EPFL – Automne 2024	Pr. M. Picasso
Analyse III – PH	**Exercices**
Série 2	19 septembre 2024

Exercice 1.
Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe simple, régulière par morceaux. On suppose que cette courbe représente un fil dont la densité linéique au point $P \in \Gamma$ est donnée par $\rho(\overrightarrow{OP})$ (O dénote l'origine). Le centre de gravité C de ce fil est donné par :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\displaystyle\int_\Gamma \rho\, \overrightarrow{OP}\, dl}{\displaystyle\int_\Gamma \rho\, dl} = \frac{\left(\displaystyle\int_a^b \rho(\gamma(t))\gamma_1(t)||\gamma'(t)||dt, \int_a^b \rho(\gamma(t))\gamma_2(t)||\gamma'(t)||dt, \int_a^b \rho(\gamma(t))\gamma_3(t)||\gamma'(t)||dt\right)}{\displaystyle\int_a^b \rho(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt},$$

où $\gamma(t) = \Big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\Big) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation de Γ.
Calculer la position du centre de gravité C pour les deux courbes Γ suivantes :

1. Soit $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0,\ y \geq 0\}$ un fil homogène de densité ρ.

2. Soit Γ la réunion des trois arcs Γ_a, de densité ρ_a, Γ_b, de densité ρ_b, Γ_c, de densité ρ_c où ρ_a, ρ_b, ρ_c sont des constantes positives et Γ_a, Γ_b et Γ_c sont définis par les courbes formées respectivement des segments de droites P_aP_b, P_bP_c, P_cP_a avec $P_a = (0, 1, 0)$, $P_b = (0, 0, 1)$ et $P_c = (1, 0, 0)$.

Exercice 2.
Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple, régulière, de paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^2((a, b))$.
Le *vecteur tangent unité* à Γ est $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$.
Le *vecteur courbure* est défini par $K(t) = \dfrac{T'(t)}{||\gamma'(t)||}$ et la *courbure* par $||K(t)||$.

1. Montrer que $||K(t)|| = \dfrac{|x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. Vérifier que si Γ est le cercle de centre 0 et de rayon R, alors $||K(t)|| = \dfrac{1}{R}$.

Exercice 3.
Exercice 2.3 du livre.

Exercice 4.
Exercice 2.6 du livre.