

Comparaison de fonctions

(A) Au voisinage de $+\infty$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a les limites suivantes :

1. Si $\alpha < \beta$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0$$

Autrement dit **les puissances de x plus grandes dominent les plus petites.**

EXEMPLE : x^4 domine x^3 quand x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0.$$

Autrement dit, **toute puissance positive de x domine n'importe quelle puissance du logarithme.**

EXEMPLE : la fonction $\sqrt{x}$ domine la fonction $(\ln x)^{1000}$ quand x tend vers $+\infty$ c'est-à-dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{1000}(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

3. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et tout $a > 1$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0.$$

Autrement dit, **toute exponentielle croissante domine n'importe quelle puissance de x .**

EXEMPLE : la fonction 2^x domine la fonction x^{50} quand x tend vers $+\infty$ c'est-à-dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{50}}{2^x} = 0.$$

On peut résumer les points 1. à 3. en utilisant **la notation de Landau** et écrire au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= o(x^\beta) & \forall \alpha < \beta \\ \ln^\alpha(x) &= o(x^\beta) \\ x^\beta &= o(a^x) & \forall a > 1 \end{aligned}$$

(B) Au voisinage de 0

Lorsque x tend vers 0, on a les limites suivantes :

1. Si $n < m$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^n} = 0.$$

Autrement dit **les puissances de x plus petites dominent les plus grandes. C'est l'inverse de ce qui se passe au voisinage de l'infini !!**

EXEMPLE : dans la fonction $5x^2 + 3x^3$, au voisinage de 0, le terme dominant est $5x^2$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 3x^3}{2x + 7x^2} = 0$$

car le terme dominant du dénominateur $2x$ domine le terme dominant du numérateur $5x^2$.

En utilisant **la notation de Landau** on peut écrire, au voisinage de 0 :

$$x^m = o(x^n) \quad \forall m > n$$

2. Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \ln^\beta(x) = 0.$$

Autrement dit, au voisinage de 0, **toute puissance positive de x domine n'importe quelle puissance du logarithme**.

Notation de Landau

Définition : On dit qu'une fonction f est "un petit o de g " et on le note

$$f = o(g) \quad \text{au voisinage de } a$$

si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ici a peut aussi être $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLES :

- (i) $x^2 + 10x^3 = o(x)$ au voisinage de 0.
- (ii) $100x^2 + 3x = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$
- (iii) $x^{20} = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$ (MAIS PAS au voisinage de $-\infty$).
- (iv) $\ln(x) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.
- (v) Pour $\alpha > 0$, on a vu que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ pour tout $\alpha > 0$. On peut donc écrire que $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ au voisinage de 0^+ pour tout $\alpha > 0$

Règles de calculs avec les $o(x^n)$

1. Règle 1 : **Toutes les constantes (même négatives) devant un $o(x^n)$ peuvent être remplacées par la constante 1.**

En particulier les signes $-$ peuvent (et doivent) être remplacés par des signes $+$ lorsqu'ils sont appliqués à des termes $o(x^n)$.

EXEMPLES :

- (i) Au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$ on a

$$o(3x^2) = o(x^2).$$

- (ii) Au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$ on a

$$-4 \cdot o(x^4) = o(x^4)$$

(iii) Au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$ on a

$$o(x^2) - o(x^2) = o(x^2) + o(x^2) = 2o(x^2) = o(x^2).$$

Et PAS $o(x^2) - o(x^2) = 0!!!!$

Par exemple $7x^3 - 4x^3 = 3x^3$ et les 3 fcts $7x^3$, $4x^3$ et $3x^3$ sont toutes des $o(x^2)$.

2. Règle 2 :

$$f \cdot o(g) = o(fg).$$

En particulier

$$x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}).$$

EXEMPLES :

(i) Au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$ on a

$$x^2 \cdot o(x^3) = o(x^5).$$

(ii) Au voisinage de 0 ou de $\pm\infty$ on a

$$(x^2 + 2x^3) \cdot o(x) = o(x^3) + 2o(x^4).$$

3. Règle 3 : Au **voisinage de 0**, dans une somme de $o(x^n)$ on ne garde que le terme avec le degré le plus bas.

EXEMPLES :

(i) Au voisinage de 0 on a

$$5o(x^2) + 10o(x^4) - 3o(x^5) = o(x^2).$$

On a appliqué ici aussi la règle 1 pour changer le 5 en 1.

(ii) Au voisinage de 0 on a

$$x \cdot (o(x^2) - 10o(x) + 3o(x^3)) = o(x^2).$$

On a aussi appliqué ici les règles 1 et 2.

4. Règle 4 : Au **voisinage de $\pm\infty$** , dans une somme de $o(x^n)$ on ne garde que le terme avec le degré le plus haut.

EXEMPLES :

(i) Au voisinage de $\pm\infty$ on a

$$5o(x^2) + 10o(x^4) - 3o(x^5) = o(x^5).$$

On a appliqué ici aussi la règle 1 pour changer le 5 en 1.

(ii) Au voisinage de $\pm\infty$ on a

$$x \cdot (o(x^2) - 10o(x) + 3o(x^3)) = o(x^4).$$

On a aussi appliqué ici les règles 1 et 2.

Exemples au voisinage de $x = a$ différent de 0

Ces 3 règles sont valables pour un développement limité (polynômes de Taylor) autour d'un point $x = a$ quelconque. Mais si le développement limité n'est pas en 0 mais en $x = a \neq 0$ il faut appliquer les règles aux termes $o((x - a)^n)$ à la place de $o(x^n)$.

On reprend les exemples ci-dessus mais autour de $x = 4$.

EXEMPLES :

(i) Au voisinage de 4 on a

$$o\left(3(x-4)^2\right)=o\left((x-4)^2\right).$$

Règle 1.

(ii) Au voisinage de 4 on a

$$-4 \cdot o\left((x-4)^4\right)=o\left((x-4)^4\right).$$

Règle 1.

(iii) Au voisinage de 4 on a

$$o\left((x-4)^2\right)-o\left((x-4)^2\right)=o\left((x-4)^2\right)+o\left((x-4)^2\right)=2o\left((x-4)^2\right)=o\left((x-4)^2\right).$$

Règle 1.

(iv) Au voisinage de 4 on a

$$(x-4)^2 \cdot o\left((x-4)^3\right)=o\left((x-4)^5\right)$$

. Règle 2

(v) Au voisinage de 4 on a

$$\left[(x-4)^2+2(x-4)^3\right] \cdot o\left((x-4)\right)=o\left((x-4)^3\right)+2o\left((x-4)^4\right)=o\left((x-4)^3\right).$$

Règles 1, 2 et 3!!

(vi) Au voisinage de 4 on a

$$5o\left((x-4)^2\right)+10o\left((x-4)^4\right)-3o\left((x-4)^5\right)=o\left((x-4)^2\right).$$

Règles 1 et 3

(vii) Au voisinage de 4 on a

$$(x-4) \cdot \left[o\left((x-4)^2\right)-10o\left((x-4)\right)+3o\left((x-4)^3\right)\right]=o\left((x-4)^2\right).$$

Règles 1, 2 et 3