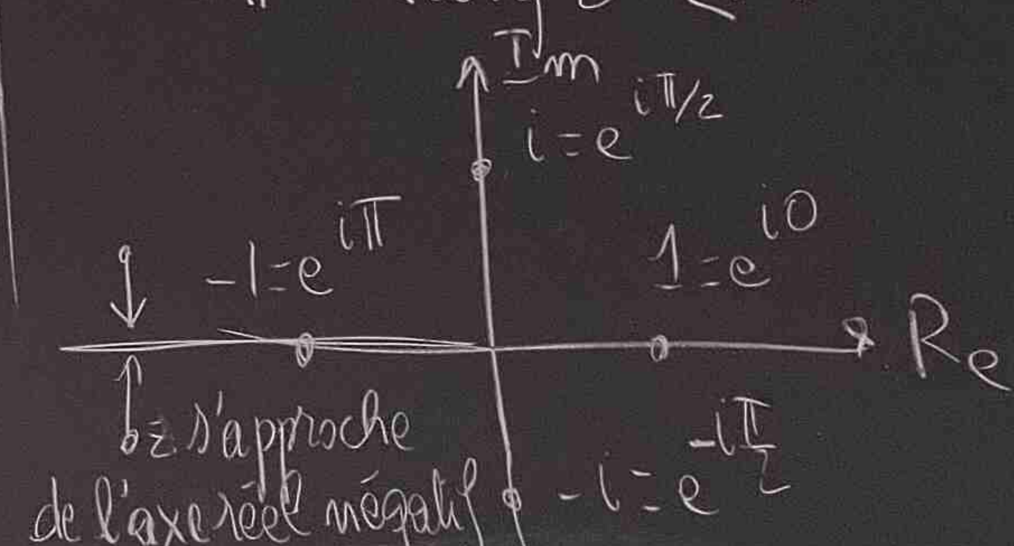
$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ module de z

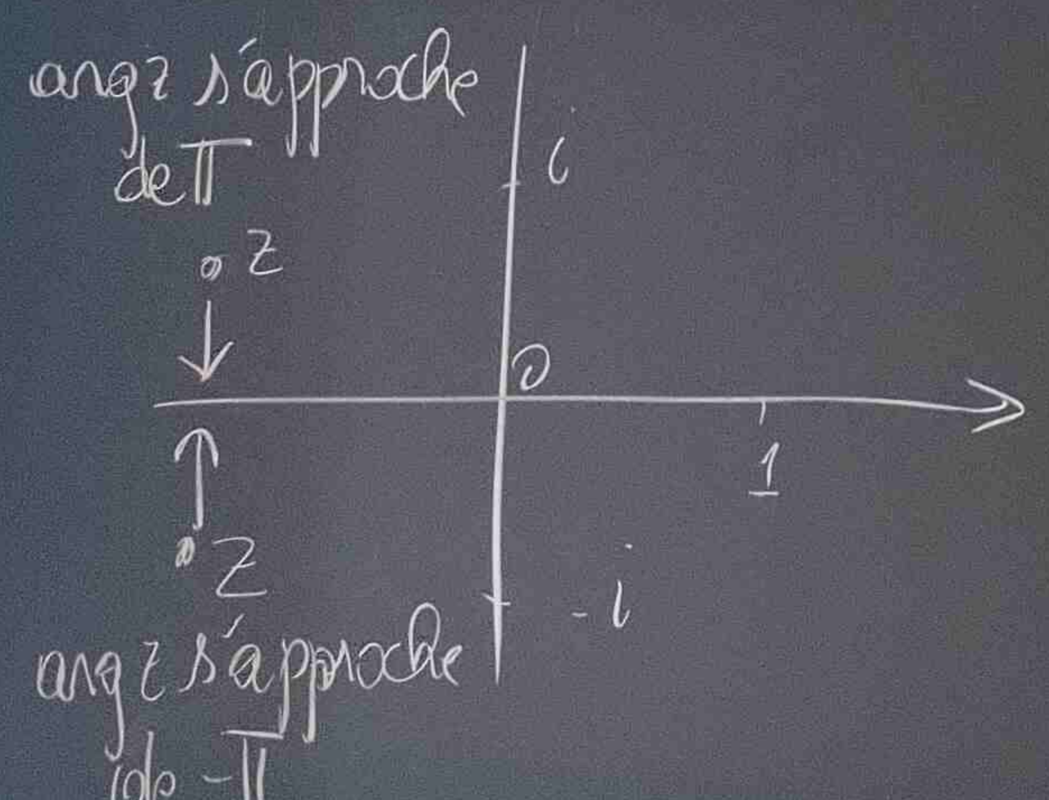
$z = x + iy = |z|\, e^{i \arg z} = |z|\, e^{i(\arg z + 2k\pi)}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

l'argument de z est défini à $2k\pi$ près

La valeur principale de l'argument de z est l'unique valeur telle que

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$





On "voit" que arg z est discontinu à travers l'axe réel négatif

Exemples de calculs

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad z_1 = x_1 + iy_1$ $\quad z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + y_2x_1)$$

$z\in\mathbb{C}$ $z=x+iy$ $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)$

$= x^2+y^2 = |z|^2$

Si $z=|z|e^{i\theta}$ avec $\theta=\arg z$

$z_1, z_2\in\mathbb{C}$ $z_1=|z_1|e^{i\theta_1}$ $z_2=|z_2|e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2}$

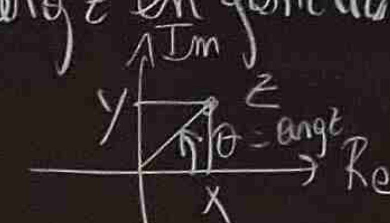
$= |z_1||z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

et donc $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

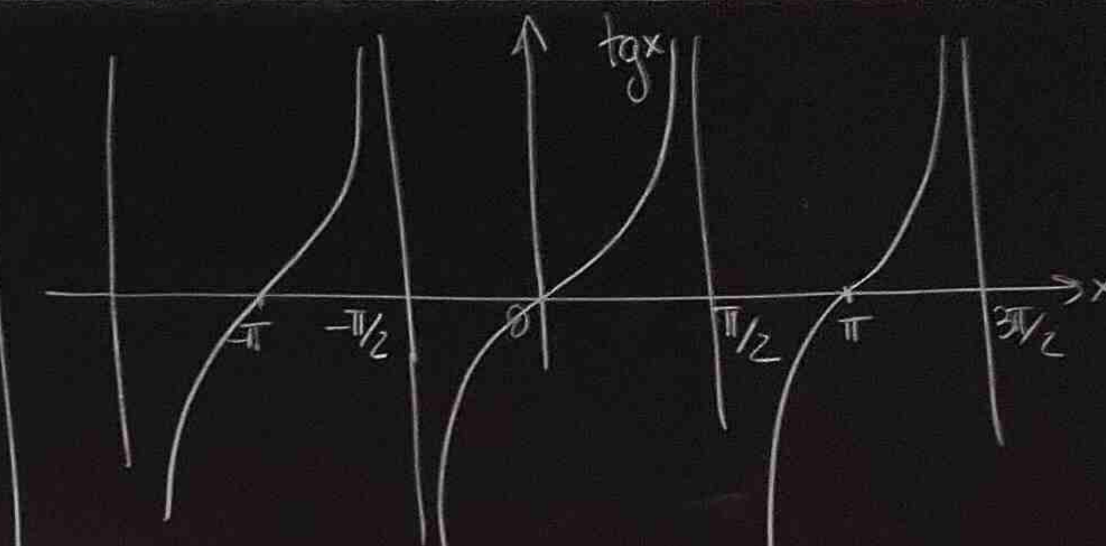
$\arg(z_1 z_2) = \theta_1+\theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

$z=x+iy=|z|e^{i\arg z}$

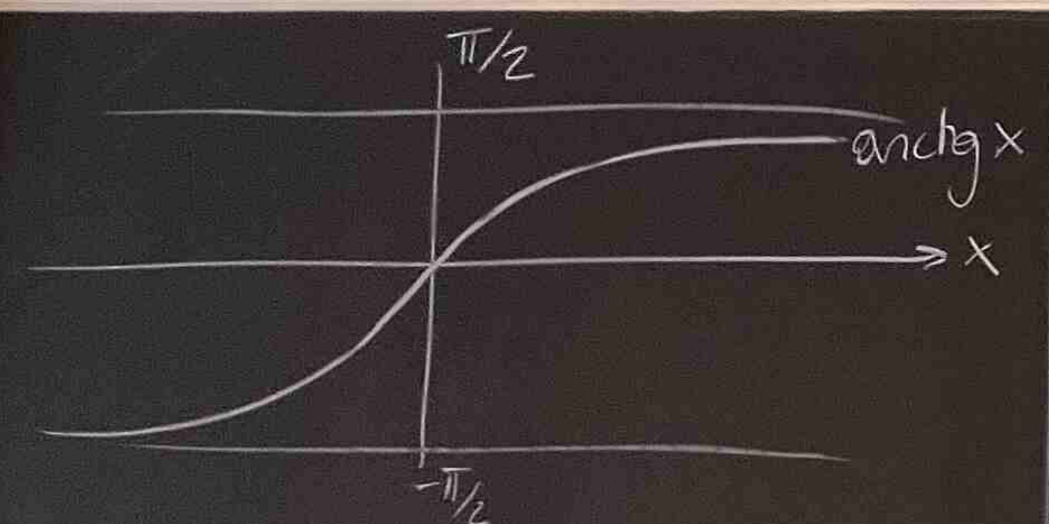
exprimer $\arg z$ en fonction de x et y



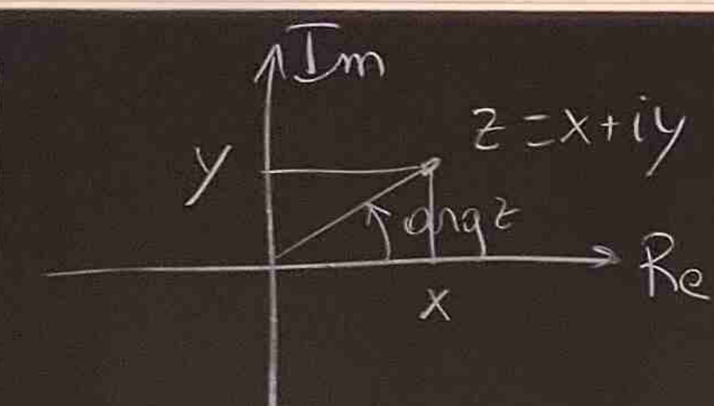
$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$



$\operatorname{tg} : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ bijective, on peut définir la réciproque $\operatorname{arctg} x$

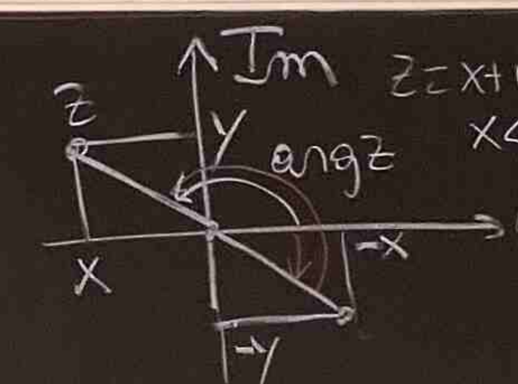


Retour à $\arg z$ en fct de x et y :



$z=x+iy$ $x>0$ $y\in\mathbb{R}$

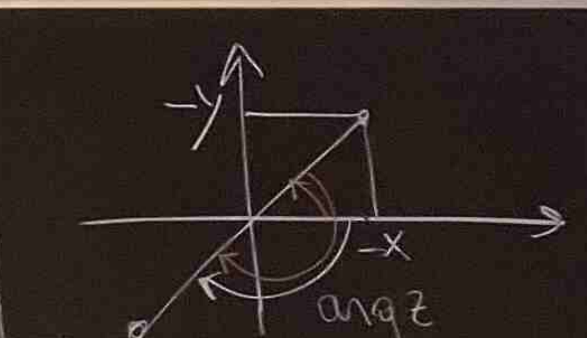
$-\frac{\pi}{2} < \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$



$z=x+iy$ $x<0$ $y\geq 0$

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{-y}{-x}+\pi$

$= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi$



$z=x+iy$ $x<0$ $y<0$

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{-y}{-x}-\pi$

$= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi$

Calcul des racines n^e de 1

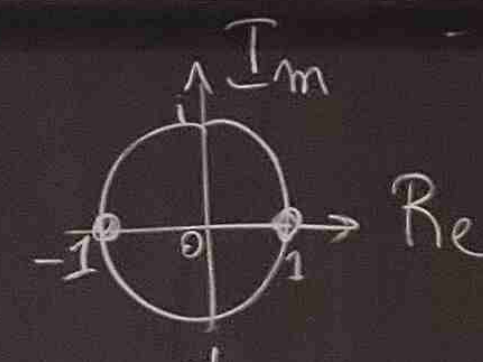
On cherche $z\in\mathbb{C}$ tq $z^2=1$

On note $z=|z|e^{i\theta}$ $-\pi<\theta\leq\pi$

$z^2=|z|^2e^{i2\theta}=1=e^{i2k\pi}$ $k\in\mathbb{Z}$

et donc $|z|=1$ $\theta=k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ (et $-\pi<\theta\leq\pi$)

$k=0$ et $k=1$

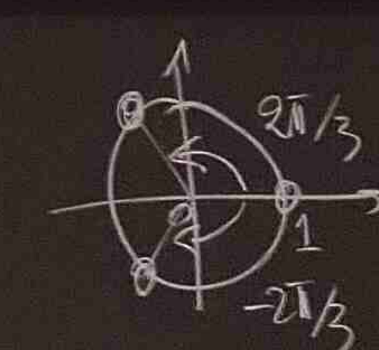


On cherche $z\in\mathbb{C}$ tq $z^3=1$

$z^3=|z|^3e^{i3\theta}=1=e^{i2k\pi}$ $k\in\mathbb{Z}$

(et $-\pi<\theta\leq\pi$)

$\theta=0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$



Fonctions complexes

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

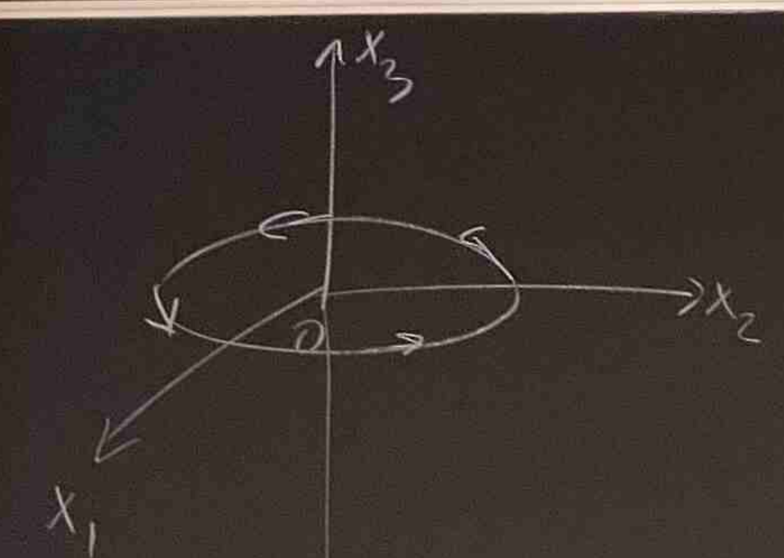
$z \to f(z) = \underbrace{\operatorname{Re} f(z)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\operatorname{Im} f(z)}_{v(x,y)}$

$x+iy \to u(x,y) + i\, v(x,y)$

où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto u(x,y)$ et $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto v(x,y)$

Exemples:

- $f(z) = \bar{z} = x - iy$ $\quad u(x,y) = x \quad v(x,y) = -y$
  $z = x+iy \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad \forall z \in \mathbb{C}$
  $u(x,y) = x^2 - y^2 \quad v(x,y) = 2xy$
- $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$
  $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$



Champ magn. créé fil vertical

- $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
  $z = x+iy$
  $\quad = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$
  $\forall z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = \log z$?
  $z = |z| e^{i \arg z} \quad -\pi < \arg z \leq \pi$

(on se souvient $a,b>0$ $\log(ab) = \log a + \log b$)

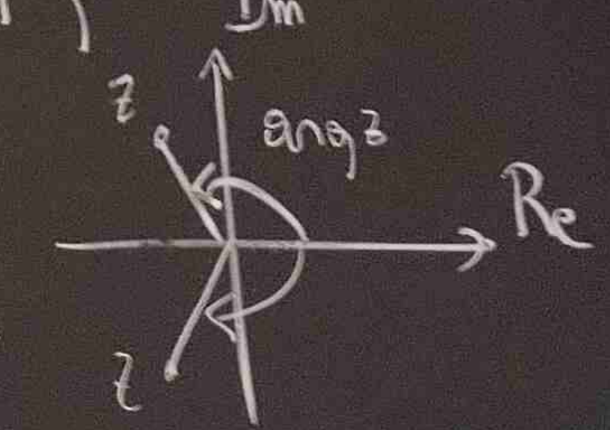
On pose $\log z = \log|z| + i \arg z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

On a bien $e^{\log z} = e^{\log|z| + i\arg z} = e^{\log|z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i\arg z} = z$

On a aussi (ex 9.13 livre $\log e^z = z$ si $z = x+iy$ et $-\pi < y \leq \pi$)

On n'a pas toujours $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

Puisque $\arg z$ est discont à travers l'axe réel negatif, le log le sera aussi



- $\gamma \in \mathbb{R}$ $\quad f(z) = z^\gamma = e^{\gamma \log z}$ $\quad z \neq 0$

$$= e^{\gamma(\log|z| + i \arg z)} \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

$$= e^{\gamma \log|z|} e^{i\gamma \arg z}$$

$$= |z|^\gamma e^{i\gamma \arg z}$$

On a $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ $\quad z^{\gamma_1+\gamma_2} = z^{\gamma_1} z^{\gamma_2}$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\quad z_1^\gamma z_2^\gamma = (z_1 z_2)^\gamma$

Puisque arg z est discont à travers l'axe réel négatif, z^γ l'est aussi

- fonctions trigonométriques

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Continuité

$f : O \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue en $z_0 \in O$ si

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ si $|z - z_0| < \delta$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

(idem $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ $\quad |\cdot|$ désigne le module)

Si f est continue $\forall z_0 \in O$ alors f est continue dans O

Ex : $\bar{z}$, z^2, e^z continues dans $\mathbb{C}$

$\arg z$, $\log z$, z^γ $\gamma \in \mathbb{R}$ sont continues dans

$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Im}\, z = 0,$ $\quad \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$

Remarques:

- $\left(f \text{ continue en } z_0 = x_0 + iy_0\right) \Leftrightarrow \left(u, v \text{ continues en } (x_0, y_0)\right)$
- Si f, g sont cont. en z_0 alors $f+g$ est continue en z_0
  - $f \cdot g$ ————
  - $f \circ g$ ————

Dém: $f+g$

On va montrer $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq si $|z - z_0| < \delta$ alors $|(f+g)(z) - (f+g)(z_0)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$ par hyp on a:

$\exists \delta_1 > 0$ tq si $|z - z_0| < \delta_1$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2$ ———— δ_2 ———— $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ on a si $|z - z_0| < \delta$:

$$|(f+g)(z) - (f+g)(z_0)| = |f(z) - f(z_0) + g(z) - g(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dérivée

Déf 9.1 line: $O \subset \mathbb{C}$ un ouvert $f : O \to \mathbb{C}$ dérivable en $z_0 \in O$ si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe et est finie (la même } \forall z \to z_0)$$

on la note $f'(z_0)$

Si f est dérivable $\forall z_0 \in O$ on dit que f est holomorphe dans O (analytique complexe)

Remarques:

- Si f est holomorphe dans O, alors f est continue dans O
- les formules usuelles sont valables $\forall z_0 \in O$

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$
$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$
$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\, g'(z_0)$$

Dém: $(f+g)'$

On va montrer $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq si $|z - z_0| < \delta$

$$\underbrace{\left| \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} - (f'(z_0) + g'(z_0)) \right|}_{I} < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, par hyp

$\exists \delta_1 > 0$ tq si $|z - z_0| < \delta_1$ alors $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon/2$

— δ_2 ———— δ_2 ——— $\left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right| < \varepsilon/2$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ pour $|z - z_0| < \delta$ on a

$$I = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right|$$
$$\leq \left| \quad \right| + \left| \quad \right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dans la suite on aimerait

$f(z) = z^2 \quad f'(z) = 2z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$f(z) = e^z \quad f'(z) = e^z \quad$ ——

$f(z) = \frac{1}{z} \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

le thm 9.2 confirme que c'est bien le cas

Déf 9.1 : $f : O \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to f(z)$

$x+iy \to u(x,y) + i v(x,y)$

f holomorphe dans O si $\forall z_0 \in O$ $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in O}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, est finie, la même $\forall z \to z_0$

on note $f'(z_0)$

Thm 9.2

(f holomorphe dans O) $\Leftrightarrow$ ($u, v \in \mathcal{C}^1$ dans O et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$)

De plus, si f est holomorphe alors $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ $\forall z = x+iy \in O$

Remarque surprenante!

On verra que si f est holomorphe alors $u, v \in \mathcal{C}^\infty$!

Ex : • $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x$ $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y$ $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y$ donc f est holomorphe dans $\mathbb{C}$

De plus, $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

$= 2x + i 2y = 2z$

• $f(z) = \bar{z} = x - iy$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1$ $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1$

f n'est pas holomorphe

• $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$

f est holomorphe dans $\mathbb{C}$, de plus

$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$= e^z$

• $f(z) = \log z = \log\sqrt{x^2+y^2} + i \arg z$

$\forall z \neq 0$ $-\pi < \arg z \leq \pi$

p.ex. si $x > 0$ $y \in \mathbb{R}$ $f(z) = \underbrace{\log\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\arctan\frac{y}{x}}_{v(x,y)}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

on a aussi $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\log$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0 \ \operatorname{Re} \leq 0\}$

et $f'(z) = \frac{1}{z}$

• $f(z) = \frac{1}{z}$ $z \neq 0$

f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

et $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

Dém thm 9.2 :

$\Rightarrow$: supposons f holomorphe et montrons $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ et $u, v \in \mathcal{C}^1$

(on ne va pas montrer que $u, v \in \mathcal{C}^1$)

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ $z_0 = x_0 + iy_0$

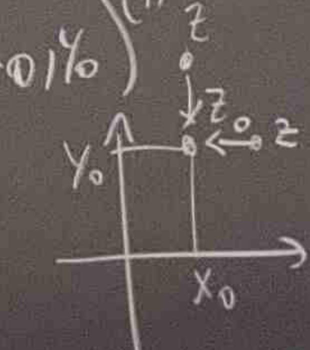
$z = x_0 + h + iy_0$ où $h > 0$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0+h, y_0) + iv(x_0+h, y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{h}$

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ (1)

$z_0 = x_0 + iy_0$

$z = x_0 + i(y_0 + h)$



$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0, y_0+h) + iv(x_0, y_0+h) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{ih}$

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)}{i}$ (2)

$\left(\frac{1}{i} = -i\right)$

On identifie (1) et (2) :

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ $\quad z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x_0 + h + iy_0$ où $h>0$ $\quad z_0 = x_0+iy_0$, $z = x_0 + i(y_0+h)$

On identifie (1) et (2) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$\Leftarrow$: Supp u, v C^1 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

et montrons que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ existe}$$

$z = x+iy$

$z_0 = x_0 + iy_0$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

$$= \frac{(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)+(y-y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_1,y_1)+i\left((x-x_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2)+(y-y_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_2,y_2)\right)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

où $(x_1,y_1) = \theta_1(x_0,y_0)+(1-\theta_1)(x,y)$ $\quad 0<\theta_1<1$

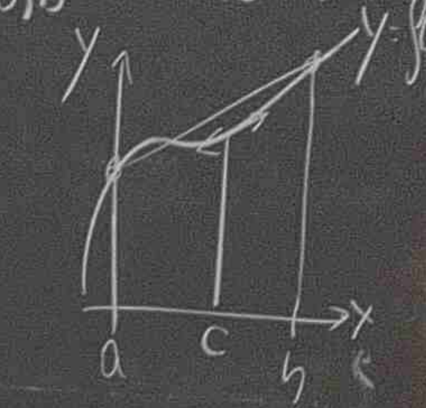
et $(x_2,y_2) = \theta_2$ — $(1-\theta_2)$ — $\quad 0<\theta_2<1$

on remplace $\frac{\partial u}{\partial y}$ par $-\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ par $\frac{\partial u}{\partial x}$

$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

$c = \theta a + (1-\theta)b$ $\quad a<c<b$

$0<\theta<1$



On obtient :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\left((x-x_0)+i(y-y_0)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,y_1)\right)+i(x-x_0)\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2)-\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,y_1)\right)+i(y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)\right)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,y_1) + \frac{i(x-x_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_2,y_2)-\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,y_1)\right) + \frac{i(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,y_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,y_1)\right)$$

On prend la limite quand $z \to z_0$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Chap 10 Intégration complexe

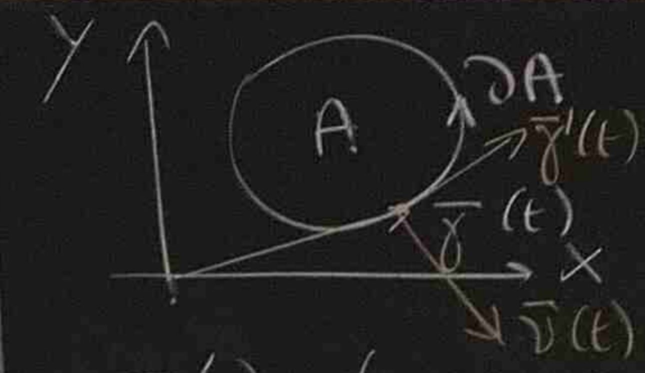
Thm de Cauchy - Formule intégrale de Cauchy

Rappel: Chap 4. Formules de Green

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

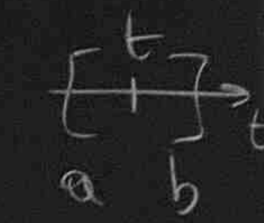
$z \to f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$x+iy$



$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1

$(x,y) \to g(x,y)$



$\vec{\gamma}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$

$\vec{\gamma}'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t))$

$$\vec{\nu}(t) = \frac{(\beta'(t), -\alpha'(t))}{\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}}$$

$$\iint_A \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial A} g \frac{\beta' \,dl}{\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}} = \int_a^b g(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)\,dt$$

$$\iint_A \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial A} \frac{g\,\alpha'}{\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}}\,dl = -\int_a^b g(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t)\,dt$$

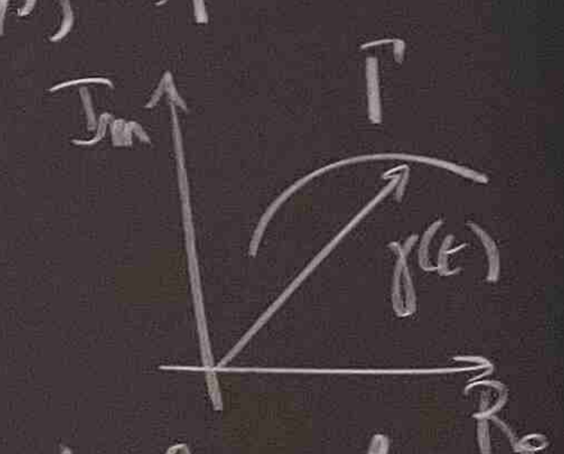
Déf 10.1: Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe régulière param $\gamma: [a,b] \to \Gamma$

Soit $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ continue, on note

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

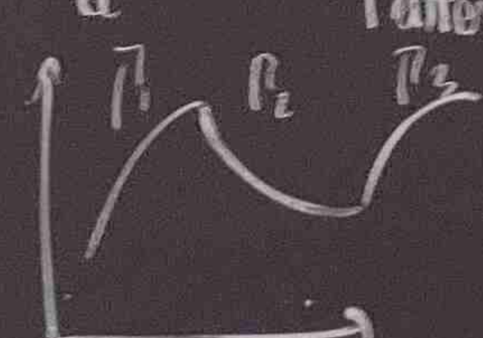
↑ attention : produit entre 2 complexes

Ce n'est pas le pdt scalaire



Si Γ est régulière par morceaux

$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i$ $\quad \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz$



Exemples:

∘ $f(z) = z^2$

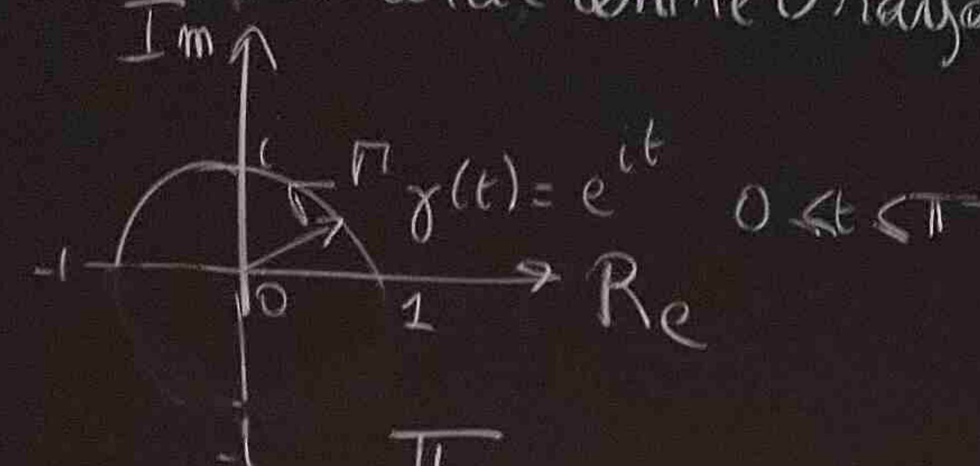
Thm 10.2

Im

D ⊂

Exemples:

∘ $f(z) = z^2$ Γ: demi-cercle centre 0 rayon 1



$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^\pi (e^{it})^2\, i e^{it}\, dt = i \int_0^\pi e^{i3t}\, dt$$

$$= \frac{i}{i3}\left[e^{i3t}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}$$

Γ: cercle centre 0 rayon 1 $\gamma(t) = e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

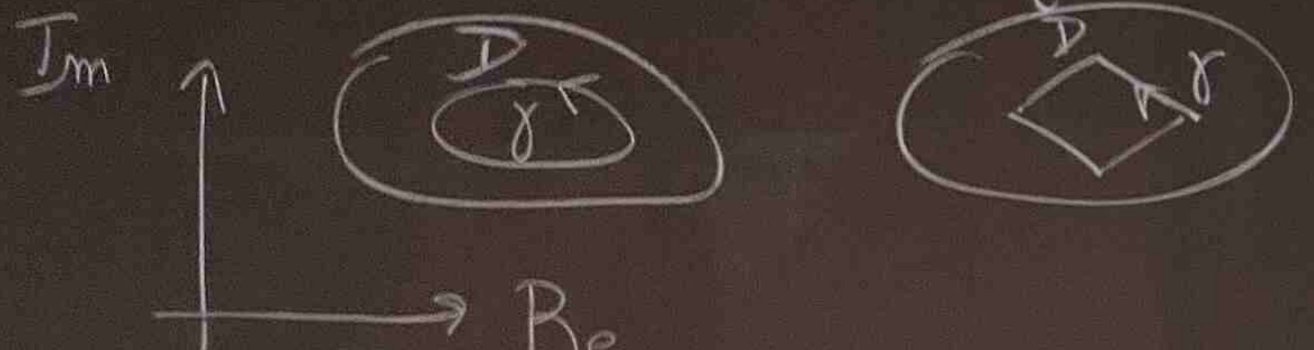
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \text{(cf thm Cauchy)}$$

∘ $f(z) = \frac{1}{z}$ Γ cercle centre 0 rayon 1
$\gamma(t) = e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i$$

(cf formule intégrale de Cauchy)

Thm 10.2 thm de Cauchy



$D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe
$f: D \to \mathbb{C}$ holomorphe
$\gamma \subset D$ courbe simple fermée régulière par morceaux

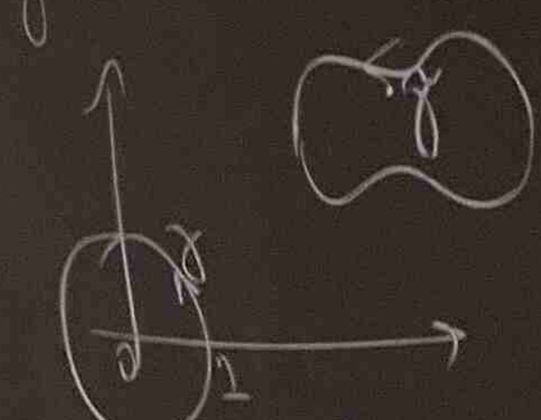
On a $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$

$\left(\oint_\Gamma \vec{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = 0 \text{ si } \Gamma \text{ fermée} \right)$

Exemples:

∘ $f(z) = z^2$ $D = \mathbb{C}$

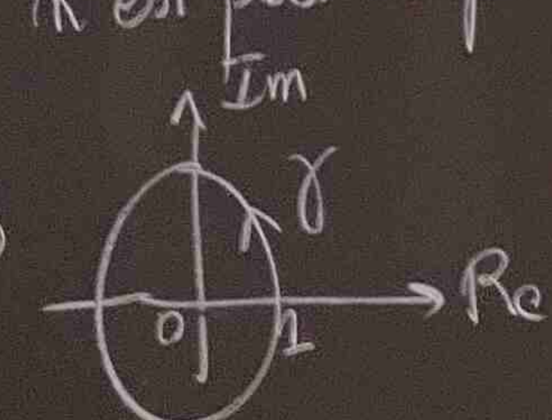
γ: cercle centre 0 rayon 1 $\oint_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{calcul}}{=} 0$



$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$

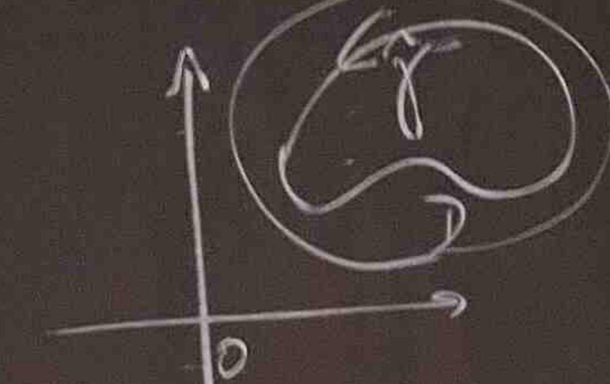
∘ $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
n'est pas simpl. connexe

d'ailleurs



$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

Par contre si $\tilde{\gamma}$ est une courbe fermée tq $0 \notin \text{int}\,\tilde{\gamma}$

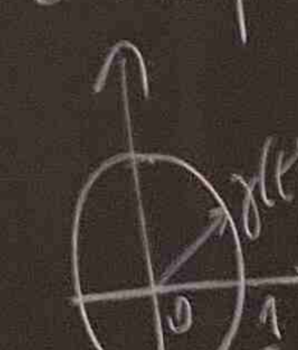


dans ce cas $\oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\,dz = 0$

car on peut appliquer le thm de Cauchy

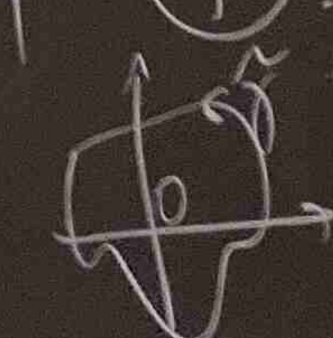
∘ $f(z) = \frac{1}{z^2}$ Γ cercle centre 0 rayon 1

On ne peut pas appliquer le thm de Cauchy
mais on fait le calcul



$\gamma(t) = e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

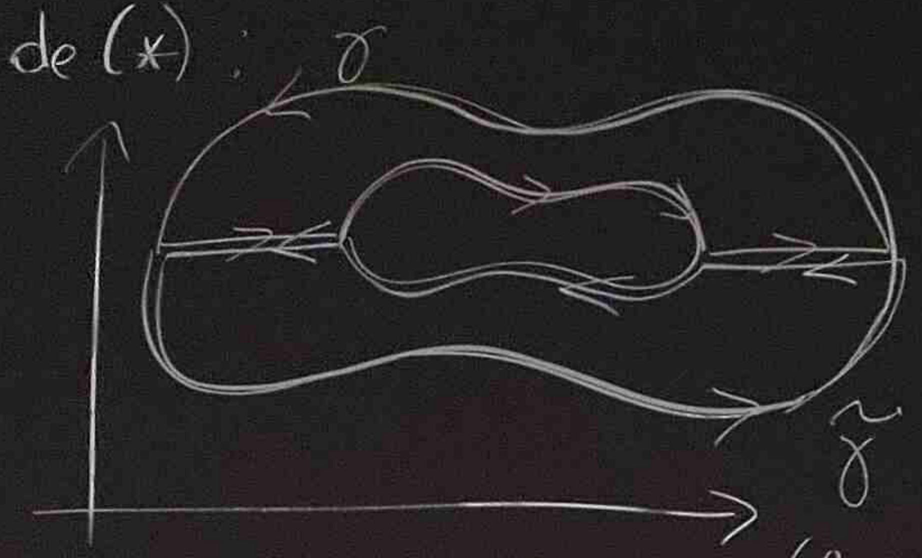
$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{i2t}} = i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt = \frac{i}{-i}\left[e^{-it}\right]_0^{2\pi} = 0$$



On verra que ce résultat est une conséq. de la formule intégrale de Cauchy

Dem du thm Cauchy cas où γ est régulière
param de Γ : γ : [a,b] → ℂ
t → γ(t) = α(t) + i β(t)
∈ℝ ∈ℝ
f : D → ℂ
z → f(z)
x+iy → u(x,y) + i v(x,y)
f holomorphe : u, v ∈ C1
∂u/∂x = ∂v/∂y et ∂u/∂y = −∂v/∂x
∫Γ f(z)dz = ∫a^b f(γ(t)) γ'(t)dt
= ∫a^b (u(α(t), β(t)) + i v(α(t), β(t))) (α'(t) + i β'(t))dt
= ∫a^b ((u(α(t), β(t))α'(t) − v(α(t), β(t))β'(t))
+ i (v(α(t), β(t))α'(t) + u(α(t), β(t)) β'(t))) dt
Rappel
=
∬ int Γ ((−∂u/∂y(x,y) − ∂v/∂x(x,y)) + i(−∂v/∂y(x,y) + ∂u/∂x(x,y))) dxdy
0
Cauchy-Riemann
=
0
Que se passe-t-il si D n'est pas simplement connexe?
Corollaire du thm de Cauchy (ex 10.13)
D
γ1
γ0
notez que γ0 et γ1 ont la même orientation
D = int γ0 \ int γ1
f : D → ℂ holomorphe on a
∫γ0 f(z)dz = ∫γ1 f(z)dz (*)
ex: f(z) = 1/z γ1 cercle centre 0 rayon 1
On a vu ∫γ1 1/z dz = 2πi
Soit γ0 courbe fermée tq int γ1 ⊂ int γ0
D'après (*):
∫γ0 1/z dz = 2πi
Periodensystem der Elemente
Tableau périodique des éléments
Periodic table of the elements
Tabla periódica de los elementos

Dem de (*) :



$f : \text{int}\,\gamma \to \mathbb{C}$ holomorphe $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

$f : \text{int}\,\tilde{\gamma} \to \mathbb{C}$ —— $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = 0$

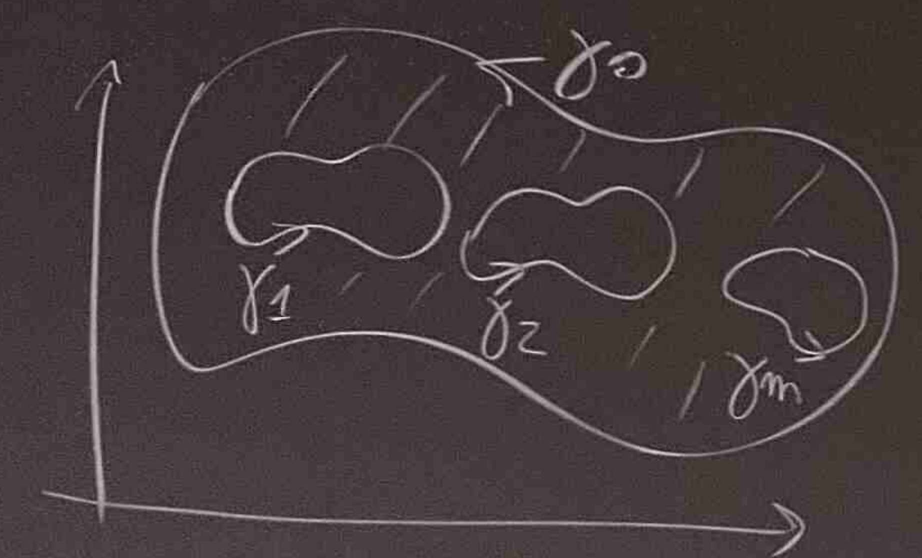
on somme ces 2 intégrales

$\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$

(le seint. parcourues 2x en sens inverse disparaissent)

car γ_1 est parcourue dans le sens inv.

Généralisation au cas de m trous



$f : \text{int}\,\gamma_0 \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \text{int}\,\gamma_i}$ holomorphe

(*) devient :

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

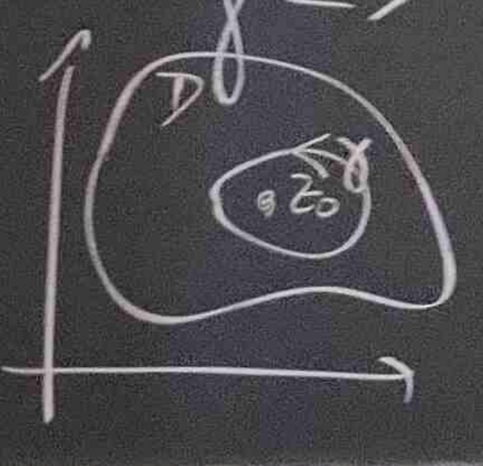
Thm 10.3 formule intégrale de Cauchy

Si $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe $f = u + iv$

$\gamma \subset D$ courbe simple fermée régulière par morceaux

Soit $z_0 \in \text{int}\,\gamma$, on a



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

De plus, f est infiniment dérivable (u, v sont C^∞) et pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

Exemples:

∘ $f(z) = z^2$

Exemples

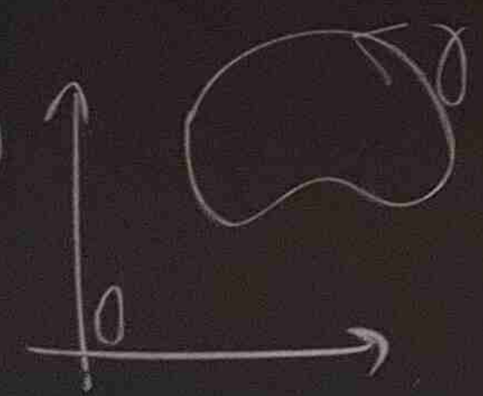
Si 0

f: int γ holom

Exemples :

- $\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z} dz$ en fonction de Γ

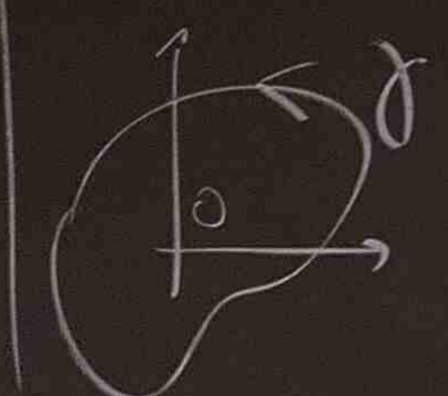
Si $0 \notin \text{int}\,\gamma$



$f : \text{int}\,\gamma \to \mathbb{C}$ holomorphe

D'après le thm de Cauchy $\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z} dz = 0$

Si $0 \in \text{int}\,\gamma$



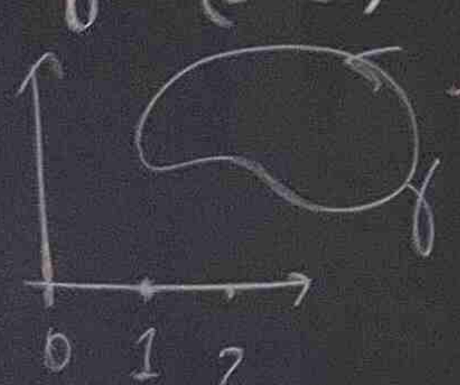
d'après la formule int. de Cauchy $(z_0 = 0, f(z) = \cos 2z, n = 0)$

$$\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z} dz = 2\pi i \cos(2.0) = 2\pi i$$

Si $0 \in \gamma$

l'intégrale n'est pas définie

- $\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz$ en fonction de γ

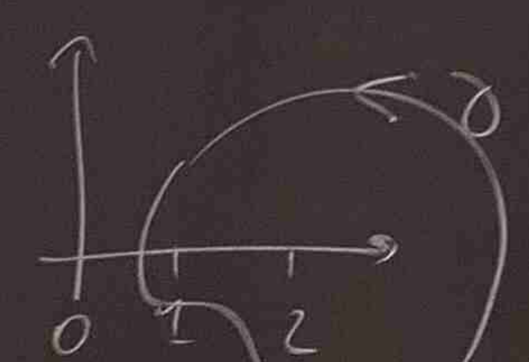


si $2 \notin \text{int}\,\gamma$

$\frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} : \text{int}\,\gamma \to \mathbb{C}$ holomorphe

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz = 0$$

si $2 \in \text{int}\,\gamma$



formule int de Cauchy $(z_0 = 2, n = 2, f(z) = e^{z+2})$

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = \pi i e^4$$

Analyse complexe

Résumé :

$f : O \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to f(z)$

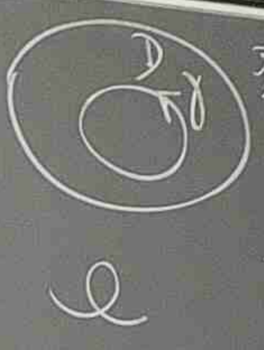
$x+iy \to u(x,y)+iv(x,y)$

f holomorphe dans O : $\forall z_0 \in O$ $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in O}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

existe, la même $\forall z \to z_0$ note $f'(z_0)$

Cauchy-Riemann

$(f \text{ holomorphe dans } O) \iff (u,v \in C^1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x})$

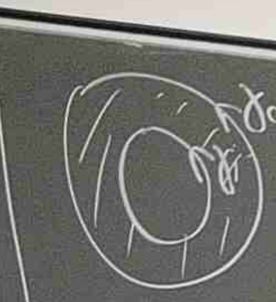


D simplement connexe

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$\gamma \subset D$ simple fermée régulière par morceaux

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

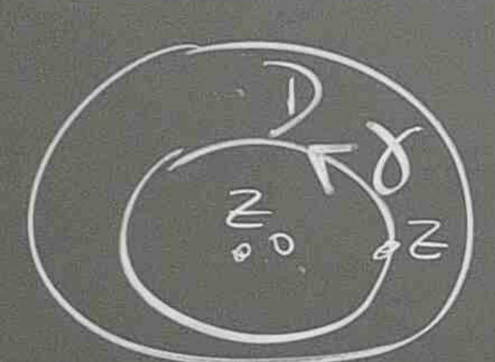


γ_0, γ_1 simple fermée rég. par morceaux

$f : \text{int}\,\gamma_0 \setminus \text{int}\,\gamma_1 \to \mathbb{C}$ holomorphe

$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$

Formules intégrales de Cauchy



D simpl. connexe

γ simple fermée rég. morceaux

$\gamma \subset D$ $\forall z_0 \in \text{int}\,\gamma$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

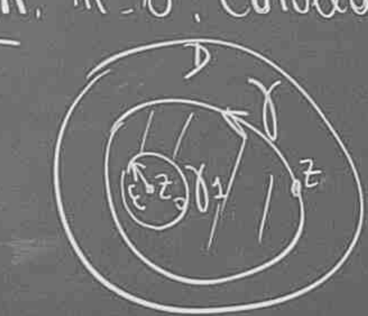
De plus $u, v \in C^\infty$ ($f^{(n)}$ existe $n = 0,1,2,\dots$) et

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

permet de calculer $\int_\gamma \frac{\cos 2z}{z}\,dz$ et $\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}\,dz$

Sera utile pour les transformées de Fourier et Laplace (analyse 4)

Dem : $n = 0$. Corollaire du thm de Cauchy

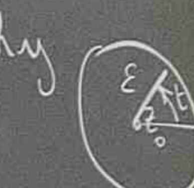


Soit ε suff. petit de sorte que $B_\varepsilon(z_0) \subset \text{int}\,\gamma$

On a :

$z \to \frac{f(z)}{z-z_0}$ holomorphe dans $\text{int}\,\gamma \setminus \text{int}\,\gamma_1$

Corollaire du thm de Cauchy



$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

param de γ_1 : $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma'(t) = \varepsilon i e^{it}$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})\, i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt$$

$=$

On prend la lim $\varepsilon \to 0$:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt$$

$$(*) \overset{?}{=} i\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt = 2\pi i\, f(z_0)$$

On peut permuter $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ et $\int_0^{2\pi} dt$

Car $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left| \int_0^{2\pi} \left(f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)\right) dt \right| = 0$

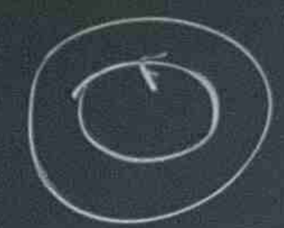
$$\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)\,dt\right| \le \int_0^{2\pi} \left|f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)\right| dt$$

$$\le 2\pi \sup_{0\le t\le 2\pi} \left|f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)\right|$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left|\int_0^{2\pi} (f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0))\,dt\right| \le 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0\le t\le 2\pi} \left|f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)\right|$$

$= 0$ car $f(z_0+\varepsilon e^{it})$ converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers $f(z_0)$, uniformément par rapport à t.

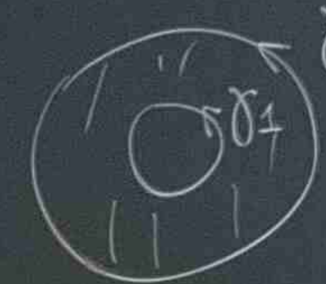
$= i \int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt$
$(*) = i \int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt = 2\pi i\, f(z_0)$
$= 0$ car
$f(z_0+\varepsilon e^{it})$ converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers $f(z_0)$, uniformément par rapport à t.
Dem $n=1$ On sait que $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$
et on veut montrer que $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$
$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$
$z = z_0+h$
$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0-h}\,dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}{h}$
$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0} \int_\gamma \frac{f(z)(z-z_0-z+z_0+h)}{h(z-z_0)(z-z_0-h)}\,dz$
$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,dz$
$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lim_{h\to 0} \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,dz$
$= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$
On peut permuter $\lim_{h\to 0}$ et $\int_\gamma$ car
$\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}$ converge lorsque $h\to 0$ vers $\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$,
uniformément par rapport à z
Conclusion : $f'(z_0)$ est finie, indép de h, donc f holomorphe
z_0
$z+h$
γ
z



D simplement connexe $f: D \to \mathbb{C}$ holomorphe

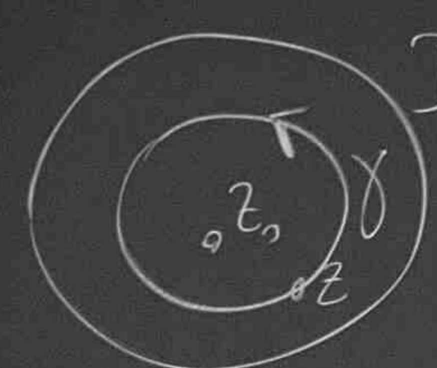
γ courbe simple fermée, régulière par morceaux

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$



$f: \operatorname{int}\gamma_0 \setminus \overline{\operatorname{int}\gamma_1} \to \mathbb{C}$ holomorphe

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$



$f: D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$\gamma \subset D$ courbe simple fermée reg morceaux

$z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

$$\forall n \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

Chap II : série de Taylor
—— Laurent

Rappel dans $\mathbb{R}$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- dev. limité $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(sx + (1-s)x_0)}{n!}(x - x_0)^{n+1}$.

  utile si x est proche de x_0

  $0 < s < 1$.

- série de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$f(x) \underset{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

toujours le cas ?

- oui si $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

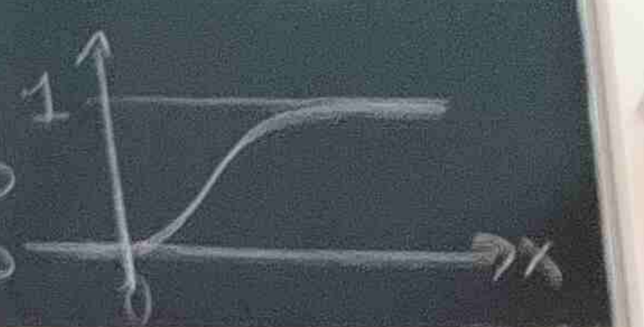
(dev. limité : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < s < x$)

- oui si $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x| < 1$

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n),$$

$$\lim_{n\to\infty} : 1 = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- non si $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$
  $= 0$ si $x \leq 0$



Car $f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = 0$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$$

On ne peut pas avoir $\forall x > 0$

$$\underbrace{f(x)}_{>0} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{0}$$

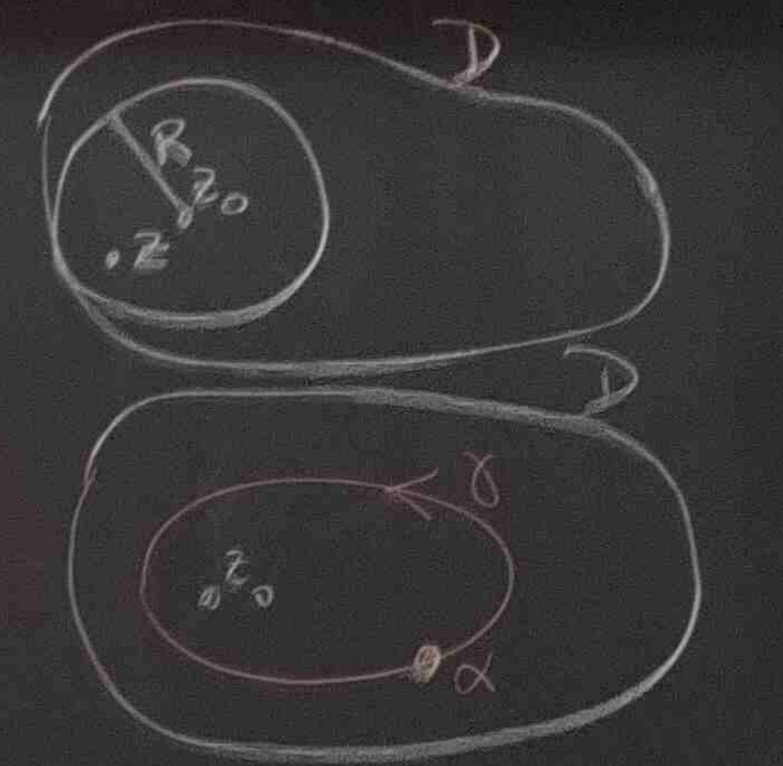
Que se passe-t-il dans $\mathbb{C}$?

Thm : série de Taylor (Remarque dans le livre)

D simplement connexe, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$z_0 \in D$, soit R tq $\underbrace{B_R(z_0)}_{\{z \in \mathbb{C} ;\, |z - z_0| < R\}} \subset D$

Soit $z \in B_R(z_0)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$



Remarque : Si $\gamma \subset D$ est une courbe simple fermée reg morceaux tq $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, on a toujours (form int de Cauchy)

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} \, d\alpha$$

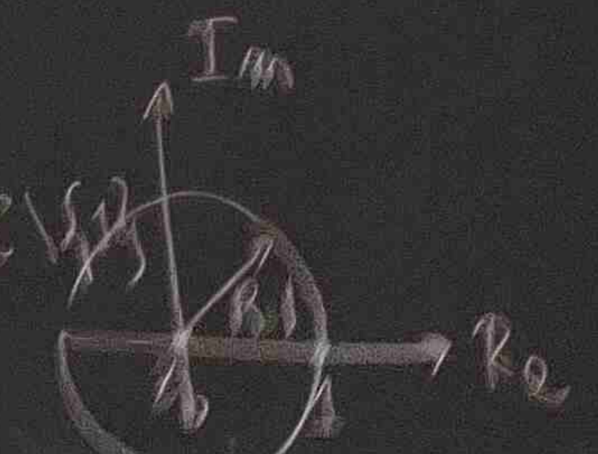
Ex : $f(z) = e^z$ $D = \mathbb{C}$ $R = +\infty$ $z_0 = 0$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $f(z) = \sin z$ idem $\forall z \in \mathbb{C}$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

- $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $z_0 = 0$ $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$



$\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z|<1$ on a :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \left(1-z^{n+1} = (1-z)(1+z+\dots+z^n)\right)$$

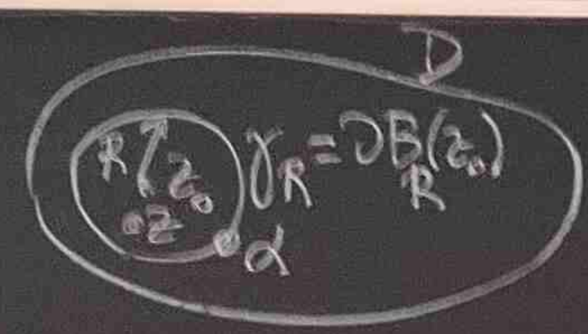
• $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ $\quad z_0 = 0$

$f : \mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ holomorphe

$\forall z$ tq $|z|<1$ on a :

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

Dem :



Soit $z \in B_R(z_0)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha$$

or $|\alpha - z_0| > |z - z_0|$

on a

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\alpha - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\alpha - z_0}\right)}$$

avec $\left|\dfrac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right| < 1$

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right)^n$$

Donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\alpha-z_0)^n}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \frac{(z-z_0)^n}{(\alpha-z_0)^n}\, d\alpha$$

on permute l'intégrale et la $\lim_{N\to\infty}$ (on verra pourquoi)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_R} \sum_{n=0}^{N} \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}} d\alpha \, (z-z_0)^n$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_{\gamma_R} \_\_\_\_\_\_$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}} d\alpha \right) (z-z_0)^n$$

formule intégrale de Cauchy $= f^{(n)}(z_0)$

On note $g_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \left(\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right)^n$

Lemme : Convergence normale : on dit que $\sum_{n=1}^{N} a_n(\alpha)$ converge normalement lorsque $N\to\infty$ si

$$|a_n(\alpha)| \leq b_n \quad \forall n \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$$

Si $\sum_{n=1}^{N} a_n(\alpha)$ converge normalement, alors elle converge uniformément par rapport à α

On a la convergence normale car

$$|a_N(\alpha)| = \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \left(\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right)^n \right| \leq \frac{\max_{\alpha\in D} |f(\alpha)|}{R} \underbrace{\left|\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right|^n}_{\leq C < 1}$$

$$\leq \underbrace{\_\_\_\_\_\_ \; C^n}_{b_n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{\max_{\alpha\in D} |f(\alpha)|}{R} \sum_{n=0}^{\infty} C^n$$

$$= \_\_\_\_\_\_ \; \frac{1}{1-C} < +\infty$$

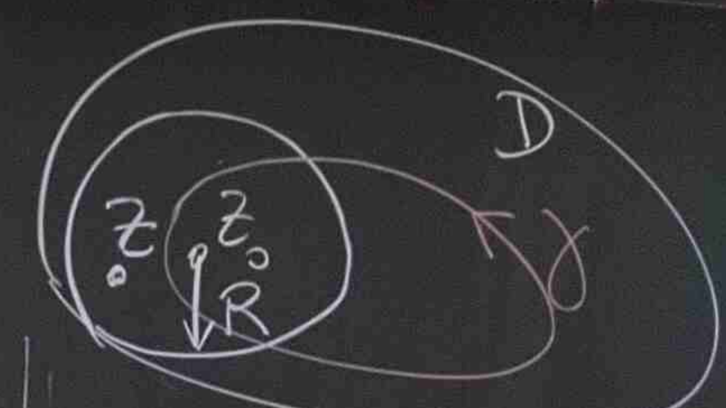
Que se passe-t-il si f est singulière en z_0 ?

Par exemple $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ g holomorphe

Thm 11.1 : séries de Laurent

$D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, $f : D\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe

Soit R tq $B_R(z_0) \subset D$ $\forall z \in B_R(z_0)$ on a



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$= \underbrace{\dots + c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} + \dots + c_{-1}\frac{1}{z-z_0}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots}_{\text{partie régulière}}$$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}}\, d\alpha$

pour toute courbe $\gamma \subset D$ simple fermée régulière par morceaux tq $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

Ex : • Si $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$$f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

et donc la partie singulière est nulle

$c_n = 0$ pour $n < 0$

On dit que z_0 est un point régulier

• $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$ $D = \mathbb{C}$ $f : D\setminus\{0\}$ holomorphe

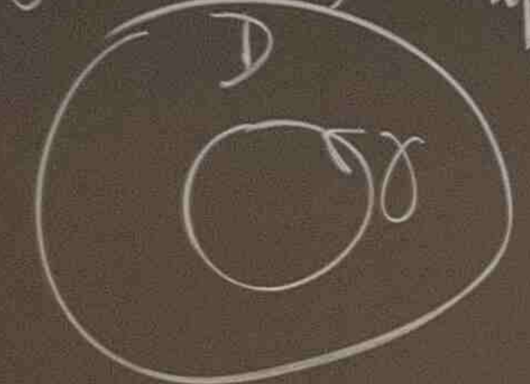
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \frac{1}{z} \quad \text{donc } c_{-1} = 1 \text{ et } c_n = 0 \text{ pour } n \neq -1$$

On dit que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1

• $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 1$

Correction :

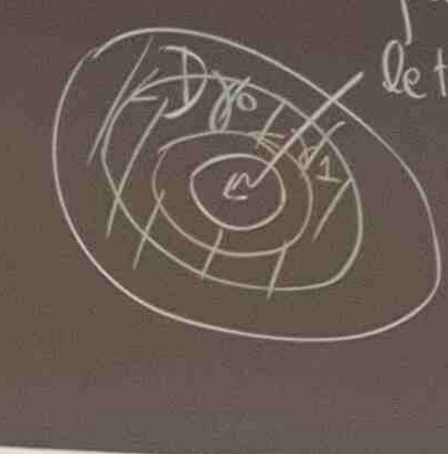
$f : D \to \mathbb{C}$, D simpl. connexe, f holomorphe



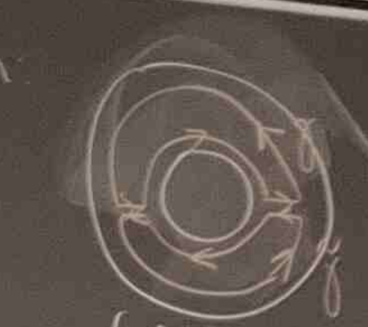
γ courbe simple fermée reg. morceaux $\subset D$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$f : D \to \mathbb{C}$ hol., D n'est pas simpl connexe (un ou plusieurs trous) Dem



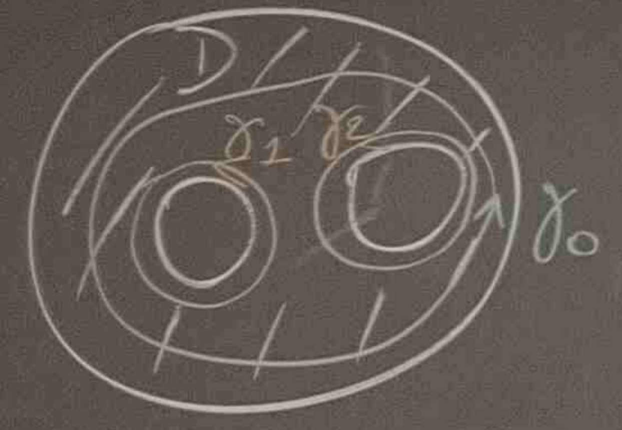
$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

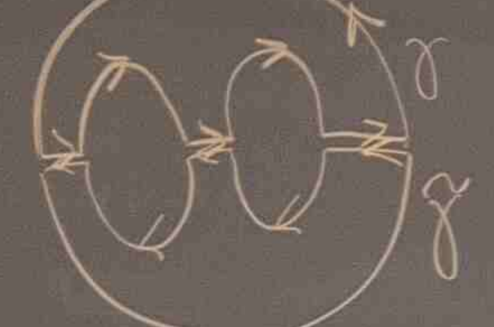


$$\int f(z)\,dz = 0$$
$$\oint f(z)\,dz = 0$$
$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

$f : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe $\tilde{D}$ simplement connexe

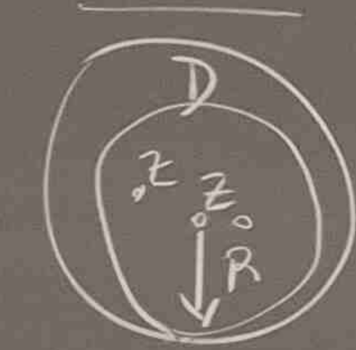




$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Thm 11.1 Série de Laurent



D simpl connexe

$f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe

R tq $B_R(z_0) \subset D$

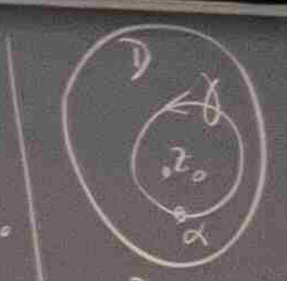
$\forall z \in B_R(z_0)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$= \dots + c_{-1}\frac{1}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

où $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}}\,d\alpha$

pour toute courbe $\gamma \subset D$, simple fermée reg. morceaux tq $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$



$\gamma \subset D$ $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

- Si $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$c_n = 0$ n entier négatif

$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\alpha)\,d\alpha = 0$ (Thm Cauchy)

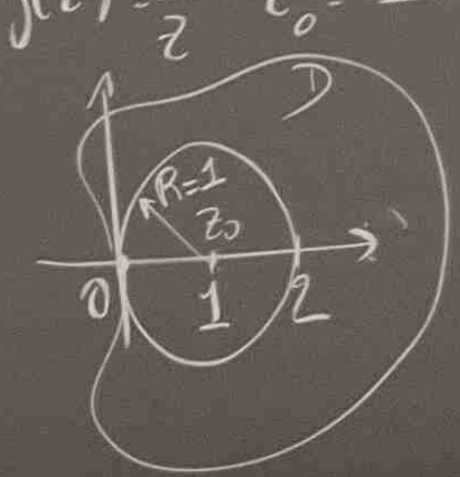
$$c_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\alpha)(\alpha - z_0)\,d\alpha = 0 \text{ (Thm Cauchy)}$$

$\alpha \to f(\alpha)$ hol. $\alpha \to \alpha - z_0$ hol

- $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$ $c_{-1} = 1$ $c_n = 0$ $n \neq -1$

on dit que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de f

- $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 1$



$\forall z \in B_1(1)$ $(|z-1| < 1)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^n}_{c_n}(z-1)^n$$

on dit que $z_0 = 1$ est un point régulier de $\frac{1}{z}$

$1 - z^{n+1} = (1-z)(1+z+z^2+\dots+z^n)$

- $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $z_0 = 0$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ avec $c_{-2} = 1$, $c_n = 0$ $n \neq -2$

On dit que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2 de $\frac{1}{z^2}$

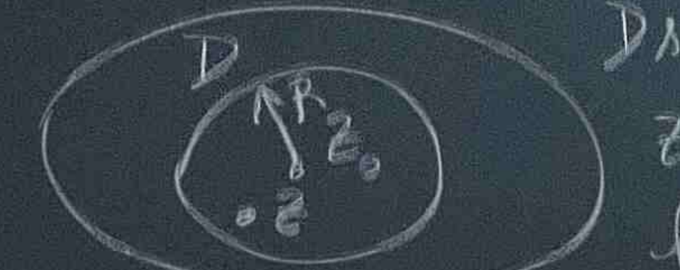
- $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$ $c_{-2} = 1$ $c_{-1} = 1$

$z_0 = 0$ pôle d'ordre 2 $c_n = 0$ si $n \neq -2$ et -1


$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$ $c_{-2} = 1$ $c_{-1} = 1$
$z_0 = 0$ pôle d'ordre 2
$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$, $z_0 = 0$
$z \in B(0)$
$|z| < 1$
R=1
$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$
$= \frac{1}{z} - \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$
$z_0 = 0$ pôle d'ordre 1
$f(z) = e^{1/z}$ $z_0 = 0$ $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ hol.
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$
partie régulière
partie singulière : une infinité de termes
On dit que $z_0 = 0$ est une sing. essentielle de $e^{1/z}$
$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{z}$
$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$
on dit que $z_0 = 0$ est un point régulier
$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$
On dit que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1.

Chap 11. Série de Laurent

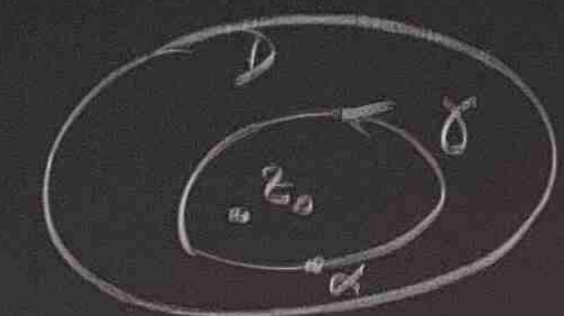
Thm 11.1 :



D simplement connexe
$z_0 \in D$
$f : D \setminus \{z_0\}$ holomorphe

Soit R tq $B_R(z_0) \subset D$ et soit $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

Alors on a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$



$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} \, d\alpha$$

pour toute courbe simple fermée reg. morceaux $\gamma \subset D$ $z_0 \in \text{int}\,\gamma$

Remarque $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\alpha) d\alpha$

sera utilisé pour calculer $\int_\gamma f(\alpha) d\alpha$

Def 11.2 :

- partie régulière : $c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$
- — singulière $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$

- Si la partie singulière est nulle, on dit que z_0 est un point régulier
- z_0 est un pôle d'ordre m si $c_{-m} \neq 0$ $m \in \mathbb{N}^*$ et $c_{-n} = 0$ pour $n > m$

  (ordre 2 : $\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$)

- z_0 singularité essentielle isolée si $c_{-n} \neq 0$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$
- Résidu de f en z_0 : $\text{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}$
- le rayon de convergence est le plus grand R $B_R(z_0) \subset D$

proposition 11.3 :

Si z_0 est un pôle

$\text{Res}_{z_0}(f) =$

Ex : • m = 2

$f(z) = e^z$

$c_{-1} =$

• $f(z) =$

$z_0 = i$

Corollaire

$\alpha \to \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$

$\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - \dots}$

proposition 11.3 :

Si z_0 est un pôle d'ordre m on a

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

Ex : ∘ $m=2$ $\quad f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$

$$(z-z_0)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + \dots$$

$$\frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z)\right) = c_{-1} + 2c_0(z-z_0) + \dots \xrightarrow{z \to z_0} c_{-1}$$

∘ $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2}$ $\quad z_0 = 2$ pôle d'ordre 2 (car $e^2 \neq 0$)

$$\frac{d}{dz}\left((z-2)^2 f(z)\right) = e^z \xrightarrow{z \to 2} e^2 \qquad \mathrm{Res}_2(f) = e^2$$

vérification : $f(z) = \frac{e^{z-2+2}}{(z-2)^2} = \frac{e^2 e^{z-2}}{(z-2)^2} = \frac{e^2\left(1 + (z-2) + \frac{(z-2)^2}{2!} + \dots\right)}{(z-2)^2}$

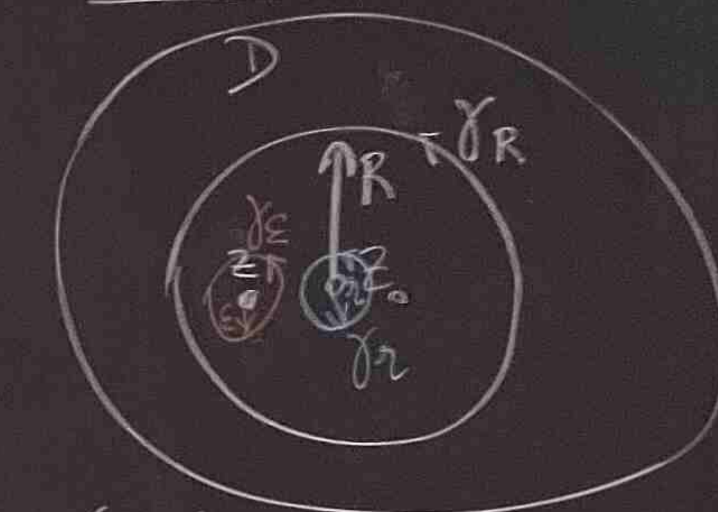
$$f(z) = e^2\left(\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} + \dots\right)$$

$$c_{-1} = \mathrm{Res}_2(f) = e^2$$

∘ $f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2}$ $\quad z_0 = i$ $\quad \sin i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} \neq 0$

$z_0 = i$ pôle d'ordre 1 $\quad \mathrm{Res}_i(f) = \lim_{z \to i}\left((z-i) f(z)\right) = \lim_{z \to i} \frac{\sin z}{z+i} = \frac{\sin i}{2i}$

Dem thm 11.1



r, ε suff petits

γ_R : bord de $B_R(z_0) \subset D$

$\alpha \to \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$ holomorphe

sauf en z et z_0

$\frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$ holom. $D \setminus \{z_0, z\}$

γ_r : bord de $B_r(z_0)$

γ_ε : bord de $B_\varepsilon(z)$

Corollaire thm Cauchy :

$\alpha \to \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$: $D \setminus \{z_0, z\}$ holomorphe

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_{\gamma_r} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha$$

param de γ_ε : $\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} \, dt$$

on prend la limite quand $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = 2\pi i f(z)$$

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha - z_0 + z_0 - z}$$

si $\alpha \in \gamma_R$: $R = |\alpha - z_0| > |z - z_0|$

ie $\left|\frac{z - z_0}{\alpha - z_0}\right| < 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\alpha - z_0}} d\alpha$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\alpha - z_0}\right)^n d\alpha$$

$\sum_{n=0}^{N} \frac{f(\alpha)}{\alpha-z_0}\left(\frac{z-z_0}{\alpha-z_0}\right)^n$ converge lorsque $N\to\infty$, uniformément par rapport à α et on peut permuter $\int$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$

$$\left((1-\tilde z^{n+1}) = (1-\tilde z)(1+\tilde z+\tilde z^2+\dots+\tilde z^n)\right)$$

$|\tilde z|<1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde z^n = \frac{1}{1-\tilde z}$

$$\int_{\gamma_R}\frac{f(\alpha)}{\alpha-z}\,d\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_R}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}}\,d\alpha\,(z-z_0)^n$$

Retour à (1)

si $\alpha\in\gamma_r$: $r=|\alpha-z_0|<|z-z_0|$

ie $\left|\frac{\alpha-z_0}{z-z_0}\right|<1$

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(\alpha)}{\alpha-z}\,d\alpha = -\int_{\gamma_r}\frac{f(\alpha)}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{\alpha-z_0}{z-z_0}}\,d\alpha$$

$$= -\int_{\gamma_r}\frac{f(\alpha)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha-z_0}{z-z_0}\right)^n d\alpha$$

permute $\int$, $\sum_{n=0}^{\infty}$:

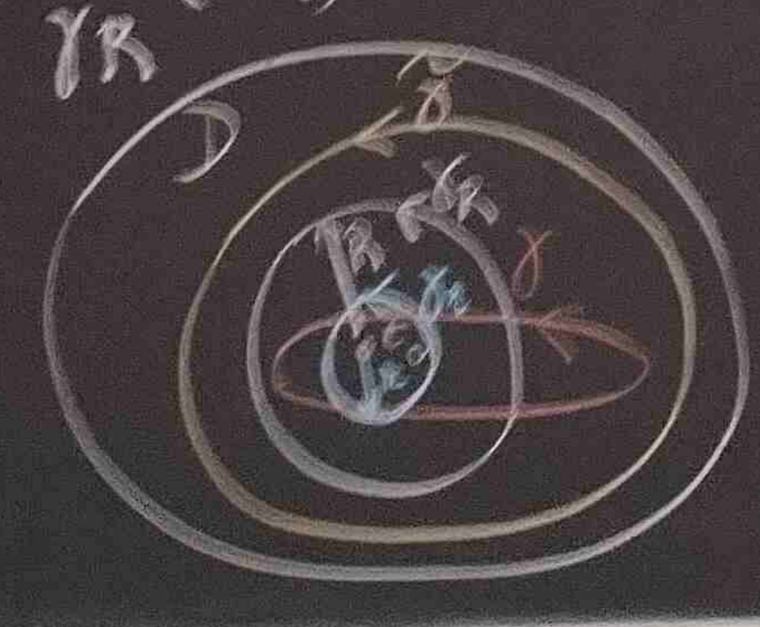
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\alpha)(\alpha-z_0)^n\,d\alpha\,\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$n+1=-m$:

$$= -\sum_{m=-1}^{-\infty}\int_{\gamma_r}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{m+1}}\,d\alpha\,(z-z_0)^m$$

(1) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_R}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}}\,d\alpha\,(z-z_0)^n + \sum_{m=-1}^{-\infty}\int_{\gamma_r}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{m+1}}\,d\alpha\,(z-z_0)^m = 2\pi i\, f(z) \qquad (2)$$



Corollaire du thm de Cauchy $\alpha \to \dfrac{f(\alpha)}{\alpha - z_0}$ holomorphe $D \setminus \{z_0\}$

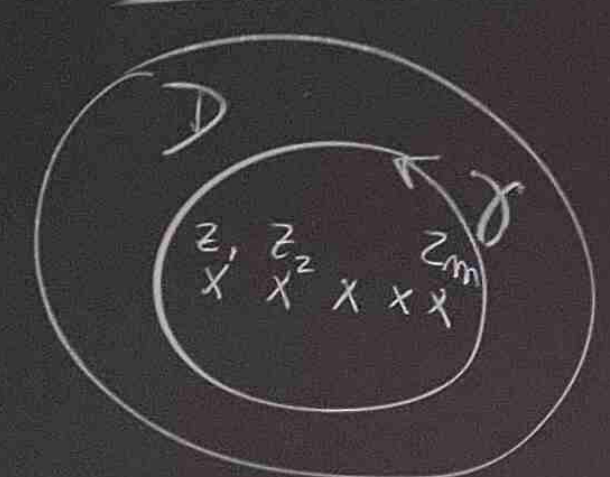
$$\int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\,d\alpha = \int_{\gamma_R} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\,d\alpha \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\,d\alpha$$

$$= \int_{\gamma} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\,d\alpha \quad (3)$$

les égalités (3) dans (2) donnent le résultat

Chap 12 : Thm des résidu et applications



D simplement connexe

γ courbe simple fermée régulière $\subset D$

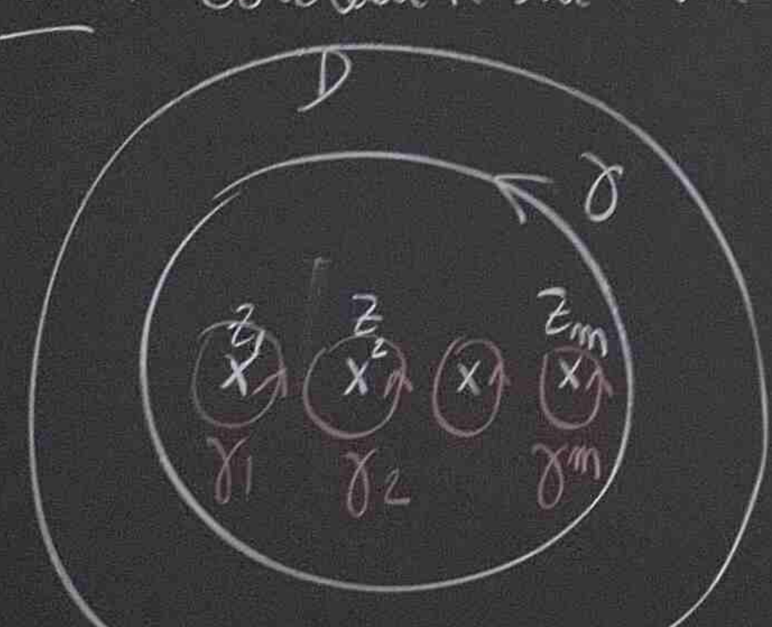
$z_1, z_2, \dots, z_m \in \operatorname{int} \gamma$

$f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ holomorphe

Alors on a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(f)\right)$$

Dem : Corollaire du thm de Cauchy



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(f)} + \dots + \underbrace{\int_{\gamma_m} f(z)\,dz}_{2\pi i \operatorname{Res}_{z_m}(f)}$$

proposition 11.3 :

Si z_0 est un p…

$\operatorname{Res}_{z_0}(f) =$ …

Ex : ◦ $m = 2$ …

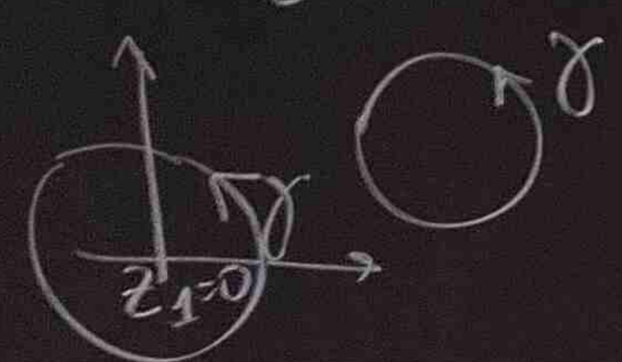
Ex :

◦ $f(z) = \dfrac{1}{z}$ …

$f(z)$ …

Ex:

$\circ\ f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\quad z_1 = 0 \quad f : \mathbb{C}\setminus\{z_1\}$ holomorphe



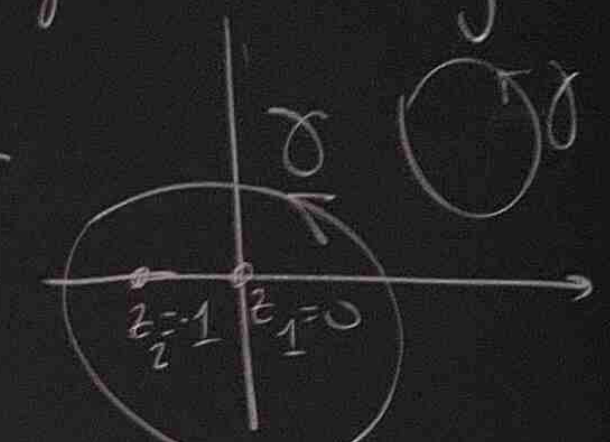
Si $0 = z_1 \notin \operatorname{int}\gamma$

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ thm Cauchy

Si $z_1 \in \operatorname{int}\gamma$ $\quad \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f) = 2\pi i$

On aurait pu utiliser la formule intégrale de Cauchy

$\circ\ f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ $\quad z_1 = 0 \quad z_2 = -1$



Si z_1 et $z_2 \notin \operatorname{int}\gamma$ thm Cauchy

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Si z_1 et $z_2 \in \operatorname{int}\gamma$: $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \operatorname{Res}_{z_2}(f)\right)$

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

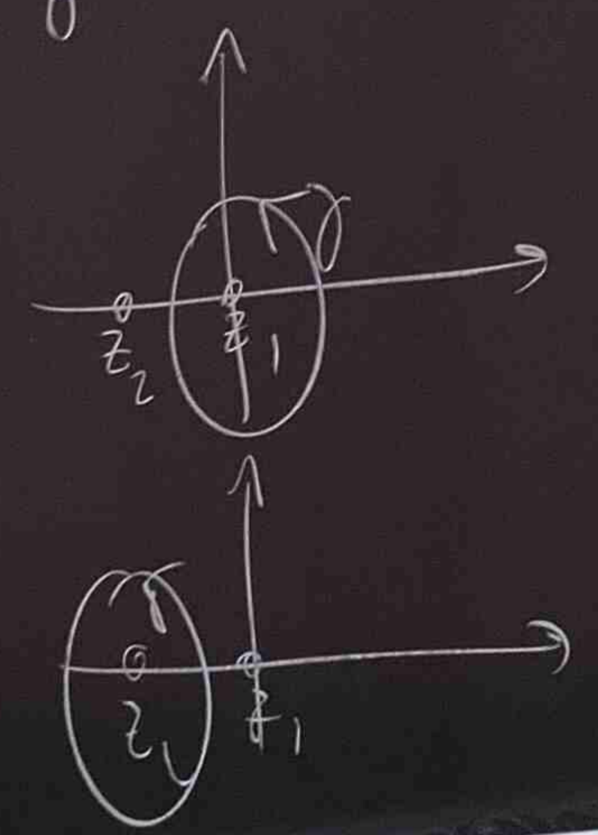
$\operatorname{Res}_0(f) = 1 \quad \operatorname{Res}_{-1}(f) = -1$

$$(z-z_1)f(z) = z f(z) = 1 - \frac{z}{z+1} \xrightarrow{z\to 0} 1$$

$$(z-z_2)f(z) = (z+1)f(z) = \frac{z+1}{z} - 1 \xrightarrow{z\to -1} -1$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(1-1) = 0$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} =$$

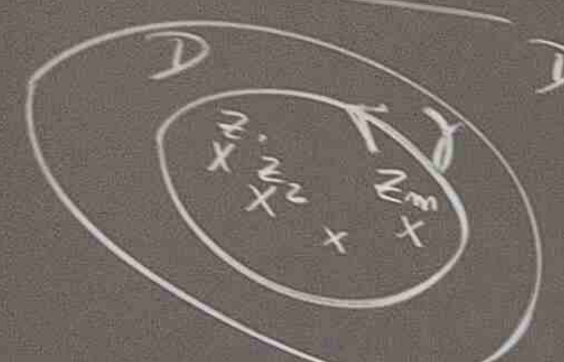


si $z_1 \in \operatorname{int}\gamma$ et $z_2 \notin \operatorname{int}\gamma$

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(f) = 2\pi i$

si $z_2 \in \operatorname{int}\gamma$ et $z_1 \notin \operatorname{int}$ $\quad \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_2}(f) = -2\pi i$

Thm résidus



$D \subset \mathbb{C}$ simpl. connexe

γ simple fermée rég. morceaux $\subset D$

$z_1, z_2, \dots, z_m \in \operatorname{int}\gamma$

$f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorphe

alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(f)\right)$

par ex si z_1 pôle d'ordre 1

z dans un voisinage de z_1

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_1} + c_0 + c_1(z - z_1) + c_2(z - z_1)^2 + \dots$$

$$(z - z_1) f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_1) + c_1(z - z_1)^2 + \dots$$

$$\lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_1}(f)$$

2 exemples de calcul

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4}\,dx$$

Cas général

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

On veut écrire $I = \displaystyle\int_\gamma \tilde{f}(z)\,dz$

où γ est le cercle de centre 0 rayon 1. $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

et $\tilde{f}$ est à déterminer

Cas particulier

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$$

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2 + \cos\theta}$$

$$\tilde{f}(z) = \frac{\frac{1}{2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}}}{iz}$$

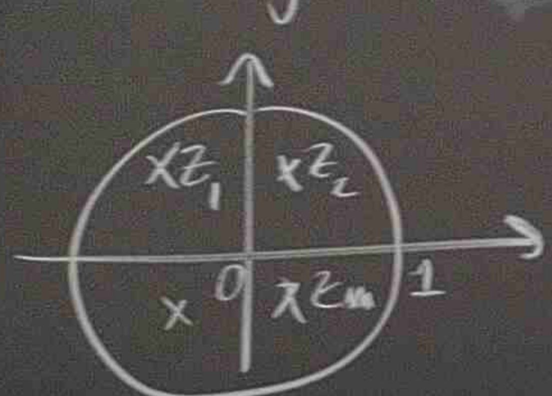
$$\tilde{f}(z) = \frac{2}{(4 + z + \frac{1}{z})iz} = \frac{2}{(z^2 + 4z + 1)i}$$

$$I = \int_\gamma \tilde{f}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\, i e^{i\theta}\,d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) d\theta$$

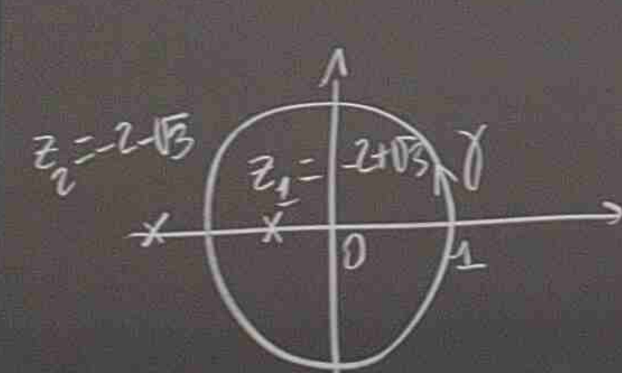
on pose $z = e^{i\theta}$ et on obtient $\tilde{f}(z) = \dfrac{f\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)}{iz}$

Soit $z_1, z_2, \dots, z_m$ les points singuliers de $\tilde{f}(z)$ $\in \operatorname{int}\gamma$, on a :



$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(\tilde{f}) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(\tilde{f})\right)$$

$$\tilde{f}(z) = \frac{2}{i(z^2 + 4z + 1)}$$



racine de $z^2 + 4z + 1$: $\Delta = 16 - 4 = 12$

racines $\dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(\tilde{f})$$

$$\operatorname{Res}_{z_1}(\tilde{f}) = \operatorname{Res}_{z_1}\left(\frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)i}\right)$$

$$= \lim_{z \to z_1} \left((z - z_1)\tilde{f}(z)\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{2}{(z - z_2)i}$$

$$= \frac{2}{(z_1 - z_2)i} = \frac{2}{2\sqrt{3}i} \qquad I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Cas général

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{iax}\, dx$$

où $a \geq 0$ $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

où R et Q sont 2 poly tq $Q(x) \neq 0$ et $\deg Q \geq \deg P$ ...

Cas part.

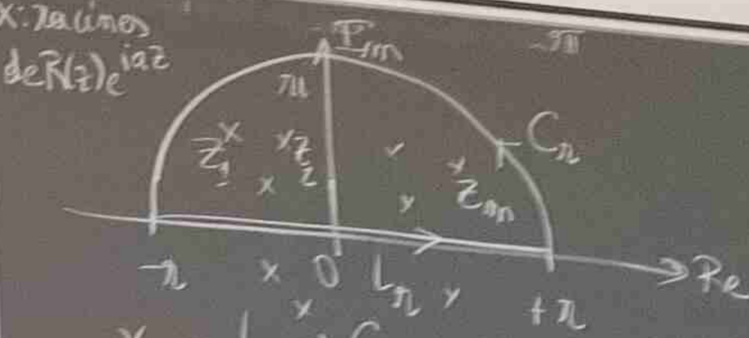
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\, dx$$

$a = 0$ $R(z)e^{iaz} = \frac{z^2}{16+z^4}$

racines de $16+z^4$: $z^4 = -16 = 2^4 = 2^4 e^{i(\pi + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$r^4 e^{i4\theta}$

x : racines de $R(z)e^{iaz}$

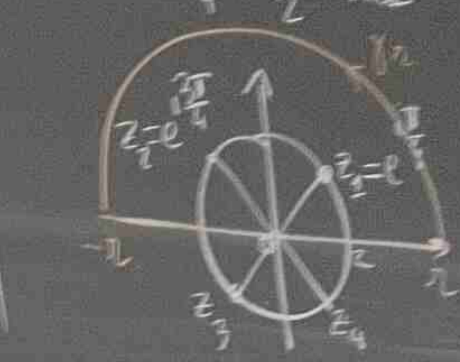


$\gamma_r = L_r \cup C_r$

pas de point singulier sur L_r

r suff grand de sorte que les racines soient comme dans le dessin

$r = 2$ $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$



On a $\int_{L_r} R(z)e^{iaz}\, dz + \int_{C_r} R(z)e^{iaz}\, dz$

$= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z_1}(R(z)e^{iaz}) + \dots + \mathrm{Res}_{z_m}(R(z)e^{iaz}) \right)$

$\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{z^2}{16+z^4}\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{(z-z_1)\, z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$

$= \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$

après calcul $= \frac{1+i}{8i\sqrt{2}}$, de même $\mathrm{Res}_{z_2}\left(\frac{z^2}{16+z^4}\right) = \frac{1-i}{8i\sqrt{2}}$

On prend la limite $r \to +\infty$ et on va montrer que $\int_{C_r} R(z)e^{iaz}\, dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$ de sorte que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\, dx = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z_1}(R(z)e^{iaz}) + \dots + \mathrm{Res}_{z_m}(R(z)e^{iaz}) \right)$$

Si on sait montrer que $\int_{C_r} \frac{z^2}{16+z^4}\, dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$

alors on a :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\, dx = \frac{2\pi i \cdot 2}{8i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Cas gen.

Reste à dem

$\int_{C_r} R(z)e^{iaz}\, dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$

(il faudra utiliser $a \geq 0$, $\deg Q \geq \deg P + 2$)

Cas part

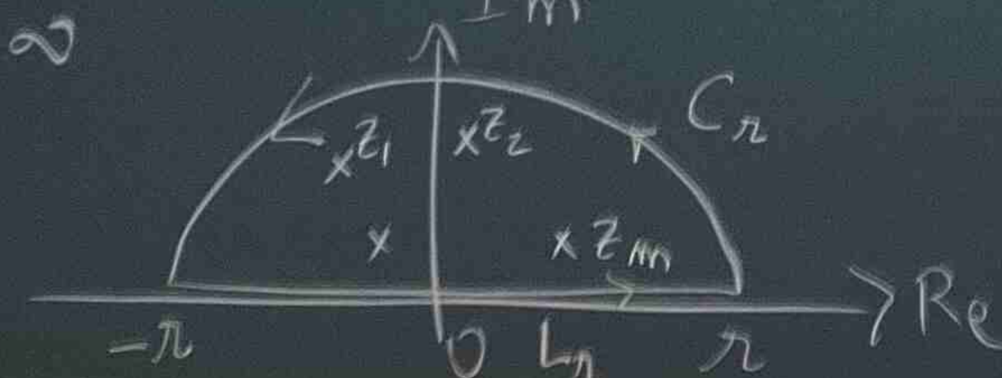
$\int_{C_r} \frac{z^2}{16+z^4}\, dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$

Ensuite chap 13 : transf. conformes

Chap 12. Thm résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{iax}\, dx \qquad a \geq 0 \qquad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0 \;\; x \in \mathbb{R}$$

$\deg Q \geq \deg P + 2$



$Q(z_j) = 0$ $j = 1, \dots, m$ contenues dans $\operatorname{int}(L_r \cup C_r)$

$$\int_{-r}^{r} R(x) e^{iax} dx + \int_{C_r} R(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(R(z_1) e^{iaz_1}\right) + \dots + \mathrm{Res}\left(R(z_m) e^{iaz_m}\right) \right)$$

On prend la lim $r \to \infty$, on montre que $\int_{C_r} R(z) e^{iaz} dz \xrightarrow{r \to \infty} 0$ et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx = 2\pi i \left(\mathrm{Res} \dots \right)$$

Sur C_r : $\gamma(t) = re^{it}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$ $\quad (r > 2)$

$$\left| \int_{C_r} R(z) e^{iaz} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} e^{iar(\cos t + i \sin t)} i r e^{it} dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \right| \underbrace{\left| e^{iar\cos t} \right|}_{=1} \underbrace{\left| e^{-ar\sin t} \right|}_{\leq 1 \text{ si } a \geq 0} \underbrace{|i|}_{1} r \underbrace{\left| e^{it} \right|}_{1} dt$$

$$\left|\int_{C_r} R(z)e^{iaz}\,dz\right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{|P(re^{it})|}{|Q(re^{it})|}\, r\,dt$$

"on aimerait que"

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\, r\,dt \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

pas une dém.

Cas part où $R(x)e^{iax} = \frac{x^2}{16+x^4}$

$$\left|\int_{C_r} \frac{z^2}{16+z^4}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{r^2 e^{i2t}}{16+r^4e^{i4t}}\, ire^{it}\,dt\right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{r^2\,|e^{i2t}|}{|16+r^4e^{i4t}|}\, r|e^{it}|\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{r^2}{|16+r^4e^{i4t}|}\, r\,dt$$

On a :

$$r^4 = |r^4e^{i4t}| = |r^4e^{i4t}+16-16|$$

$$\leqslant |16+r^4e^{i4t}|+16$$

$$r^4-16 \leqslant |16+r^4e^{i4t}|$$

Si $r>2$, $r^4-16>0$ et on a

$$\frac{1}{|16+r^4e^{i4t}|} \leqslant \frac{1}{r^4-16}$$

et donc $\left|\int_{C_r} \frac{z^2}{16+z^4}\,dz\right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{r^2}{r^4-16}\, r\,dt \xrightarrow{r\to\infty} 0$

Chap 13 Applications conformes

Application à la mécanique des fluides

Def 13.1 $D\subset\mathbb{C}$ ouvert $f: D\to f(D)=D^*\subset\mathbb{C}$ est une appl. conforme de D dans D^* si

- $f: D\to D^*$ bijective
- f holomorphe sur D

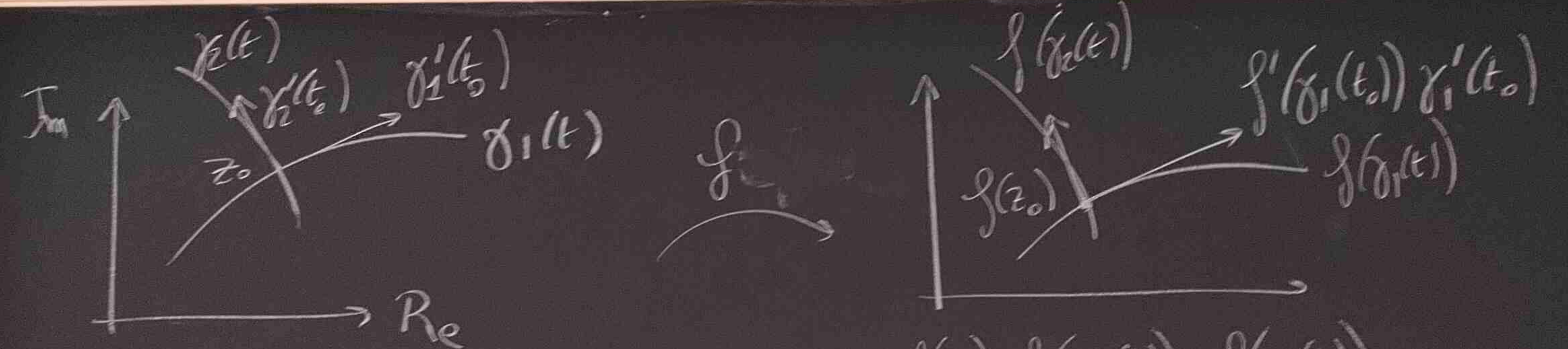
On peut montrer que $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$

Ex: $f(z) = z$ conforme $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \bar{z}$ n'est pas conforme (pas holom.)

on verra que $f(z) = \frac{1}{z}$ conforme $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Remarque: une application conforme conserve les angles



$z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$

$f(z_0) = f(\gamma_1(t_0)) = f(\gamma_2(t_0))$

Rappel: $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}$ et donc $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

On a: $$\frac{f'(\gamma_1(t_0))\,\gamma_1'(t_0)}{f'(\gamma_2(t_0))\,\gamma_2'(t_0)} = \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} \cdot \frac{\gamma_1'(t_0)}{\gamma_2'(t_0)}$$

- angle entre $f(\gamma_1(t))$ et $f(\gamma_2(t))$
- $= 1$ car $f'(z_0) \neq 0$ car f conforme
- angle entre γ_1 et γ_2

Déf 13.2 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

est une transformation de Moebius

Prop 13.3 : Si $ad-bc \neq 0$

- Si $c=0$ (et donc $d \neq 0$) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ conforme
- Si $c \neq 0$ $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ est conforme

Dem : $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ injective ?

$$(f(z_1) = f(z_2)) \overset{?}{\Rightarrow} (z_1 = z_2)$$

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

$$(az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d)$$

$$z_1(ad-bc) = z_2(ad-bc)$$

$\Rightarrow z_1 = z_2$ si $ad-bc \neq 0$

surjectivité : soit w tq $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$$w(cz+d) = az+b$$

$$z(-a+wc) = b-wd \quad z = \frac{b-wd}{wc-a}$$

Si $c=0$ (et donc $ad \neq 0$)

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijective

Si $c \neq 0$

$f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ bijective

f est holomorphe car c'est le quotient de 2 fcts holomorphes, et le dénom. ne s'annule pas

Ex 13.1

$f(z) = \frac{1}{z}$ $z \neq 0$

f transforme les ...

en droites ou cer...

$f(z) = \frac{1}{z}$ ...

Ex 13.1

$f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$

f transforme les droites et cercles en droites ou cercle

$f(z) = \frac{1}{z} \quad z = x+iy \quad f(z) = u+iv$

$$u+iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$x+iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u}{u^2+v^2} + i\,\frac{-v}{u^2+v^2}$$

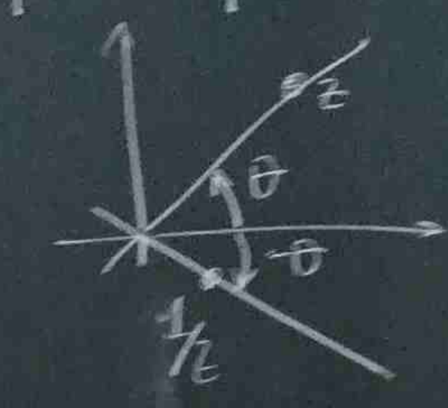
$$x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

Cas 1 : $z \in$ droite passant par l'origine

$z = re^{i\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$



autre calcul

$\alpha x + \beta y = 0$

$\frac{\alpha u - \beta v}{u^2+v^2} = 0$ et donc $\alpha u - \beta v = 0$

$f(z) \in$ droite passant par l'origine

Cas 2 : $z \in$ droite ne passant pas par l'origine

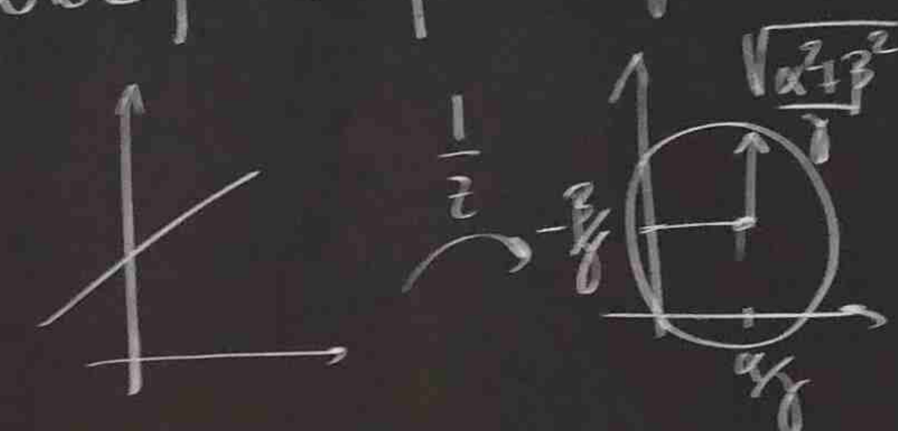
$\alpha x + \beta y = \frac{\gamma}{2} \quad \gamma \neq 0$

$\alpha u - \beta v = \frac{\gamma}{2}(u^2+v^2)$

$\frac{2\alpha}{\gamma} u - \frac{2\beta}{\gamma} v = u^2+v^2$

$\left(u - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(v + \frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}$

cercle passant par l'origine



Cas 3 : si $z \in$ cercle passant par l'origine

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$

$\left(\frac{u}{u^2+v^2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2} - \beta\right)^2 = \alpha^2+\beta^2$

$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2\alpha u}{u^2+v^2} + \alpha^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{2\beta v}{u^2+v^2} + \beta^2 = \alpha^2+\beta^2$

$$\frac{u^2+v^2 - 2\alpha u(u^2+v^2) + 2\beta v(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2} = 0$$

$-2\alpha u + 2\beta v + 1 = 0$

eq. d'une droite ne passant pas par l'origine

Cas 4 (exercice)

si $z \in$ cercle ne passant pas par l'origine

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2$ avec $\gamma^2 \neq \alpha^2+\beta^2$

alors $(u-\tilde{\alpha})^2 + (v-\tilde{\beta})^2 = \tilde{\gamma}^2$ (à faire)

cercle ne passant pas par l'origine

Prop 13.4 Toute transformation de Moebius $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ transforme les droites et cercles en droites ou cercles (pour autant que $ad-bc \neq 0$ $\Rightarrow c \neq 0$ ou $d \neq 0$)

Décomposition de la transf de Moebius

$$z \longrightarrow cz \longrightarrow cz+d \longrightarrow \frac{1}{cz+d} \longrightarrow \left(b-\frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d} \longrightarrow \left(b-\frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d}$$

$z = re^{i\theta}$ $\quad cz = rRe^{i(\theta+\alpha)}$

$c = Re^{i\alpha}$

dilatation — translation — inversion — dilatation — translation

$D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ $\quad 1/z$ $\quad f(D) = D^* = \{z \in \mathbb{C} ; |z| > 1\}$

Dem : • si $c = 0$ (et donc $d \neq 0$)

$z \to \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ qui est une transf. linéaire

on verra qu'une transf. linéaire transforme les cercles en cercles et les droites en droites

• si $c \neq 0$ on écrit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ sous la forme $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$f_3(z) = cz+d$ $\quad f_2(z) = \frac{1}{z}$

et $f_1(z) = \alpha z + \beta$ où α et β sont tels que $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = f_1(f_2(f_3(z)))$

$$= \frac{\alpha}{cz+d} + \beta$$

ie $az+b = \alpha + \beta(cz+d)$

$= \beta c\, z + \alpha + \beta d$

$\alpha = \beta c \qquad \beta = \frac{a}{c}$

$b = \alpha + \beta d \qquad \alpha = b - \frac{ad}{c}$

$f_1(z) = \left(b - \frac{ad}{c}\right) z + \frac{a}{c}$

Montrons qu'une application linéaire $z \to az+b$ transforme les cercles en cercles et les droites en droites

$z = x+iy \quad f(z) = u+iv = az+b$

$a = \alpha + i\beta$

$b = \gamma + i\delta$

$= (\alpha+i\beta)(x+iy) + \gamma + i\delta$

$= \alpha x - \beta y + \gamma$

$+ i(\alpha y + \beta x + \delta)$

$u = \alpha x - \beta y + \gamma$

$v = \alpha y + \beta x + \delta$

$$\begin{pmatrix} u-\gamma \\ v-\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(u-\gamma) + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}(v-\delta) \\ \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}(u-\gamma) + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(v-\delta) \end{pmatrix}$$

Cas 1 : image d'une droite

$$\alpha x + \beta y = \nu$$

$$\tilde{\alpha} u + \tilde{\beta} v = \tilde{\nu}$$

Cas 2 image d'un cercle

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 = \tilde{R}^2$$

Chap 13. Appl. conformes

$f : D \to f(D) = D^*$ conforme si
- f holomorphe
- f bijective

dans $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$

conserve les angles

transf. Moebius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

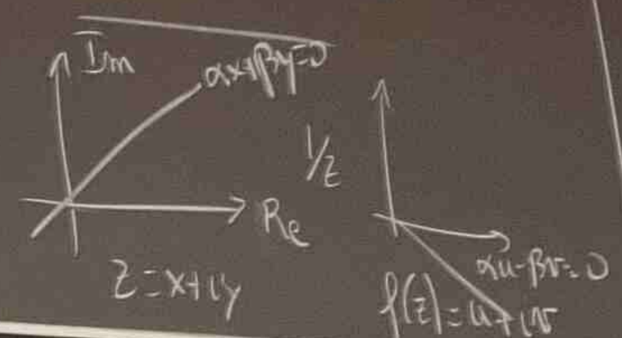
$ad - bc \neq 0$

$c = 0$ $\quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ conforme

$c \neq 0$ $\quad f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ conforme

$f(z) = \frac{1}{z}$

transf les cercles et droites en



$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$f_3(z) = cz + d$

$f_2(z) = \frac{1}{z}$

$f_1(z) = \alpha z + \beta$

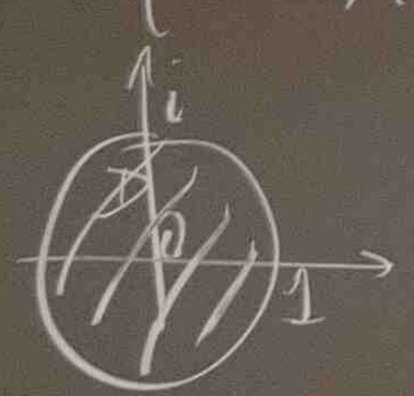
$z \xrightarrow{f_3} cz+d \xrightarrow{f_2} \frac{1}{cz+d}$

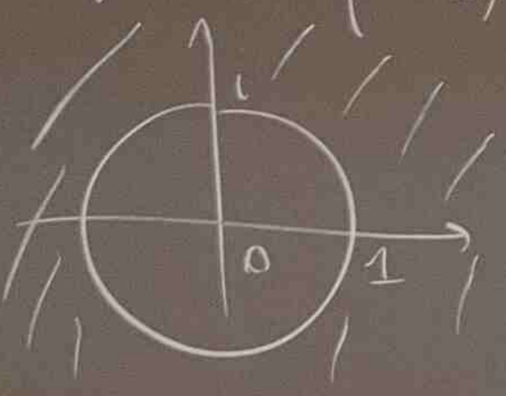
$\xrightarrow{f_1} \frac{bc-ad}{c} \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$

f transf les droites et cercles en $\frac{az+b}{cz+d}$

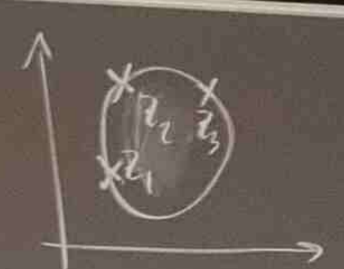
$f(z) = \frac{1}{z}$

$D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ $\quad f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad f(D) = D^* = \{z \in \mathbb{C} ; |z| > 1\}$

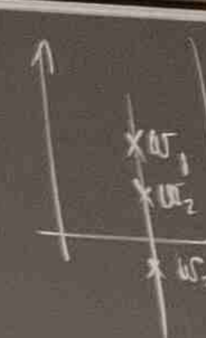




Les transf. de Moebius sont caract. par la donnée de 3 points différents z_1, z_2, z_3 et de 3 images w_1, w_2, w_3



$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$



$w_i = f(z_i)$ $\quad i = 1, 2, 3$

Dem. $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on a (dem ex)

on veut dét. a, b, c, d

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} \frac{w_2 - w_3}{w - w_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

$$(w - w_1)(z - z_3) \underbrace{\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}}_{\beta \text{ connu}} = (w - w_3)(z - z_1) \underbrace{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}}_{\text{connu } \alpha}$$

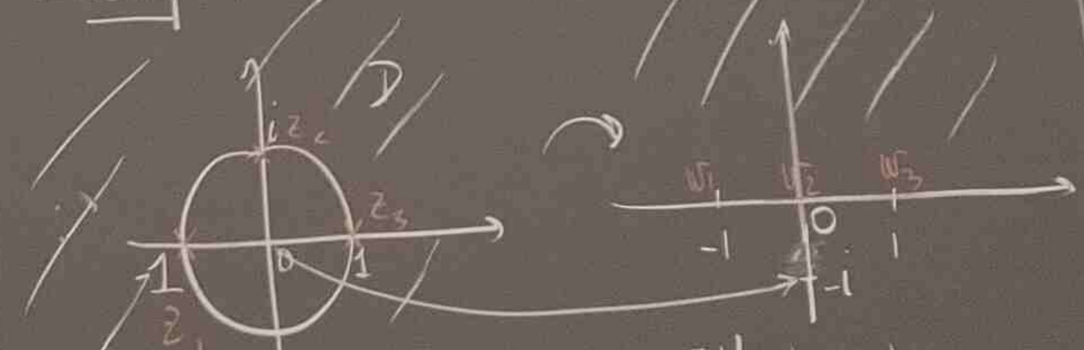
$$(f(z) - w_1)(z - z_3)\beta = (f(z) - w_3)(z - z_1)\alpha$$

$$f(z)\big((z - z_3)\beta - (z - z_1)\alpha\big) = w_1(z - z_3)\beta - w_3(z - z_1)\alpha$$

$$f(z)\Big(\underbrace{(\beta - \alpha)}_{c} z \underbrace{- z_3\beta + z_1\alpha}_{d}\Big) = \underbrace{(w_1\beta - w_3\alpha)}_{a} z \underbrace{- w_1 z_3 \beta + w_3 z_1 \alpha}_{b}$$

donc $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a = \ , b = \ , c = \ , d =$

Exemple:



On cherche $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de sorte que

$f(-1) = -1 \quad \to \frac{-a+b}{-c+d} = -1 \quad \to -a + b = c - d$

$f(i) = 0 \quad \to \frac{ai+b}{ci+d} = 0 \quad \to ai + b = 0 \quad (b = -ai)$

$f(1) = 1 \quad \to \frac{a+b}{c+d} = 1 \quad \to a + b = c + d$

et donc $2b = 2c$ $(b = c)$

$2a = 2d$ $(a = d)$

donc $f(z) = \frac{a(z-i)}{a(-iz+1)} = \frac{z-i}{-iz+1}$

$f(0) =$


donc f(z) = (az+b)/(cz+d) avec a= , b= , c= , d=
On cherche f(z) = (az+b)/(cz+d) de sorte que
z = αi |α| > 1
f(z) = (α-1)/(α+1) i
Remarque:
Thm de Riemann
Soit Ω ≠ ℂ simplement connexe, il existe une appl. conforme de Ω vers le disque unité {z ∈ ℂ ; |z|<1}
B

Chap 13. transf. conformes

$f : D \to f(D) = D^*$ conforme

* holomorphe
* bijective

$f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$

$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad ad-bc \neq 0$

$c = 0 \quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$c \neq 0 \quad f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$

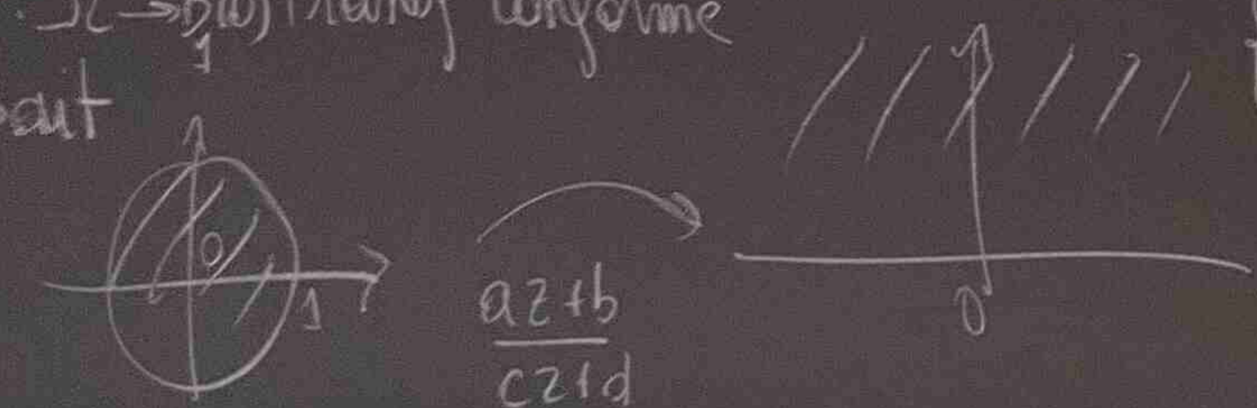
cercle et droites en cercles ou droites

$B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$

$\Omega \neq \mathbb{C}$ simplement connexe

il existe $f : \Omega \to B_1(0)$ transf. conforme

Puisqu'on sait



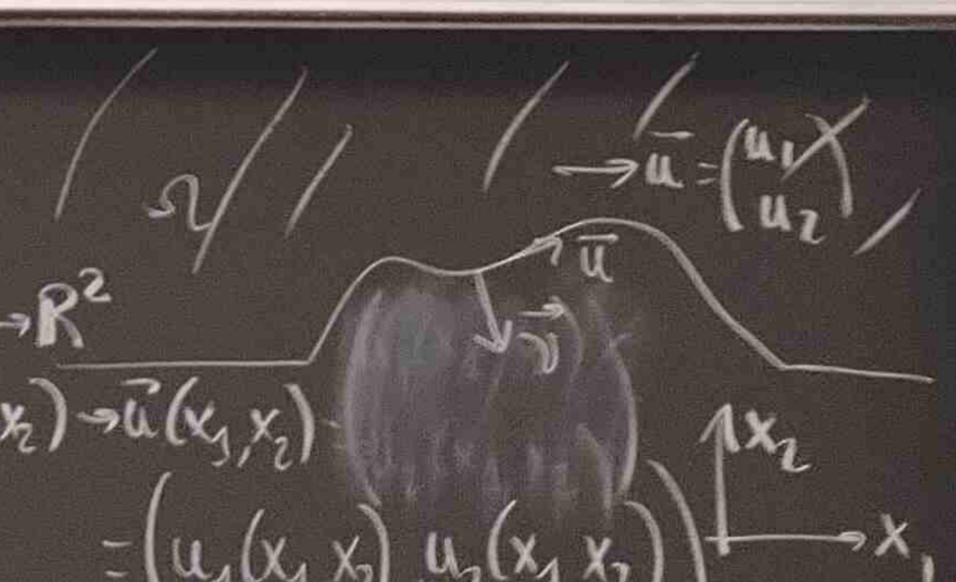
$\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}$

Application à la mécanique des fluides

Soit $\Omega \neq \mathbb{C}$ simplement connexe, on cherche $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2) \to \vec{u}(x_1,x_2) = (u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2))$

et $p : \Omega \to \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \to p(x_1,x_2)$ tels que



Eq. Euler incompressible
$$\begin{cases} \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p = 0 \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \qquad \rho > 0$$

ie
$$\begin{cases} \rho(u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1) + \partial_1 p = 0 \\ \rho(u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2) + \partial_2 p = 0 \end{cases} \quad (1)$$
$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0 \quad (2)$$

Si rot $\vec{u} = 0 = (\partial_2 \ldots$

(1) devient $\nabla(p \ldots$

donc
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \end{cases}$$
on cherche $\vec{u}$ tq

$f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \ldots$

et les cond. de ...
sont satisfai...

et donc pui...

Si $\operatorname{rot} \vec{u} = 0 = \left(\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2\right)$ alors

(1) devient $\nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho\, \vec{u}\cdot\vec{u}\right) = 0$ (exercice)

donc, on cherche $\vec{u}$ tq
$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{u} = 0 & \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \Omega \\ \vec{u}\cdot\vec{\nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Dans la suite on note $\vec{u}(x,y) = \left(u(x,y), v(x,y)\right)$

Puisque $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$, on cherche ϕ (potentiel) tel que $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ ($\operatorname{rot}\vec{\nabla}\phi = 0$)

on a donc

$$\operatorname{div}\vec{u} = \operatorname{div}\vec{\nabla}\phi = 0 \text{ dans } \Omega$$

ie
$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \\ \text{et } \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$z \to f(z)$

$x+iy \to \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

(on avait noté $f = u + iv$)

ϕ : potentiel ($\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$)

ψ : fonction courant (stream)

On suppose f holomorphe et donc

$$f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)$$

et les cond. de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

et donc puisque $\vec{u} = \nabla\phi$ $\left(u = \frac{\partial\phi}{\partial x},\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$

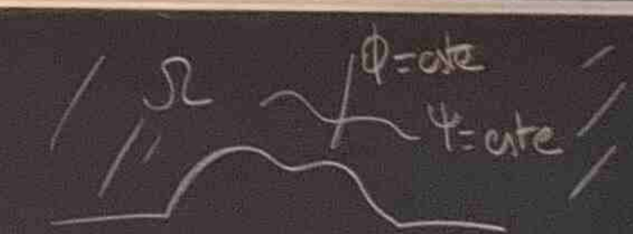
$$f'(z) = u(x,y) - iv(x,y)$$

De plus $\Delta\phi = \Delta\psi = \nabla\phi\cdot\nabla\psi = 0$

En effet

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

$$\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}}_{-\frac{\partial\psi}{\partial x}}\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial y}}_{\frac{\partial\phi}{\partial x}} = 0$$



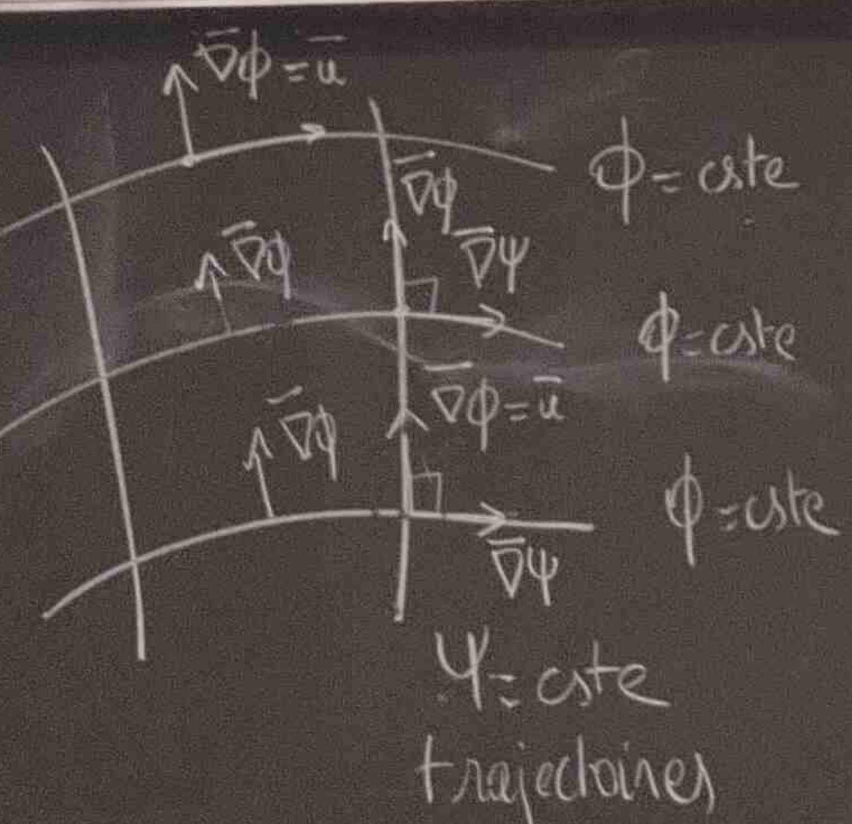
Equipotentielles : x,y tels que $\phi(x,y) = \text{cste}$

Soit $x(t)$ et $y(t)$ une param. de ces lignes

$$\phi(x(t),y(t)) = \text{cste}$$

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t),y(t)) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t) = 0$$



Lignes de courant (streamlines) :

x,y tels que $\psi(x,y) = \text{cste}$

Soit $x(t), y(t)$ une param de ces lignes on a

$$\psi(x(t),y(t)) = \text{cste}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t) = 0$$

Trajectoires des particules fluides :

$x(t)$ et $y(t)$ telles que $\vec{X}'(t) = \vec{u}(\vec{X}(t))$ t temps

i.e.
$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t),y(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t),y(t)) \\ y'(t) = v(x(t),y(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t),y(t)) \end{cases}$$

et donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)(x(t),y(t)) = 0 \quad \text{car } \nabla\phi\cdot\nabla\psi = 0$$

Donc l…
avec
Exem…

Donc les trajectoires des part. fluides coïncident avec les lignes de courant

Exemples:

$f(z) = z^n$ n entier ≥ 1 f holomorphe dans $\mathbb{C}$

$f'(z) = n z^{n-1}$

- $n = 1$ $f(z) = z = x + iy$ $\phi(x,y) = x$ $\Psi(x,y) = y$

  $f'(z) = 1$ $u(x,y) = 1$ $v(x,y) = 0$

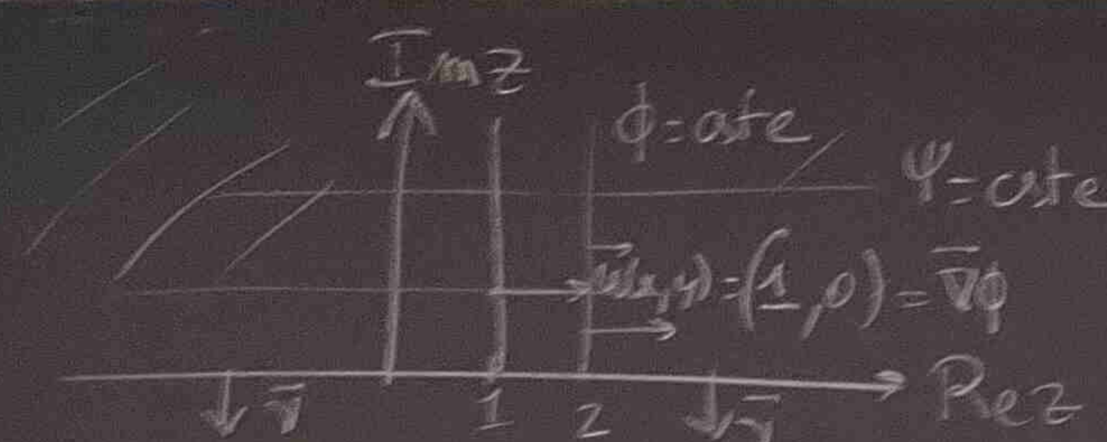
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$u_1(x_1, x_2, x_3)$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0)$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$



Ψ = cste, trajectoire, ligne de courant

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}\, z > 0\}$

Ecoulement uniforme

$\Psi(x,y) = y$ = cste ligne horiz

$\phi(x,y) = x$ = cste — verticales

On a bien $\Delta\phi = 0$ et $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$

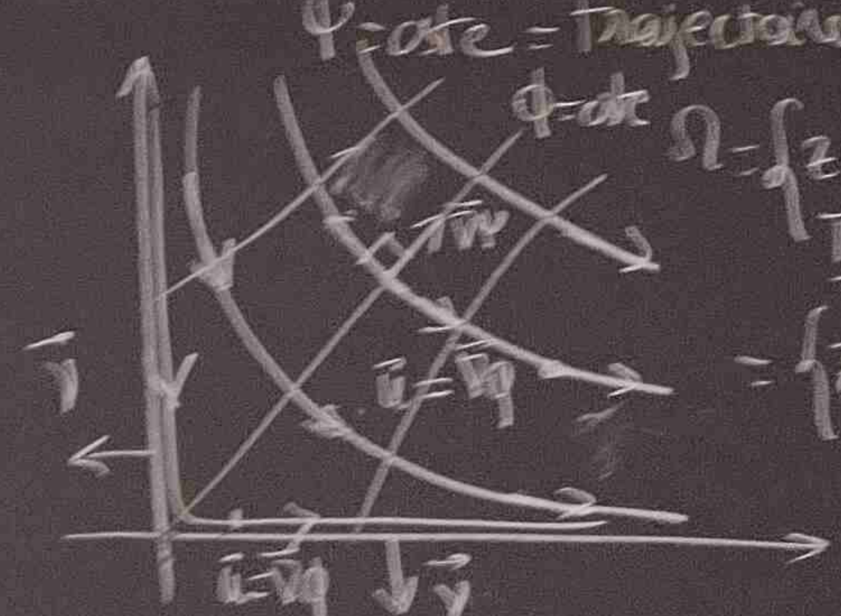
- $n = 2$ $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

  $\phi(x,y) = x^2 - y^2$ $\Psi(x,y) = 2xy$

  $f'(z) = 2z = 2x + i\,2y$

  $u(x,y) = 2x$ $v(x,y) = -2y$

Ψ = cste = trajectoires



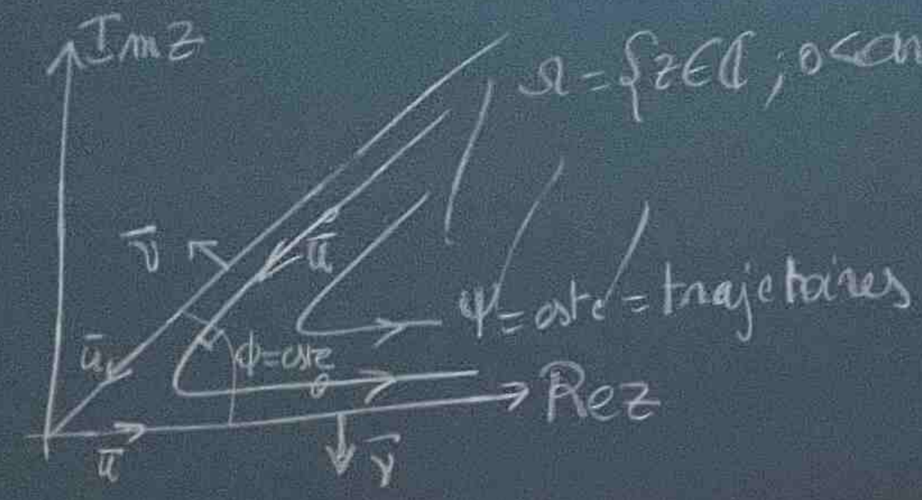
$\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \text{Re}\, z > 0, \text{Im}\, z > 0\}$

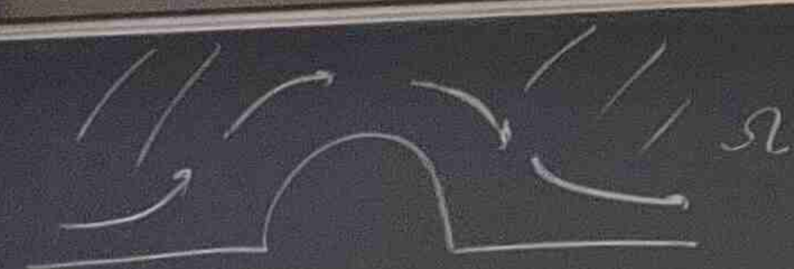
$= \{z \in \mathbb{C} ; 0 < \arg z < \pi/2\}$

On a bien $\vec{u} \cdot \vec{\nu} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nu} = 0$

on = 4

$\Omega = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$

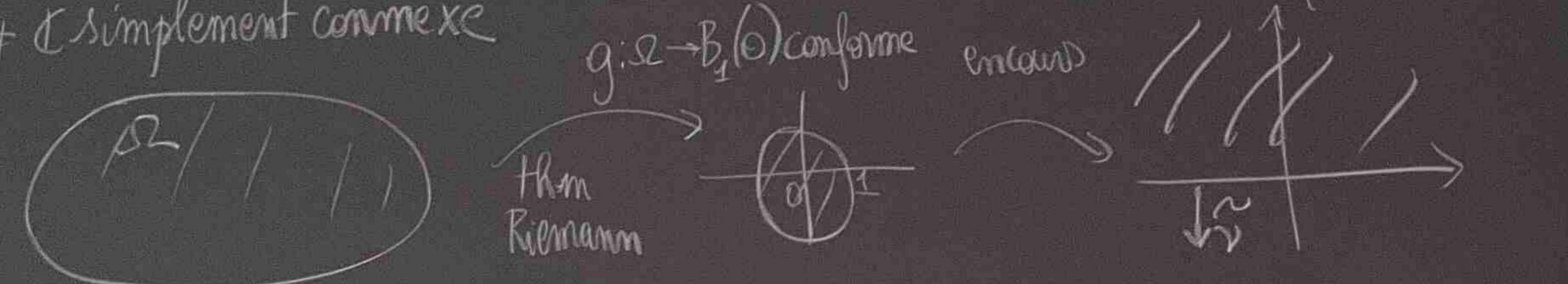




Ecoulement ?

Pour $\Omega \neq \mathbb{C}$ simplement connexe

$D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im} z > 0\}$



On sait qu'il existe $g : \Omega \to D$ conforme

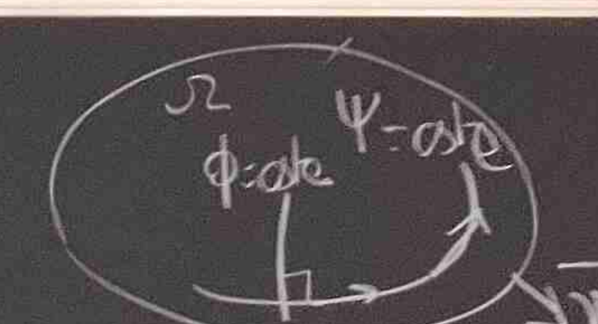
Soit $\tilde{f} : D \to D$ holomorphe

$$\tilde{f}(z) = \tilde{\phi}(x,y) + i\,\tilde{\Psi}(x,y)$$

$$\Delta \tilde{\phi} = 0$$

$\tilde{f}$ est telle que $\vec{\nabla}\tilde{\phi} \cdot \tilde{\nu} = 0$ sur ∂D

(C'est le cas de l'éc. uniforme $\tilde{f}(z) = z$)



On cherche $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tq $\Delta\phi = 0$ Ω

$\nabla\phi \cdot \bar{\nu} = 0$ $\partial\Omega$

On pose $f(z) = \tilde{f}(g(z))$ (i.e $f = \tilde{f} \circ g$)

f est holomorphe $f = \phi + i\Psi$

$\Delta\phi = 0$ dans Ω

et $\vec{\nabla}\phi \cdot \bar{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ si f est conforme

Si rot $\bar{u} = 0$ =

(1) devient ∇

donc { rot $\bar{u}$ = 0 ; div $\bar{u}$ = ; $\bar{u} \cdot \bar{\nu}$ = 0

on cherche $\bar{u}$ tq

$f'(z) =$

et les cond. sont satis

et donc

Ex:

Ω

1

... $u = \nabla\varphi \quad \left(u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

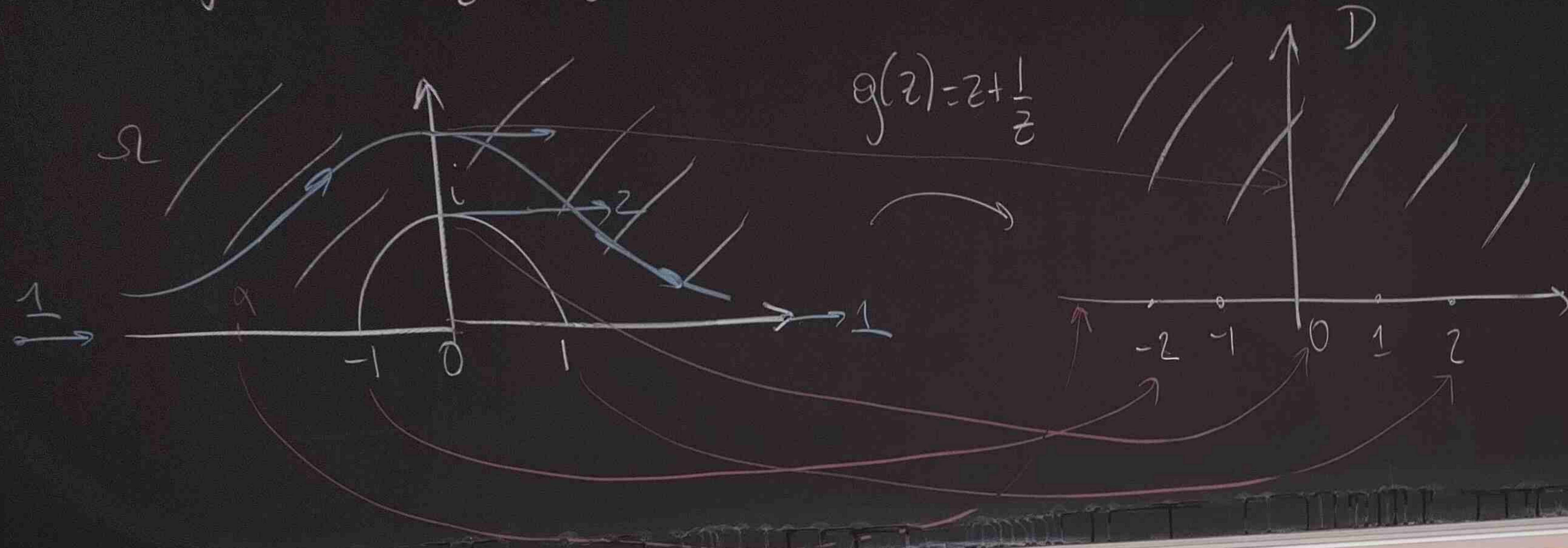
$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$

$\qquad -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}$

$\frac{d}{dt}\,\phi(x(t),y(t)) = 0$

$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t) = 0$

Ex: $g(z) = z + \frac{1}{z} \qquad \tilde{f}(z) = z$ (Joukovski)



$f(z) = \tilde{f}(g(z)) = g(z)$

$g(-1) = -2 \quad g(i) = 0 \quad g(1) = 2$

$g(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha| > 1$

$g(i\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) i \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

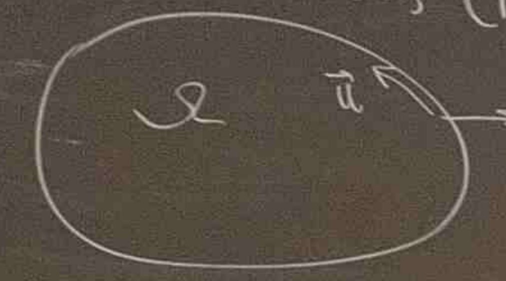
$f'(z) = u(x,y) - i v(x,y) \quad u(x,y) = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad v(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $u(x,y)$, $v(x,y)$

$\rho(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{0}$ (1)

$\text{div}\,\vec{u} = 0$ (2)

si $\text{rot}\,\vec{u} = 0$ alors (1) s'écrit $\nabla(p + \frac{1}{2}\rho\vec{u}.\vec{u}) = 0$



On cherche $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tq

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{u} = 0 & \Omega \\ \text{div}\,\vec{u} = 0 & \Omega \\ \vec{u}.\vec{\nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ (rot grad ϕ) $\phi(x,y)$

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \Omega \\ \vec{\nabla}\phi.\vec{\nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$

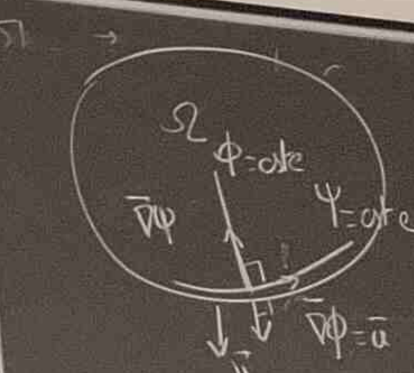
$z \to f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$
$= x+iy$

Si f holomorphe ($\phi, \psi \in C^1$ et $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$)

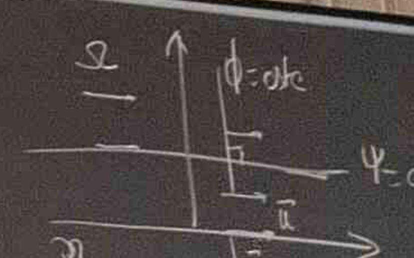
$f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)$

$= u(x,y) - iv(x,y)$

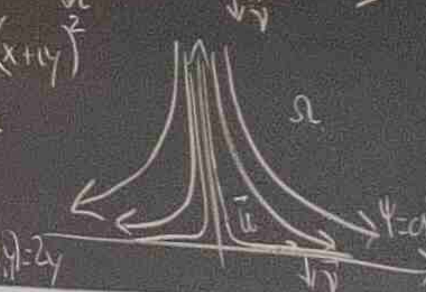
De plus $\Delta\phi = 0 = \Delta\psi = \nabla\psi.\nabla\phi$

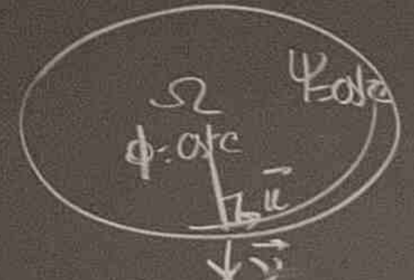


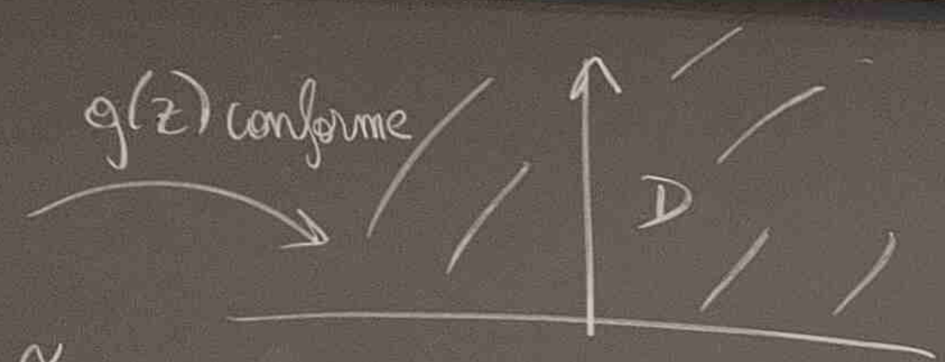
$f(z) = z$
$f'(z) = 1$
$u(x,y) = 1$
$v(x,y) = 0$



$f(z) = z^2 = (x+iy)^2$
$f'(z) = 2z$
$\phi(x,y) = x^2 - y^2$
$\psi(x,y) = 2xy$
$u(x,y) = 2x$ $v(x,y) = 2y$







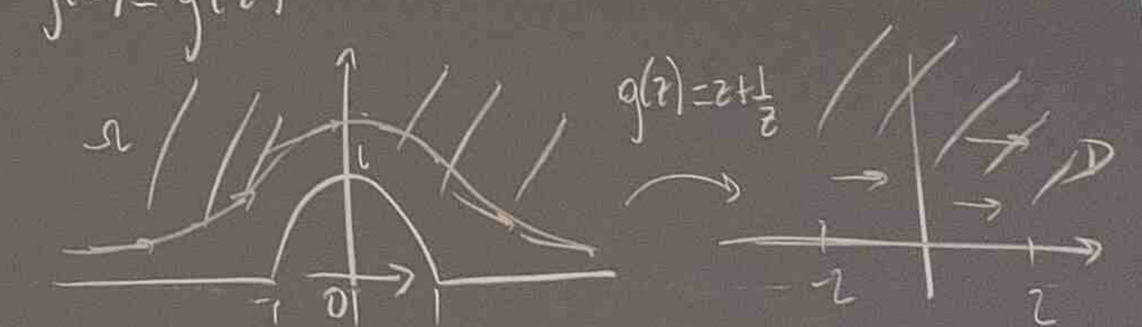
Soit $\tilde{f} : D \to D$

$z \to \tilde{f}(z)$ holomorphe ($\tilde{f}(z) = z$, $\tilde{f}(z) = z^2$)

Donc $f = \tilde{f} \circ g$ ($f(z) = \tilde{f}(g(z))$) $f : \Omega \to D$ holomorphe

$\tilde{f}(z) = z$

$f(z) = g(z)$



$\tilde{f}(z) = z$

$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x+iy}$

$= x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

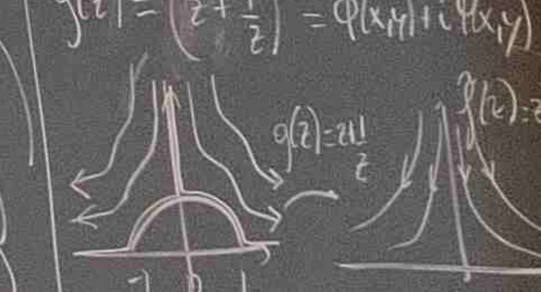
$= \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$

$f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)$

$= u(x,y) - iv(x,y)$

$\tilde{f}(z) = z^2$

$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

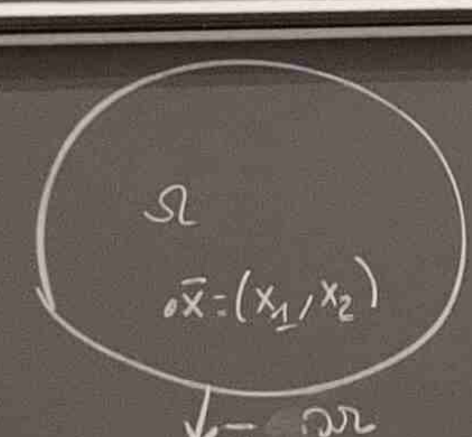


Chap 99 _ Méthode variationnelle _ Ritz-Galerkin

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ donné

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que



$$\begin{cases} -\Delta u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) & \forall (x_1,x_2) \in \Omega \\ u(x_1,x_2) = 0 & \forall (x_1,x_2) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

On a : $\iint_\Omega \vec{\nabla}u(x_1,x_2).\vec{\nabla}v(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f(x_1,x_2)v(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$

$\forall v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $v(x_1,x_2) = 0$ sur $\partial\Omega$

qu'on notera $\iint_\Omega \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v\,dx = \iint_\Omega fv\,dx$.

En effet, multiplions (1) par $v(x_1,x_2)$ et $\iint_\Omega dx_1 dx_2$

$\iint_\Omega -\Delta u\,v\,dx = \iint_\Omega fv\,dx$

$\iint_\Omega \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v\,dx - \int_{\partial\Omega} \text{div}(v\vec{\nabla}u)\,dx$

$= \iint_\Omega fv\,dx$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\text{div}(f\vec{F}) = f\,\text{div}\,\vec{F} + \vec{F}.\vec{\nabla}f$

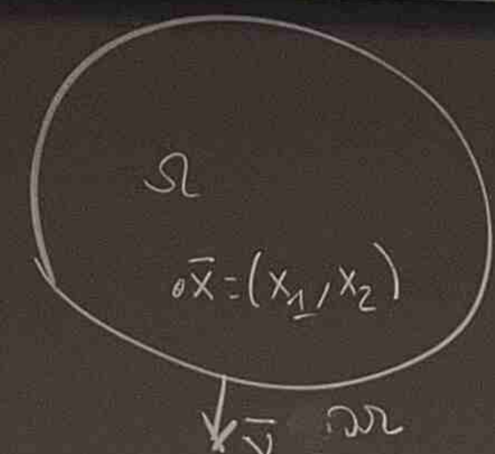
ici $\Delta u = \text{div}\,\vec{\nabla}u$ ($\vec{F}$)
$v = f$

Chap 99 Méthode variationnelle — Ritz-Galerkin

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ donné

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que



$$\begin{cases} -\Delta u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) & \forall (x_1,x_2) \in \Omega \\ u(x_1,x_2) = 0 & \forall (x_1,x_2) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

On a : $\iint_\Omega \vec{\nabla} u(x_1,x_2) \cdot \vec{\nabla} v(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_\Omega f(x_1,x_2) v(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$

$\forall v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $v(x_1,x_2) = 0$ sur $\partial\Omega$

qu'on notera $\iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, dx = \iint_\Omega f v\, dx$. (2)

En effet, multiplions (1) par $v(x_1,x_2)$ et $\iint_\Omega dx_1 dx_2$

$\iint_\Omega -\Delta u\, v\, dx = \iint_\Omega f v\, dx$

$\iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, dx - \iint_\Omega \mathrm{div}(v \vec{\nabla} u)\, dx = \iint_\Omega f v\, dx$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{div}(f\vec{F}) = f \,\mathrm{div}\,\vec{F} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla} f$

ici $\Delta u = \mathrm{div}\, \vec{\nabla} u$ ($\vec{F}$), $v = f$

$$\iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, dx - \int_{\partial\Omega} v \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}\, ds = \iint_\Omega f v\, dx$$

Si on choisit v tq $v = 0$ $\partial\Omega$ on obtient (2)

On écrit

On cherche $u \in V$ tq $\iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, dx = \iint_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in V$ (3)

(3) : formulation variationnelle

où $V = \{ v : \Omega \to \mathbb{R} ;\ \iint_\Omega (v(x))^2 dx < +\infty ;\ \iint_\Omega \|\vec{\nabla} v(x)\|^2 dx < +\infty,\ v = 0\ \partial\Omega \}$

Remarques :

- V espace vectoriel normé complet (Hilbert)
  produit scalaire $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$

$\langle f, g \rangle = \iint_\Omega f(x) g(x)\, dx$ pdt scalaire

induit norme $\langle f, f \rangle = \|f\|^2 = \iint_\Omega (f(x))^2 dx$

ineg. Cauchy Schwarz : $\langle f, g \rangle \leq (\langle f, f \rangle)^{1/2} (\langle g, g \rangle)^{1/2}$

$$\iint_\Omega f(x) g(x)\, dx \leq \left(\iint_\Omega (f(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\iint_\Omega (g(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tq $\iint_\Omega (f(x))^2 dx < +\infty$ alors toutes les $\iint_\Omega$ dans (3) ont un sens

- $\dim V = +\infty$

Ritz-Galerkin

Etant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$

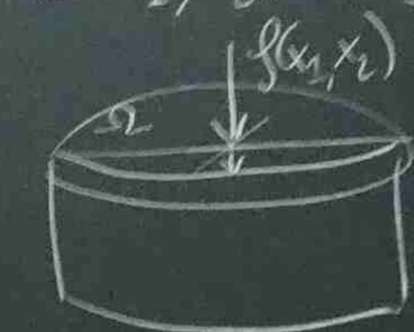
$f : \Omega \to \mathbb{R}$
$\vec{x} \to f(\vec{x})$
$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2)$

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = 0 \quad \text{——} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Delta u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)$$



membrane élastique (tambour)

Multiplié par $v : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\iint_\Omega dx_1 dx_2$, on cherche

$$\nabla u . \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}$$

$$(2) \quad u \in V \text{ telle que } \iint_\Omega \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v \, dx = \iint_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V$$

(Formulation variationnelle)

$$V = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ telle que } \iint_\Omega v^2 dx < +\infty \text{ et } \iint_\Omega \|\vec{\nabla} v\|^2 dx < +\infty \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

Remarques:

- $\langle f, g \rangle = \iint_\Omega f(x) g(x) dx$
- $\dim V = +\infty$
- Si on choisit $v = u$ dans (2), on obtient : $\underbrace{\iint_\Omega \|\vec{\nabla} u\|^2 dx}_{\text{énergie de déformation}} = \underbrace{\iint_\Omega f u \, dx}_{\text{travail des forces}}$

- Soit $u \in V$ tel que $J(u) \leq J(v)\ \forall v \in V$ (3)

où $J(v) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \|\nabla v\|^2 dx - \iint_\Omega f v\, dx$ (énergie)

Si u est solution de (2) alors u est solution de (3) (la réciproque est vraie)

En effet $\forall v \in V$ on a

$J(v) = J(u + v - u) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \|\nabla(u+v-u)\|^2 dx - \iint_\Omega f(u+v-u)\, dx$

$\|\nabla(u+v-u)\|^2 = \nabla(u+v-u)\cdot\nabla(u+v-u) = \|\nabla u\|^2 + 2\nabla u\cdot\nabla(v-u) + \|\nabla(v-u)\|^2$

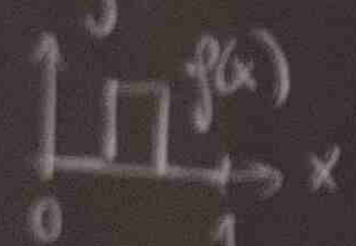
$J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}\iint_\Omega \|\nabla u\|^2 dx - \iint_\Omega f u\, dx}_{J(u)} + \underbrace{\iint_\Omega \nabla u\cdot\nabla(v-u)\,dx - \iint_\Omega f(v-u)\,dx}_{=0 \text{ car } u \text{ sol de } (2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\iint_\Omega \|\nabla(v-u)\|^2 dx}_{\geq 0}$

On a bien $J(v) \geq J(u)\ \forall v \in V$ (qui est (3))

- Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sol de (1) alors u est sol de (2)

Il existe des u sol de (2) qui ne sont pas $C^2(\overline{\Omega})$ (par exemple si f est discontinue)

$\Omega = (0,1)$



Méthode de Galerkin

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V

On note V_N le sous espace vect. engendré par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$

V_N l'ens. des combinaisons linéaires de $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$

$V_N = \text{vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ $\dim V_N = N$

$\dim V = +\infty$

$V_N \subset V$ $\dim V_N = N$

$u_N \xrightarrow{N\to\infty} u$?

On cherche $u_N \in V_N$ telle que $\iint_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla v_N\, dx = \iint_\Omega f v_N\, dx$ $\forall v_N \in V_N$ (4)

Trouver u_N sol. de (4) est équivalent à résoudre un syst. lin $N \times N$. En effet.

$u_N \in V_N$: $u_N(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(\vec{x})$ $\forall \vec{x} \in \Omega$ $u_1, u_2, \ldots, u_N \in \mathbb{R}$ inconnues

N équations : $v_N(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$ $i = 1, \ldots, N$ on insère dans (4) $\left(\nabla u_N(\vec{x}) = \left(\frac{\partial u_N}{\partial x_1}(x_1,x_2), \frac{\partial u_N}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right) = \sum_{j=1}^{N} u_j \nabla\varphi_j(\vec{x})\right)$

et on obtient :

$$\iint_\Omega \sum_{j=1}^N u_j \vec\nabla\varphi_j(\vec x)\cdot\vec\nabla\varphi_i(\vec x)\,dx = \iint_\Omega f(\vec x)\varphi_i(\vec x)\,dx \qquad i=1,\dots,N$$

$$\sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\iint_\Omega \vec\nabla\varphi_j(\vec x)\cdot\vec\nabla\varphi_i(\vec x)\,dx}_{A_{ij}} = \underbrace{\iint_\Omega f(\vec x)\varphi_i(\vec x)\,dx}_{f_i}$$

$$\sum_{j=1}^N u_j A_{ij} = f_i \qquad i=1,\dots,N$$

$$\left(A\vec u = \vec f\right)_i \qquad i=1,\dots,N$$

Cond: trouver u_N sol de (4) est équivalent à résoudre le syst. lin. $A\vec u = \vec f$

la matrice A est symmétrique définie positive, donc inversible

(rappel: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ s.d.p : $\forall \vec v\in\mathbb{R}^N$ $\quad \vec v^T A\vec v \geq 0$, $\quad \vec v^T A\vec v = 0 \Leftrightarrow \vec v=\vec 0$)

$\vec v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$ $\quad A\vec v = [\;A\;][\;\vec v\;] = [\;\;]$

$\vec v^T A\vec v = [v_1 \dots v_N]\,[A\vec v]$

$$\langle \vec v, A\vec v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i (A\vec v)_i = \sum_{i=1}^N v_i \sum_{j=1}^N A_{ij}v_j = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N A_{ij}v_iv_j$$

A inversible : Ker A $= \vec 0$: $A\vec v=\vec 0 \Rightarrow \vec v = 0$

Si A est s.d.p alors Ker A $=\vec 0$, en effet

$A\vec v=\vec 0 \Rightarrow \langle\vec v, A\vec v\rangle = 0 \Rightarrow \vec v = \vec 0$

En effet $\forall \vec v\in\mathbb{R}^N$, $\quad \vec v^T A\vec v = \langle\vec v,A\vec v\rangle = \sum_{i,j=1}^N A_{ij}v_iv_j \qquad A_{ij} = \iint_\Omega \vec\nabla\varphi_i\cdot\vec\nabla\varphi_j\,dx$

$$= \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N v_iv_j\iint_\Omega \vec\nabla\varphi_i\cdot\vec\nabla\varphi_j\,dx$$

$$= \iint_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N v_iv_j\,\vec\nabla\varphi_i\cdot\vec\nabla\varphi_j\,dx$$

$$= \iint_\Omega \left(\sum_{i=1}^N v_i\vec\nabla\varphi_i(\vec x)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^N v_j\vec\nabla\varphi_j(\vec x)\,dx\right)dx$$

Soit $v_N(\vec x) = \sum_{i=1}^N v_i\varphi_i(\vec x)$

$\vec\nabla v_N(\vec x) = \sum_{i=1}^N v_i\vec\nabla\varphi_i(\vec x)$

Donc $\langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle = \iint_\Omega \|\vec{\nabla} v_N(\vec{x})\|^2 dx \geq 0$

De plus $\langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle = 0 \iff \|\vec{\nabla} v_N(\vec{x})\| = 0 \iff \vec{\nabla} v_N(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in \bar{\Omega}$

$\iff v_N(\vec{x}) = \text{cste} \ \forall \vec{x} \in \bar{\Omega}$

mais $v_N(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega$ et donc $v_N(x) = 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$

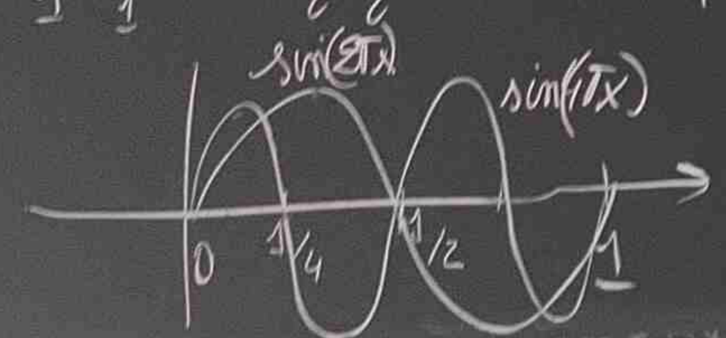
$v_N(x) = 0 = \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i(\vec{x}) \overset{\varphi_i \text{ lin. indep}}{\Longrightarrow} v_i = 0 \ i = 1, .., N$

On peut étendre cette méthode au cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Dans le cas $d = 1$, on peut faire les calculs à la main : $\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$

Par ex $\Omega =]0,1[$ $\quad \varphi_i(x) = \sin(i\pi x) \quad i = 1, .., N$ lin. indep $\subset V = \{ v :]0,1[\to \mathbb{R}, \int_0^1 (v(x))^2 dx < +\infty, \int_0^1 (v'(x))^2 dx < +\infty, v(0) = v(1) = 0 \}$

$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) = 0 = \alpha_1 \sin(\pi x) + \alpha_2 \sin(2\pi x) \quad \forall x \in]0,1[$



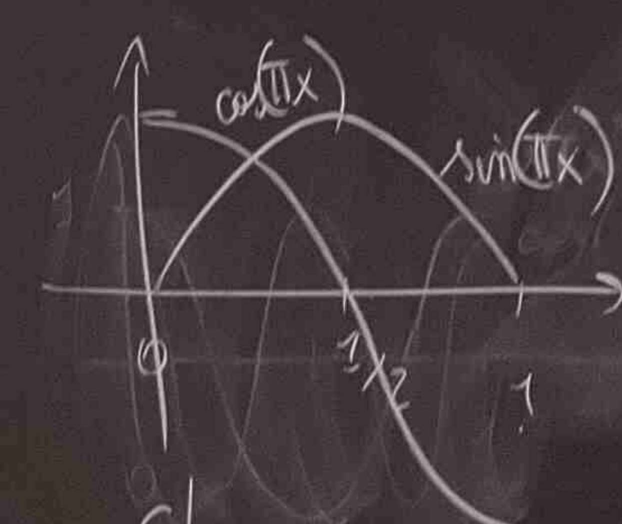
$x = \frac{1}{4}$: $\alpha_1 \sin \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$x = \frac{1}{8}$: $\alpha_2 = 0$

$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \qquad \varphi_i(x) = \sin(i\pi x) \qquad i,j = 1, \dots, N$

$\varphi_i'(x) = i\pi \cos(i\pi x)$

$= ij\pi^2 \underbrace{\int_0^1 \cos(i\pi x)\cos(j\pi x) dx}_{= 0 \text{ si } i \neq j}$



Si $i = j$ $\int_0^1 \left(\cos^2(i\pi x) + \sin^2(i\pi x)\right) dx = 1 \qquad \int_0^1 \cos^2(i\pi x) dx = \int_0^1 \sin^2(i\pi x) dx = 1/2$

• Soit $u \in V$ tel ...
où $J(v) = \frac{1}{2}$ ...

Si u est solu...
(la récipro...

On a bien
• Si $u \in \mathcal{C}^2$ ...
Il exist...
$\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}$ ...

Retou...
i.e. l...

$V_N = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \quad \dim V_N = N$

Retour au syst. lin $A\vec{u} = \vec{f}$

i^e ligne $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} u_j A_{ij} = f_i = \underbrace{\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)\,dx}_{\text{calculable}} \quad i = 1, \dots, N$

$u_i A_{ii} = f_i$

$u_i \dfrac{i^2\pi^2}{2} = f_i$

$u_i = \dfrac{2f_i}{i^2\pi^2}$

par exemple si $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$, $u(x) = \sin(\pi x)$

$f_i = \displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(i\pi x)\,dx = \int_0^1 \pi^2 \sin(\pi x)\sin(i\pi x)\,dx$

$= \pi^2 \displaystyle\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \pi^2/2$ si $i = 1$

$= 0 \quad i = 2, \dots, N$

Donc $u_1 = \dfrac{2f_1}{\pi^2} = 1$ et $u_i = 0 \quad i = 2, \dots, N \quad u(x) = \sin(\pi x)$

Séries de Fourier

Méthode de Galerkin

(1) $\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) & (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, x_2) = 0 & (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{cases}$

(2) $u \in V \quad \iint_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx = \iint_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V$

$V = \{ v : \Omega \to \mathbb{R}, \iint_\Omega v^2 dx < +\infty, \iint_\Omega \|\vec{\nabla} v\|^2 dx < +\infty, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$

La solution de (2) si elle existe, est unique. En effet, soient u_1 et u_2 2 solutions de (1), on a :

$\iint_\Omega \vec{\nabla}(u_1 - u_2) \cdot \vec{\nabla} v \, dx = 0 \quad \forall v \in V$

On choisit $v = u_1 - u_2$:

$\iint_\Omega \|\vec{\nabla}(u_1 - u_2)\|^2 dx = 0$

et donc $\|\vec{\nabla}(u_1 - u_2)\| = 0$ ie $\vec{\nabla}(u_1 - u_2) = 0$

$u_1 - u_2 = \text{cst}$ mais $u_1 - u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $u_1 - u_2 = 0$ dans Ω

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in V$ lin. indep.

$V_N = \text{vect}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ $\dim V_N = N$

$V_N \subset V$

(3) $u_N \in V_N \quad \iint_\Omega \vec{\nabla} u_N \cdot \vec{\nabla} v_N \, dx = \iint_\Omega f v_N \, dx \quad \forall v_N \in V_N$

$u_N(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x_1, x_2) \quad u_j \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$

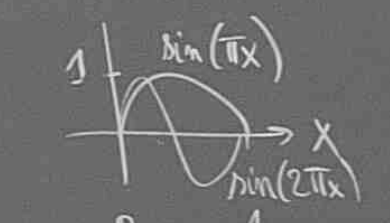
$A \vec{u} = \vec{f} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$

$f_i = \iint_\Omega f(x_1, x_2) \varphi_i(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2$

$A_{ij} = \iint_\Omega \vec{\nabla}\varphi_i(x_1, x_2) \cdot \vec{\nabla}\varphi_j(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 \quad i, j = 1, \dots, N$

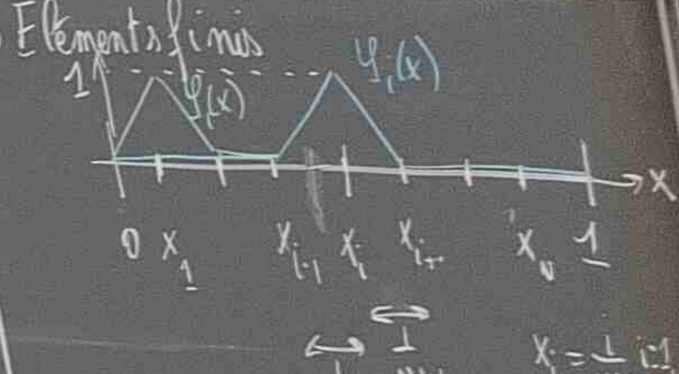
Ex : $\Omega =]0,1[\quad \iint_\Omega dx_1 dx_2 \to \int_0^1 dx$

- $\varphi_i(x) = \sin(i\pi x) \quad 0 < x < 1$



Series de Fourier

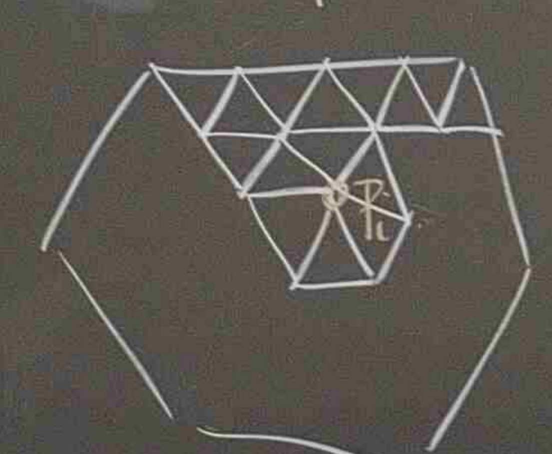
- Eléments finis



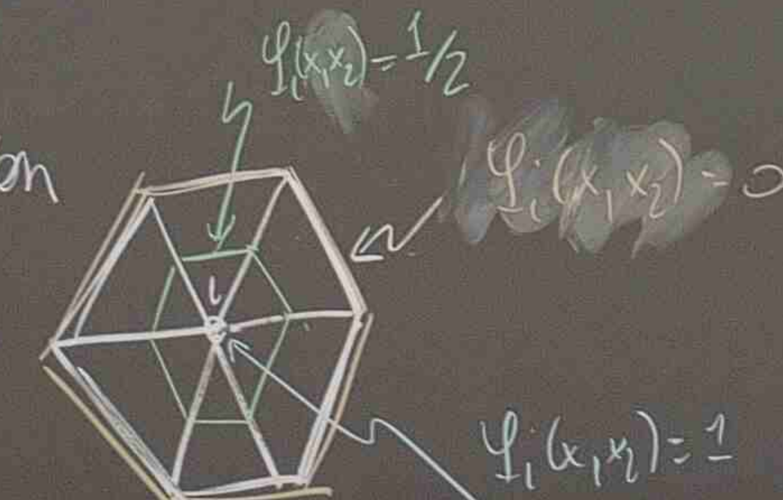
$\frac{1}{N+1}$ $\frac{1}{N+1}$ $x_i = \frac{i}{N+1}$ $i = 1, \dots, N$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ polygone

triangulation

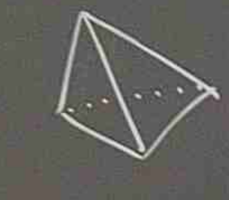


Zoom



$\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Δ triangle $\to$ tetraèdre



- $\Omega =]0,1[\quad \varphi_i(x) = x^i(1-x)$

Exercice : $\varepsilon > 0 \quad \vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$

On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} u + u = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Formul. Variat. ?

$A\vec{u} = \vec{f} \quad f_i ? \quad A_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N ?$

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ on a

$\iint_\Omega (-\varepsilon \Delta u + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} u + u) v \, dx = \iint_\Omega f v \, dx$

diffusion ($-\varepsilon \Delta u$), convection ($\vec{a} \cdot \vec{\nabla} u$)

$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} u = a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$


Zoom
triangle
tetraèdre
Exercice:
On cherche u : Ω → ℝ telle que
convection
Galerkin:
Si v = 0 sur ∂Ω, on obtient la form. variat.
La sol, si elle existe, est unique
B

$\overline{\text{grad}}$ div $\overline{\text{rot}}$

$\overline{\nabla}$ $\overline{\nabla}\circ$ $\overline{\nabla}\wedge$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$(x_1 x_2 x_3) \to f(x_1, x_2, x_3)$

$$\overline{\text{grad}}\, f = \overline{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

$$\overline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$\overline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$

$$(x_1 x_2 x_3) \to \overline{F}(x_1, x_2, x_3) = \left(F_1(x_1 x_2 x_3), F_2(x_1 x_2 x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)\right)$$

$$\text{div}\, \overline{F} = \overline{\nabla}\circ\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

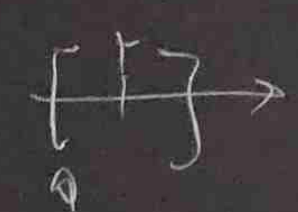
$(1,2,3) \to (2,3,1)$

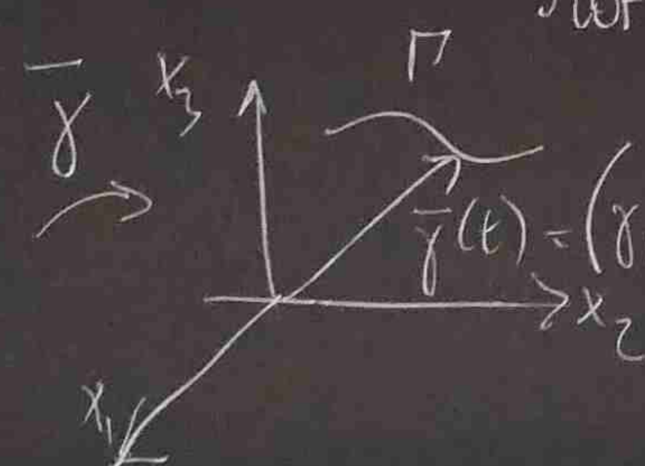
$$\overline{\text{rot}}\, \overline{F} = \overline{\nabla}\wedge\overline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = \left(F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), 0\right)$$

$$\overline{\text{rot}}\, \overline{F} = \Big(0, 0, \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}}_{\text{rot}\, \overline{F}(x_1, x_2)}\Big)$$

Courbes





$$\overline{\gamma}(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\right)$$

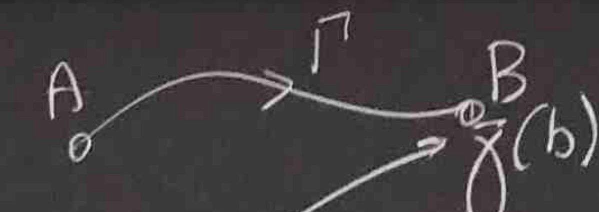
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

$$\int_\Gamma f\, dl = \int_a^b f(\overline{\gamma}(t))\, \underbrace{\|\overline{\gamma}'(t)\|}_{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2}}\, dt$$

$\overline{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^0$

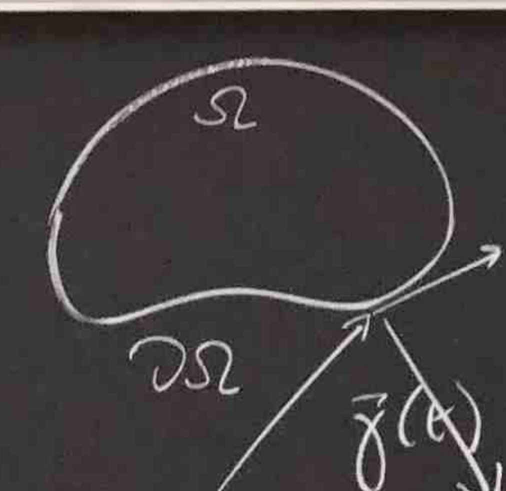
$$\int_\Gamma \overline{F}\circ\overline{dl} = \int_a^b \overline{F}(\overline{\gamma}(t))\circ\overline{\gamma}'(t)\, dt$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$



$$\int_\Gamma \overline{\text{grad}}\, f\circ\overline{dl} = f(B) - f(A)$$

$$\frac{d}{dt}\quad f(\overline{\gamma}(t)) = f\left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\right)$$



$$\overline{\gamma}'(t) = \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right)$$

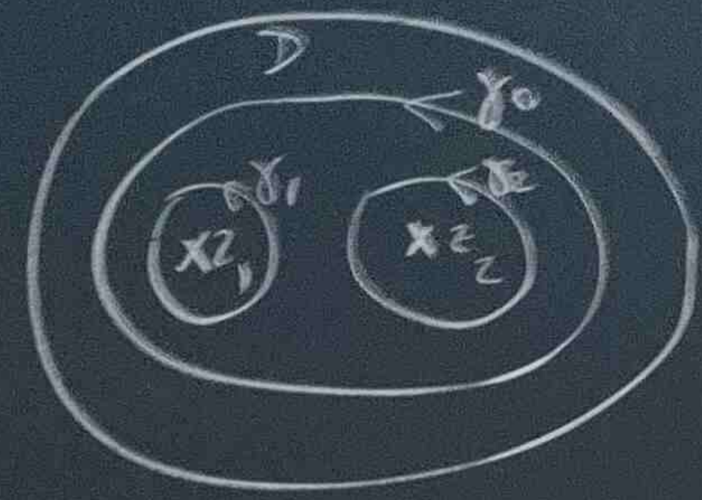
$$\overline{\nu}(t) = \frac{\left(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)\right)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_i\, dl \quad i = 1, 2$$

F : R² → R² C¹
∬ div F dx₁ dx₂ = ∫ F · ν dl
ν(u,v) = (∂σ/∂u ∧ ∂σ/∂v) / ‖∂σ/∂u ∧ ∂σ/∂v‖
f : R³ → R
∬ f ds = ∬ du dv (f(σ(u,v)) ‖∂σ/∂u ∧ ∂σ/∂v‖
F : R³ → R³
∬ F · ds = ∬ du dv (F(σ(u,v)) · (∂σ/∂u ∧ ∂σ/∂v)(u,v))
Stokes F : R³ → R³ C¹
∬ rot F · ds = ∫ F · dl
Divergence
Ω ⊂ R³
∂Ω surface fermée
ν norm. ext. unité
f : R³ → R C¹
∭ ∂f/∂xᵢ dx₁ dx₂ dx₃ = ∬ f νᵢ ds   i = 1,2,3
F : R³ → R C¹   ∭ div F dx₁ dx₂ dx₃ = ∬ F · ν ds
O ⊂ C → C
z → f(z)
x+iy → f(z) = u(x,y) + iv(x,y)
u, v : R² → R
f holomorphe ⟺ u, v C¹ ∂u/∂x = ∂v/∂y et ∂u/∂y = −∂v/∂x
lim z→z₀ (f(z) − f(z₀))/(z − z₀)
Im
Re
∫Γ f(z) dz = ∫γ f(z) dz = ∫ₐᵇ f(γ(t)) γ'(t) dt
pdt de 2 complexes
Thm Cauchy
D simpl. connexe
γ ⊂ D courbe simple régulière fermée, f holomorphe
∫γ f(z) dz = 0
f : D∖{z₁} holomorphe
γ₀ ⊂ D fermée z₁ ∈ int γ₀
γ₁ ⊂ int γ₀ fermée z₁ ∈ int γ₁
∫γ₀ f(z) dz = ∫γ₁ f(z) dz

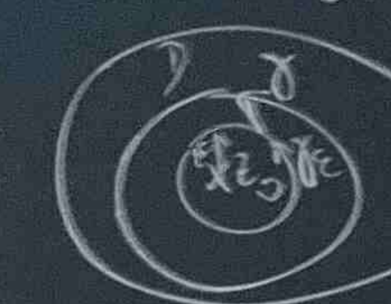
$f: D\setminus\{z_1,z_2\}$



$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$f: D\to\mathbb{C}$ holomorphe $z_0\in D$

$z\mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$ holomorphe $D\setminus\{z_0\}$



$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2\pi i f(z_0)$$

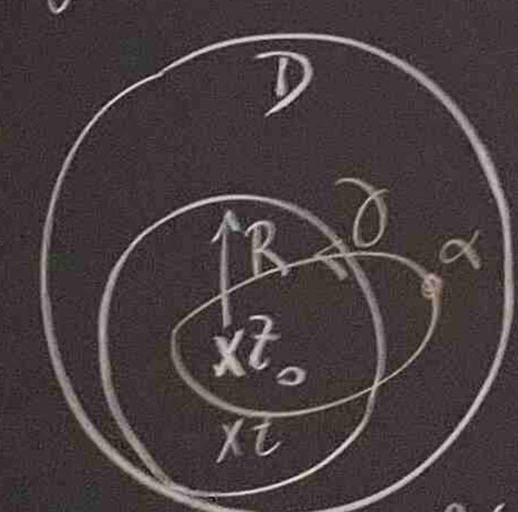
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}\,dz-\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right)$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} = 2\pi i\, f'(z_0)$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = 2\pi i\, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$f: D\to\mathbb{C}$ holomorphe, $z_0\in D$



R tq $B_R(z_0)\subset D$

$z\in B_R(z_0)$

alors

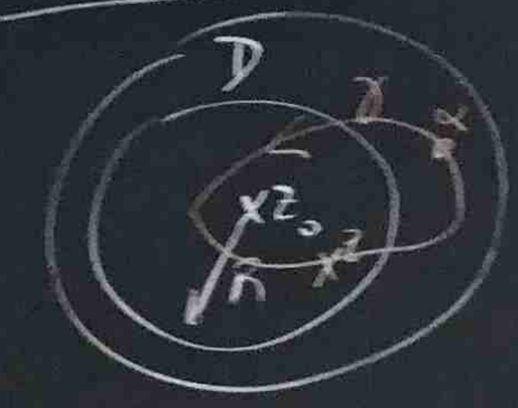
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{c_n}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n c_n$$

où $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}}\,d\alpha$

ici γ est une courbe simple reg fermée tq $z_0\in \text{int}\,\gamma$

Série de Laurent



$f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe

R tq $B_R(z_0) \subset D$

$z \in B_R(z_0)$ alors

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}}\, d\alpha$$

où γ est fermée $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\alpha)\, d\alpha = \operatorname{Res}_{z_0}(f)$$

$$f(z) = \dots + c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} + \dots + c_{-1} \frac{1}{z-z_0} + c_0 + c_1 (z-z_0) + \dots + c_n (z-z_0)^n + \dots$$

Si z_0 pôle d'ordre m (le terme le + singulier $c_{-m} \frac{1}{(z-z_0)^m}$) alors ...

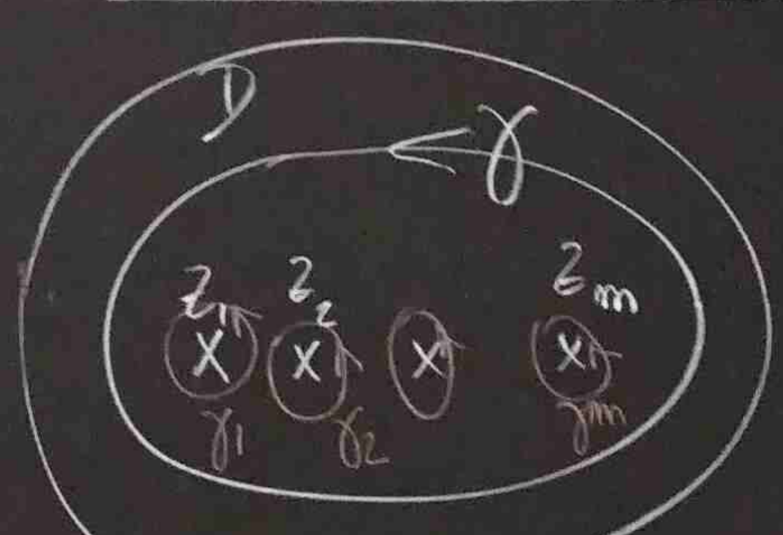
$m=3$ $$f(z) = \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)^3 f(z) = c_{-3} + c_{-2}(z-z_0) + c_{-1}(z-z_0)^2 + c_0(z-z_0)^3 + \dots$$

$$\frac{d^2}{dz^2} (z-z_0)^3 f(z) = 2c_{-1} + 6c_0(z-z_0) + \dots \xrightarrow{z \to z_0} 2c_{-1}$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) = c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0}(f)$$

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz$$



Thm Résidu: $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorphe

γ fermée $z_1, z_2, \dots, z_m \in \operatorname{int} \gamma$

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(f) \right)$$

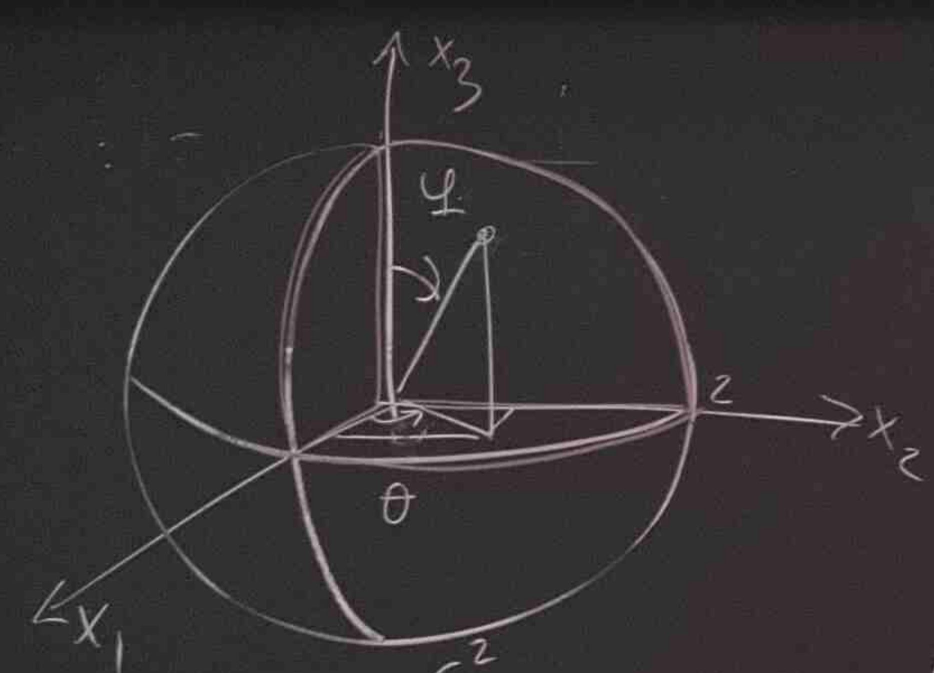
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad = \operatorname{Res}_{z_0}(f)$$

$$\iiint_\Omega \Delta u \, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \, ds, \qquad \iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} u \nu_1 \, ds$$

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\nu_3$$

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} (u_1\nu_1 + u_2\nu_2) \, dl$$

$$\iint_\Omega u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} u_1 u_1 \nu_1 \, dl$$



$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2 x_1\right)$$

$$= 2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)2x_1^2 + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 7(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$$

$$64\pi = 2^6\pi = 1\,\frac{\pi}{2}\int_0^2 7r^6\,dr = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx_1dx_2dx_3 = \int_0^2 dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta\, 7r^4 r^2 \sin\varphi$$

$$2^7$$

$\int_{\partial\Omega} \vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{\nu})\,ds = \left(\int_{\partial\Omega} u_1(u_1\nu_1+u_2\nu_2)\,dl,\ u_2(u_1\nu_1+u_2\nu_2)\,dl\right)$
$\vec{u}=(u_1,u_2)$
$\vec{\nu}=(\nu_1,\nu_2)$
$\int_{\partial\Omega} u_1(u_1\nu_1+u_2\nu_2)\,dl = \iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(u_1u_2)\right)dx_1dx_2$
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \int_{\partial\Omega} f\nu_i\,dl \quad i=1,2$
$= \iint_\Omega \left(2u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2$
$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0$
$= \iint_\Omega \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2$
$0=\iint_\Omega \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2 = \int_{\partial\Omega}(u_1(\vec{u}\cdot\vec{\nu})+p\nu_1)\,dl$
de même $0=\int_{\partial\Omega}(u_2(\vec{u}\cdot\vec{\nu})+p\nu_2)\,dl$
$\vec{F}\cdot\vec{\nu}=0$ sur Σ_2
Im
Re
$1+z^4=0$
$z^4=-1 \quad z=e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}} \quad k=0,1,2,3$
$\int_{C_r} f(z)dz+\int_{L_r} f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{e^{i\pi/4}}(f)+\mathrm{Res}_{e^{i3\pi/4}}(f)\right)$
$C_r\ \gamma(\theta)=re^{i\theta}\quad 0\le\theta\le\pi$
$\int_{C_r} f(z)dz=\int_0^\pi d\theta\,\frac{r^2e^{i2\theta}}{1+r^4e^{i4\theta}}\,ire^{i\theta}$
$\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \frac{r^3}{|1+r^4e^{i4\theta}|}d\theta$
$r^4=|r^4e^{i4\theta}|=|r^4e^{i4\theta}+1-1|$
$\le |1+r^4e^{i4\theta}|+1$
$r^4-1\le|1+r^4e^{i4\theta}|$
$\frac{1}{|1+r^4e^{i4\theta}|}\le\frac{1}{r^4-1}$
Σ_1 bord latéral cylindre rayon 1
$\vec{F}\cdot\vec{\nu}=0$ sur Σ_3 et Σ_4
$\int_{1/2}^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz \quad r^2=\left[r^2\right]_{1/2}^1 2\pi\cdot 1=\pi$
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1dx_2=\int_a^b dx_2\int_{g(x_2)}^{h(x_2)}dx_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1,x_2)$
$=\int_a^b dx_2\left(f(h(x_2),x_2)-f(g(x_2),x_2)\right)=\int_{\partial\Omega} f\nu_1\,dl$
$\partial\Omega$: param $\gamma(x_2)=(g(x_2),x_2)$ ou $(h(x_2),x_2)$
$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^4}=2\pi i\,\frac{g^{(3)}(z_0)}{3!}=2\pi i\,\frac{5}{6}$
$\frac{z^3\sin z}{z^4}$
$\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{l}=0=\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$
$\vec{\sigma}(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,z)$
$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\quad 0\le z\le 1$
B