EPFL

1

Ens. : Marco Picasso
Analyse III - PH
17.01.2024. (SG 1138)
Durée : 180 minutes (15:15-18:15)

SCIPER :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.
Il y a 11 points pour des questions à choix multiples.
Il y a 19 points pour des questions ouvertes.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiples**, on comptera :
  $+1/N$ points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes,
  0 point si vous ne cochez rien,
  $-1/M$ points si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte		

Première partie, questions à choix multiples

Question 1 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 1 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné quelconque, de frontière $\partial\Omega$ et de normale extérieure unité $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. On a :

$$\iint_{\partial\Omega} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \alpha_3 \nu_3)\, ds = \iiint_{\Omega} 1 dx_1 dx_2 dx_3,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ donnés par:

- ☐ $\alpha_3 = \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + u$
- ☐ $\alpha_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + u$
- ☐ $\alpha_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$
- ☐ $\alpha_3 = u$
- ☐ $\alpha_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + u$
- ☐ $\alpha_1 = u$
- ☐ $\alpha_3 = \dfrac{\partial u}{\partial x_3}$
- ☐ $\alpha_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$
- ☐ $\alpha_2 = u$

Question 2 Soit $u = (u_1, u_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné quelconque, de frontière $\partial\Omega$ et de normale extérieure unité $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Cochez les affirmations correctes :

- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} (u_1 \nu_1 + u_2 \nu_2)\, ds = 0$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} (u(u \cdot \nu) + p\nu))\, ds = 0$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} (u_1 u_1 \nu_1 + u_1 u_2 \nu_2)\, ds = \iint_{\Omega} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$

Cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Soit $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0\}$ et soit $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \, (x_1, x_2, x_3)$.

Question 3 On a

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx_1 dx_2 dx_3 = C\pi,$$

avec $C =$

- [ ] 0
- [ ] 128
- [ ] 16
- [ ] 64
- [ ] 32

Soit $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec

$$\Sigma_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0\}.$$

Soit ν_1, ν_2 les normales extérieures unité à Σ_1 et Σ_2 respectivement.

Question 4 On a

$$\iint_{\Sigma_1} F \cdot \nu_1 ds = D\pi,$$

avec $D =$

- [ ] 128
- [ ] 16
- [ ] 64
- [ ] 32
- [ ] 0

Question 5 On a

$$\iint_{\Sigma_2} F \cdot \nu_2 ds = E\pi,$$

avec $E =$

- [ ] 32
- [ ] 64
- [ ] 16
- [ ] 0
- [ ] 128

Cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Question 6 Soient $r > 1$ et $C_r := \{z \in \mathbb{C} \ : z = re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ et soit

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

On a :

- ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}_{e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}}(f)$
- ☐ $\displaystyle\left|\int_{C_r} \frac{z^2}{1+z^4}dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{r^3}{|1+r^4e^{i4\theta}|}d\theta$
- ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}}(f) + \mathrm{Res}_{e^{i\frac{3\pi}{4}}}(f)\right)$
- ☐ $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_{C_r} \frac{z^2}{1+z^4}dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}_{e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}}(f)$
- ☐ $|1+r^4e^{i4\theta}| \geq r^4 - 1,\ \forall\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- ☐ les zéros de $1+z^4$ sont $e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

Soit $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ et $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$.

Question 7 On a:

$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F \, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

- ☐ $-\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ $-\pi$
- ☐ 0
- ☐ π

Question 8 On a:

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$$

avec

- ☐ $\Sigma_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, \ 0 \leq z \leq 1\}$
- ☐ $\Sigma_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ z = 0\}$
- ☐ $\Sigma_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ z = 1\}$
- ☐ $\Sigma_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$

Question 9 Soit ν la normale extérieure unité à Ω. On a:

- ☐ $\iint_{\Sigma_2} F \cdot \nu \, ds = -\pi$
- ☐ $\iint_{\Sigma_4} F \cdot \nu \, ds = -\pi$
- ☐ $\iint_{\Sigma_3} F \cdot \nu \, ds = \pi$
- ☐ $\iint_{\Sigma_1} F \cdot \nu \, ds = 2\pi$

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

Soit D un domaine simplement connexe. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma \subset D$ une courbe simple, fermée et régulière. Soit $z_0 \in \text{int}\gamma$.

Question 10 Si γ_ϵ est le cercle de centre z_0 et de rayon ϵ, avec ϵ suffisamment petit de sorte que $\gamma_\epsilon \subset \text{int}\gamma$, on a:

- ☐ $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$
- ☐ $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$
- ☐ $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

Question 11 Soit $h \in \mathbb{C}$ suffisamment petit de sorte que $z_0 + h \in \text{int}\gamma$. On a:

- ☐ $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0)$
- ☐ $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz$
- ☐ $\lim_{h \to 0} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$

Cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

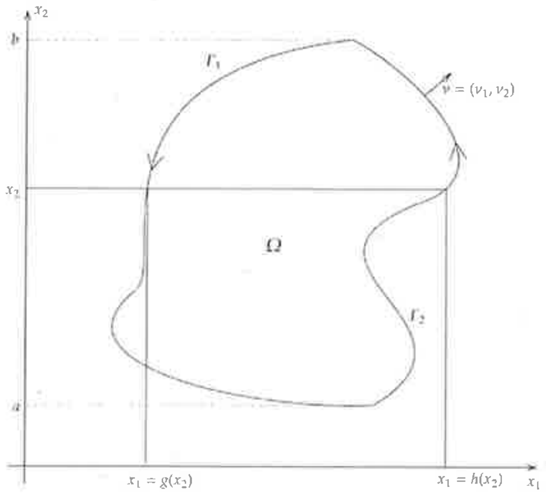
Questions à rédiger

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12: *Cette question est notée sur 4 points.*

□0 □.5 □1 □.5 □2 □.5 □3 □.5 □4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$. Soient $g, h : [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ et $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x_2) \leq x_1 \leq h(x_2), a \leq x_2 \leq b\}$, où g et h sont comme dans le dessin ci-dessous :



(En particulier, $g(a) = h(a)$, $g(b) = h(b)$ et $g(x_2) < h(x_2)$ pour tout $a < x_2 < b$.)
Soit encore $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale extérieure unité à Ω.
Montrer que

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f \nu_1 dl.$$

Cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)

Question 13: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4

(a) Montrer que l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ transforme

- une droite passant par l'origine en une droite passant par l'origine;
- une droite ne passant pas par l'origine en un cercle passant par l'origine.

(b) On cherche $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ qui envoie $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$ dans $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

- Trouver a, b, c, d tels que $f(-1) = -1$, $f(i) = 0$ et $f(1) = 1$.
- Vérifier que si $z = \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| > 1$, alors $f(z) = \beta i$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

Question 14: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4
☐.5 ☐5 ☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8

Soit F le champ vectoriel défini par $F(x,y,z) = (z^2,0,0)$ et soit $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Montrer pour ce champ et cette surface le théorème de Stokes, c'est-à-dire

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl.$$

En particulier, faire un dessin pour représenter Σ et orienter son bord $\partial\Sigma$.

CETTE PAGE N'EST PAS CORRIGÉE. (BROUILLON)

Question 15: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3

Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 et soit

$$f(z) = \frac{z^3 + \sin z}{z^4} \quad z \neq 0.$$

(a) Appliquer la formule intégrale de Cauchy pour calculer $\int_\gamma f(z)\, dz$.

(b) Expliciter les termes singuliers de la série de Laurent de f en $z_0 = 0$.

(c) Appliquer le théorème des résidus pour calculer $\int_\gamma f(z)\, dz$.

Cette page n'est pas corrigée. (Brouillon)