

Exercice 1.

Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, avec p et q des fonctions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

- z_0 est un zéro d'ordre k de p i.e. (si $p(z_0) \neq 0$, on pose $k = 0$)

$$p(z_0) = \dots = p^{(k-1)}(z_0) = 0, p^{(k)}(z_0) \neq 0;$$

- z_0 est un zéro d'ordre l de q i.e. (si $q(z_0) \neq 0$, on pose $l = 0$)

$$q(z_0) = \dots = q^{(l-1)}(z_0) = 0, q^{(l)}(z_0) \neq 0.$$

Montrer que

1. Si $l \leq k$, z_0 est un point régulier de f ;
2. Si $l > k$, z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f .

Exercice 2.

Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, avec p et q des fonctions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $p(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de q (i.e. d'ordre 1). Montrer que

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Exercice 3.

Exercice 12.2 du livre

Exercice 4.

Exercice 12.3 du livre

Exercice 5.

Exercice 12.9 du livre

Exercice 6.

Exercice 12.12 du livre

Exercice 7.

Exercice 12.10 du livre