

Exercice 1.

Exercice 9.1 du livre

Exercice 2.

Exercice 9.4 du livre

Exercice 3.

Exercice 9.10 du livre

Remarque: On admet le résultat suivant: Si $f = u + iv$ est holomorphe, u et v sont $\mathcal{C}^2$.

Exercice 4.

Exercice 9.6 du livre.

Remarque: Pour le point (i), on admet le résultat suivant: Si $f = u + iv$ est holomorphe, u et v sont $\mathcal{C}^2$.

Exercice 5.

- Soit D un domaine simplement connexe et soit $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ une courbe régulière. Montrer que

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

- En déduire que, si γ est une courbe régulière et fermée, alors

$$\int_{\gamma} z^2 dz = 0.$$

Indication : Si $z = x + iy$, $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, montrer que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(z) dz &= \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t) dt \\ &\quad + i \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t) dt \end{aligned}$$

et calculer $\frac{d}{dt}(u(\alpha(t), \beta(t)))$, $\frac{d}{dt}(v(\alpha(t), \beta(t)))$.