Exercice 1.
Soit

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto p(x_1, x_2) \end{aligned}$$

solution des équations d'Euler

$$\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0,$$

i.e.

$$\rho(u_1 \partial_{x_1} u_1 + u_2 \partial_{x_2} u_1) + \partial_{x_1} p = 0 \tag{1}$$

$$\rho(u_1 \partial_{x_1} u_2 + u_2 \partial_{x_2} u_2) + \partial_{x_2} p = 0. \tag{2}$$

Soit Γ une courbe simple et régulière correspondant aux trajectoires des particules fluides : Γ est donc paramétrée par $\gamma'(t) = u(\gamma(t))$, $a \leq t \leq b$. On note $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$.
Montrer que la loi de Bernouilli est satisfaite, i.e. que

$$(p + \frac{1}{2}\rho u \cdot u)(B) = (p + \frac{1}{2}\rho u \cdot u)(A).$$

Indication : Montrer que

$$I = \int_\Gamma \nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho u \cdot u\right) \cdot dl = 0.$$