Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Longueur d'arc et développantes

Philippe Chabloz

Longueur d'arc

On considère une courbe C

Nous allons calculer la longueur d'une portion de cette courbe entre les deux points $P(x, y)$ et $R(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

La longueur d'arc entre P et R est approximée par Δs où

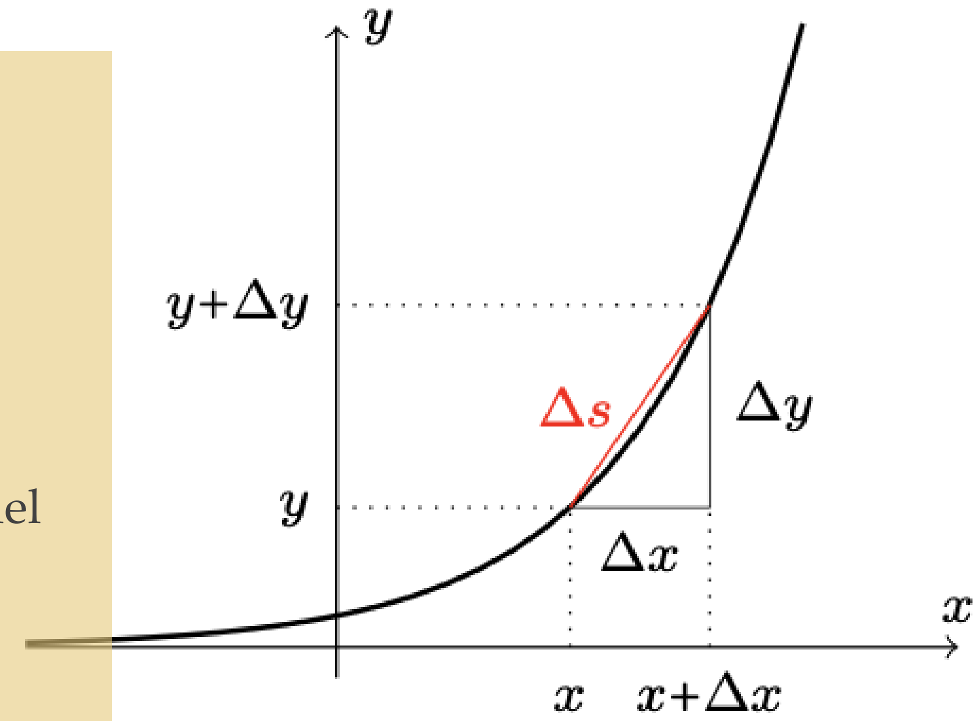
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Si on fait tendre le point R vers le point P on obtient l'élément différentiel (infiniment petit) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En **intégrant l'élément différentiel ds** sur un segment de C on obtient la longueur totale du segment

$$L = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



Longueur d'arc (forme paramétrique)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique $\quad c(t) = (x(t), y(t)) \quad$ avec $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions continues et dérivables.

La longueur de la courbe entre deux points $P(x(a), y(a))$ et $R(x(b), y(b))$, obtenus en fixant la valeur du paramètre $t = a$ et $t = b$ respectivement (avec $b > a$), est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

En effet $x = x(t)$ donne par définition de la dérivée $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ et donc $\qquad dx = x'(t)\, dt$

De même $y = y(t)$ donne $\qquad y'(t) = \frac{dy}{dt}$ et donc $\qquad dy = y'(t)\, dt$

Alors l'élément différentiel de longueur d'arc ds de la courbe c vaut

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2\, dt^2 + y'(t)^2\, dt^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, |dt|$$

Formes cartésienne

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Si la courbe est donnée sous forme **cartésienne explicite** $y = f(x)$ alors on peut utiliser la paramétrisation canonique

$$\mathrm{x}(t) = t, \quad y(t) = f(t)$$

ce qui donne $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(t)$. La longueur d'un segment de la courbe vaut alors

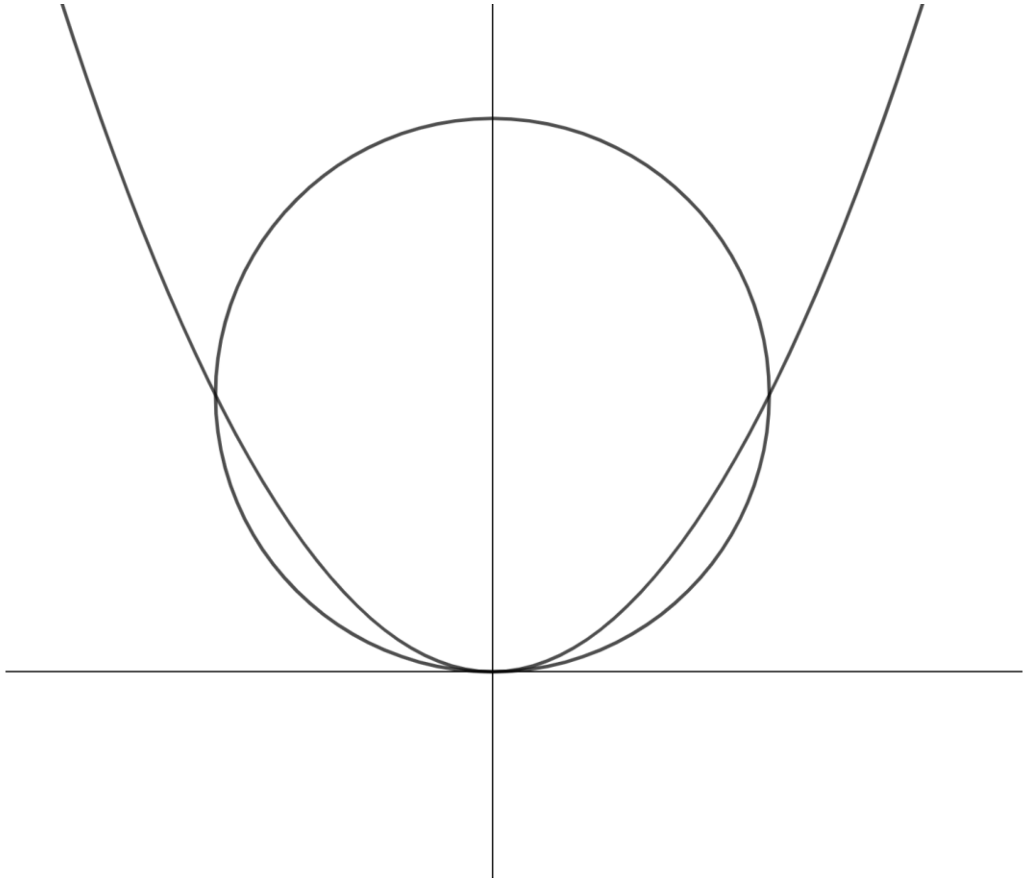
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Exercice

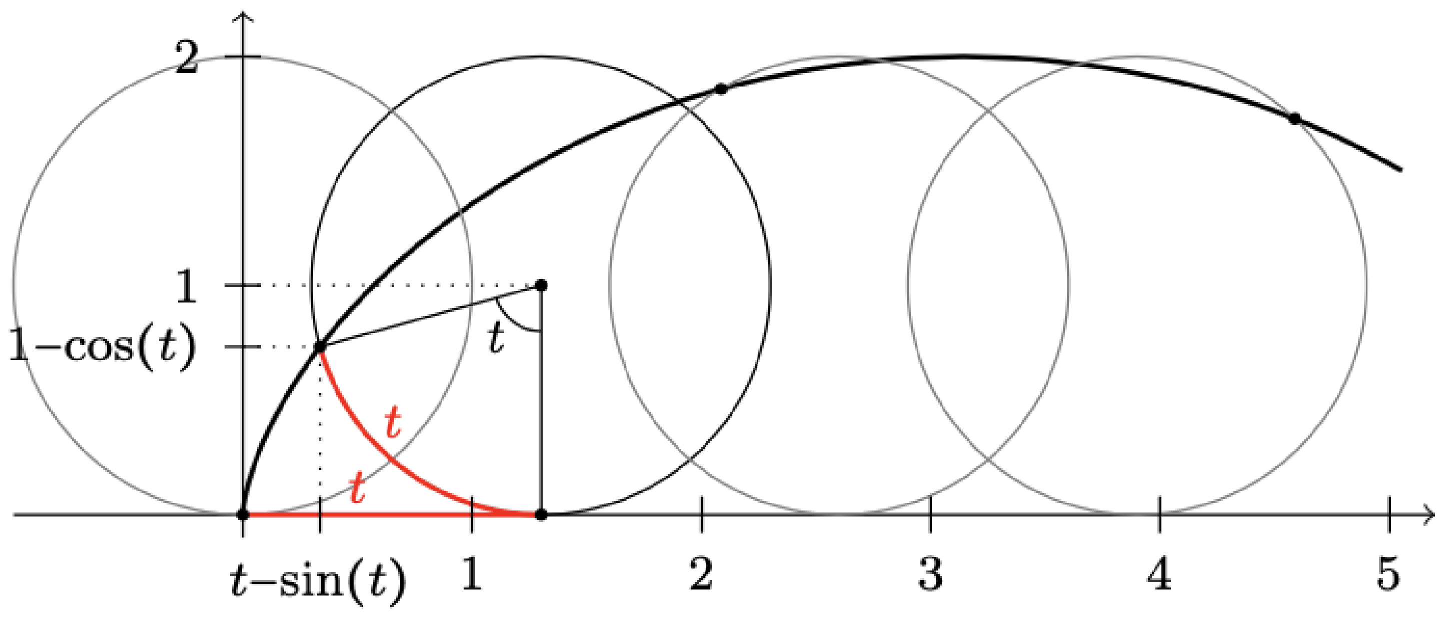
Une parabole d'équation $y = x^2$ intersecte un cercle d'équation

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le cercle soit supérieure ou égale à 4 ?



Longueur de la cycloïde



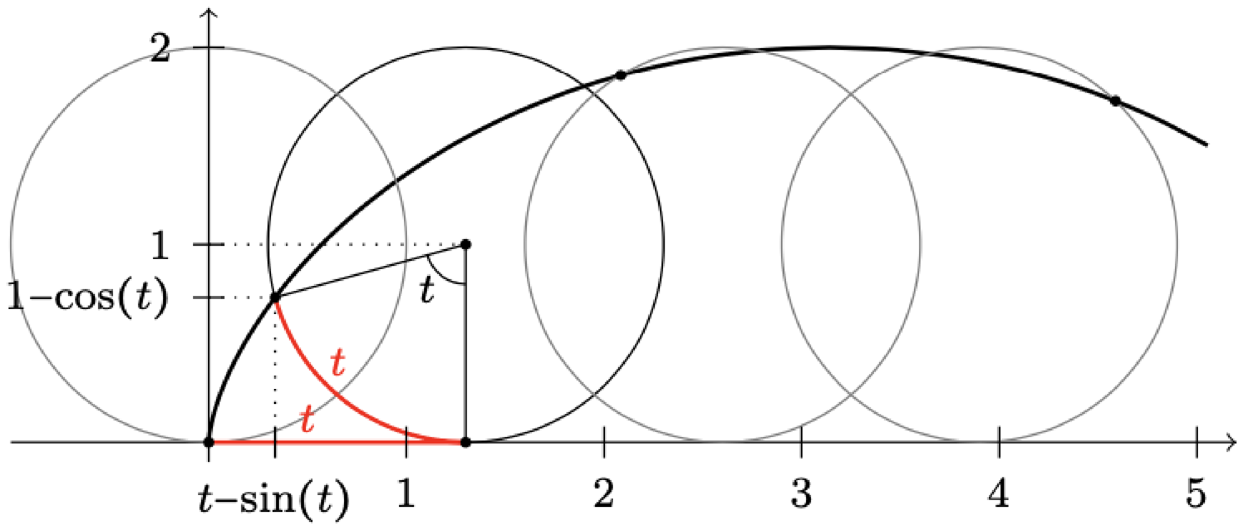
- *Rappel* : la cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

- La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Quelle est la longueur d'arc d'un cycle de la cycloïde, c'est-à-dire entre les points $P(0,0)$ et $R(2\pi, 0)$?

Longueur de la cycloïde



$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

Quelle est la longueur d'arc d'un cycle de la cycloïde, c'est-à-dire entre les points $P(0,0)$ et $R(2\pi, 0)$?

Exercice

Etablir l'intégrale qui donne la longueur de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, a > b > 1$$

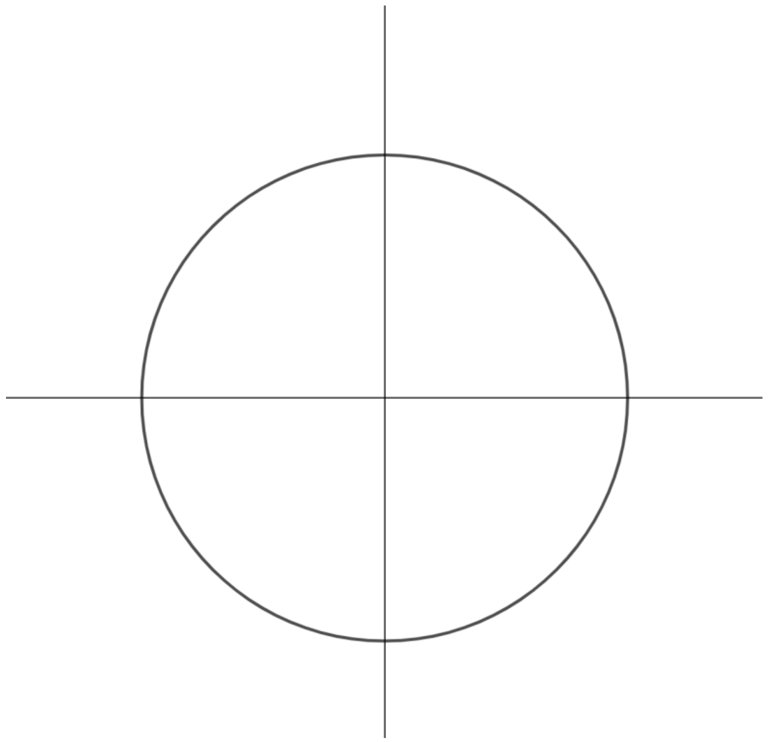
Montrer que $L \leq \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Développantes du cercle

Problème (Huygens 1673) : étant donné une courbe C et un point $P \in C$, on déroule un câble de longueur constante $L \in \mathbb{R}$ à partir du point P et en direction de la tangente à la courbe. En gardant le câble tendu (*tangente à la courbe*), trouver l'équation de la courbe décrite par l'extrémité libre du câble.

Cette courbe s'appelle **développante de C par rapport au point P**.

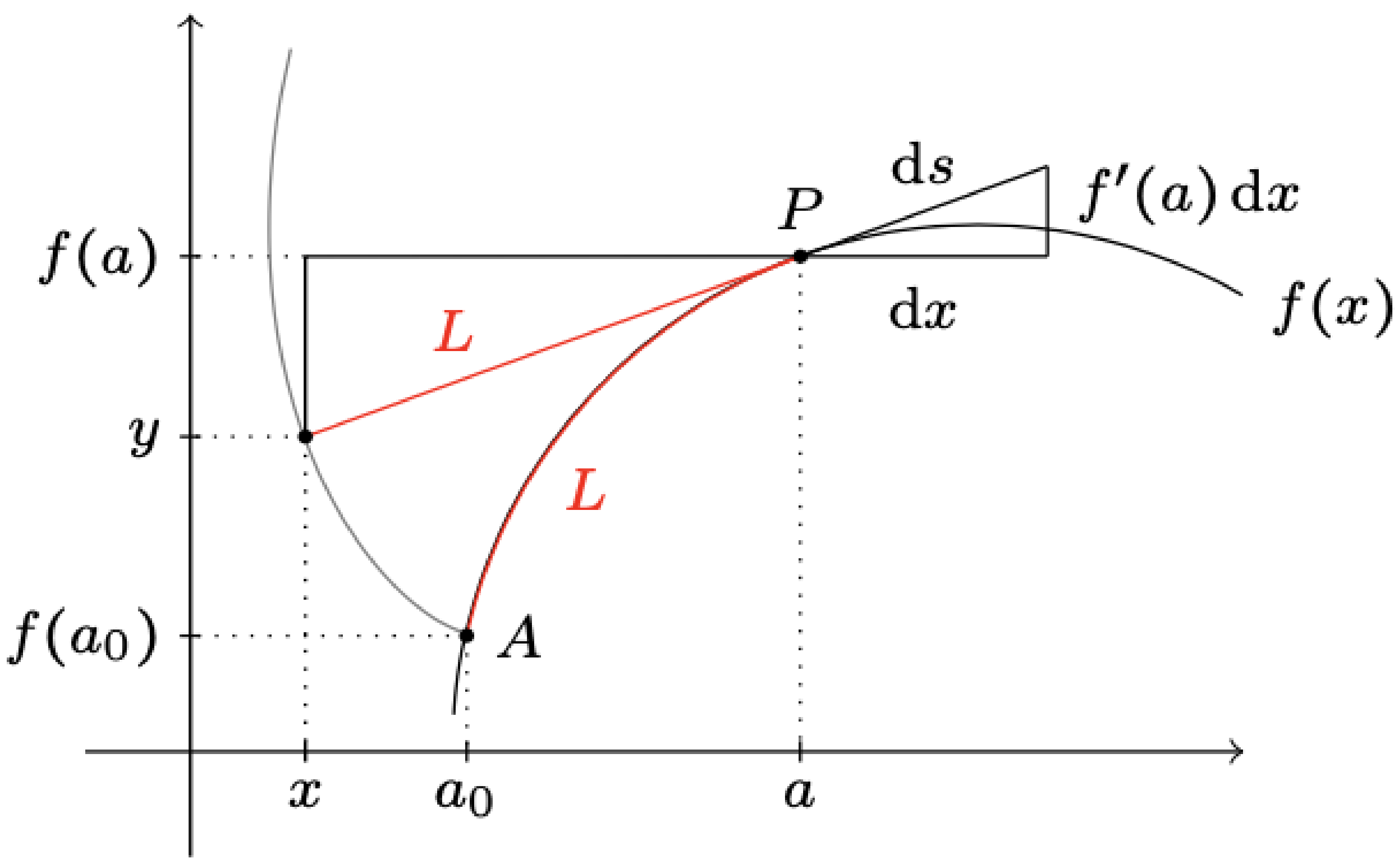
Huygens cherchait à concevoir des horloges sans pendule pour une utilisation sur un bateau en mer. Il utilisa la développante du cercle dans une tentative de forcer le pendule à se balancer selon le tracé d'une cycloïde.



Christiaan Huygens
1629 - 1695

Équation de la développante d'une courbe

- Pour obtenir l'équation de la développante, il est plus pratique de considérer que le fil de longueur variable $L \in \mathbb{R}$ se *déroule* le long de la courbe.
- Choisissons un point $A(a, f(a))$, où $a \in \mathbb{R}$, sur la courbe $y = f(x)$ qui sera l'extrémité du fil enroulé, c'est-à-dire le "*point de départ*" de la développante.
- Après avoir déroulé une longueur L du fil, celui-ci est tangent à la courbe en un point P.



Équation de la développante d'une courbe paramétrée.

Considérons une courbe donnée par des équations paramétriques : $c(t) = (x(t), y(t))$ et $t \in I$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues et dérivables.

La développante de la courbe au point $A(x(t_0), y(t_0))$ est donc la courbe d'équations paramétriques :

$$X(t) = x(t) - \frac{x'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \mathrm{d}s}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \qquad Y(t) = y(t) - \frac{y'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \mathrm{d}s}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

Démonstration:

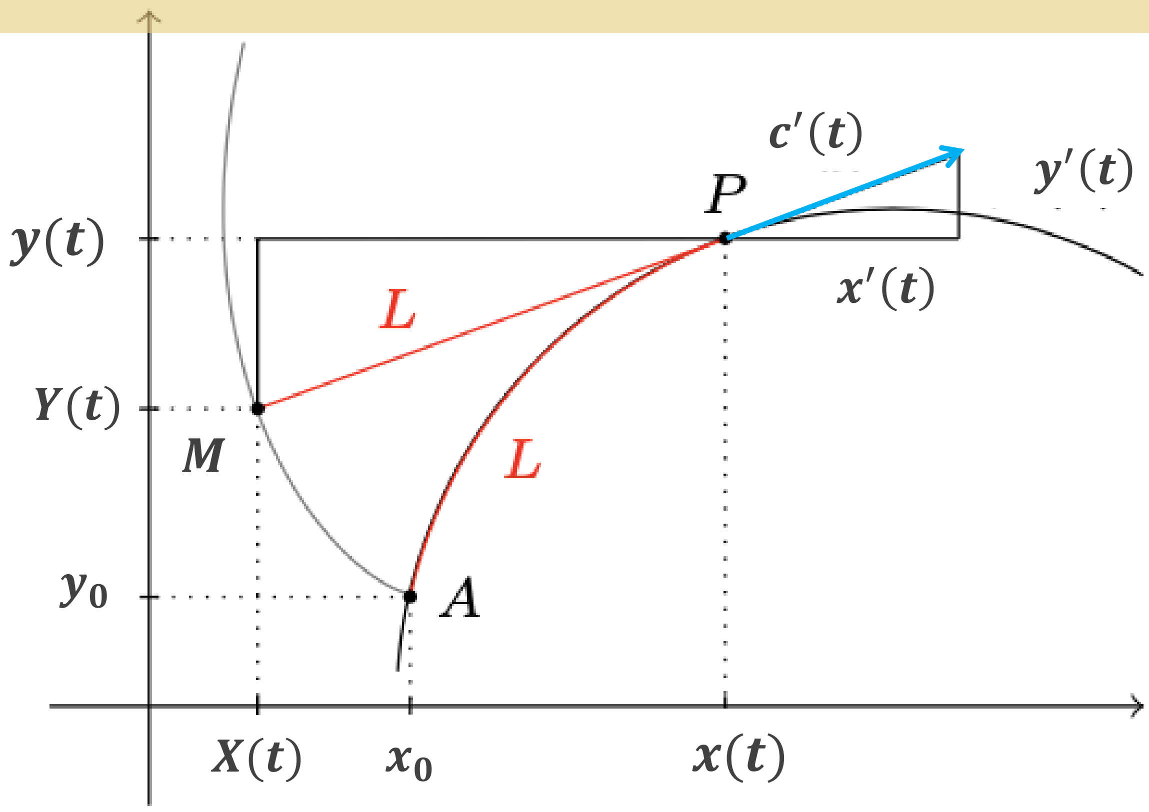
- La tangente en P a comme vecteur directeur le vecteur tangent:

$$c'(t) = (x'(t), y'(t))$$

- La longueur $L(t)$ vaut

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)}\, ds$$

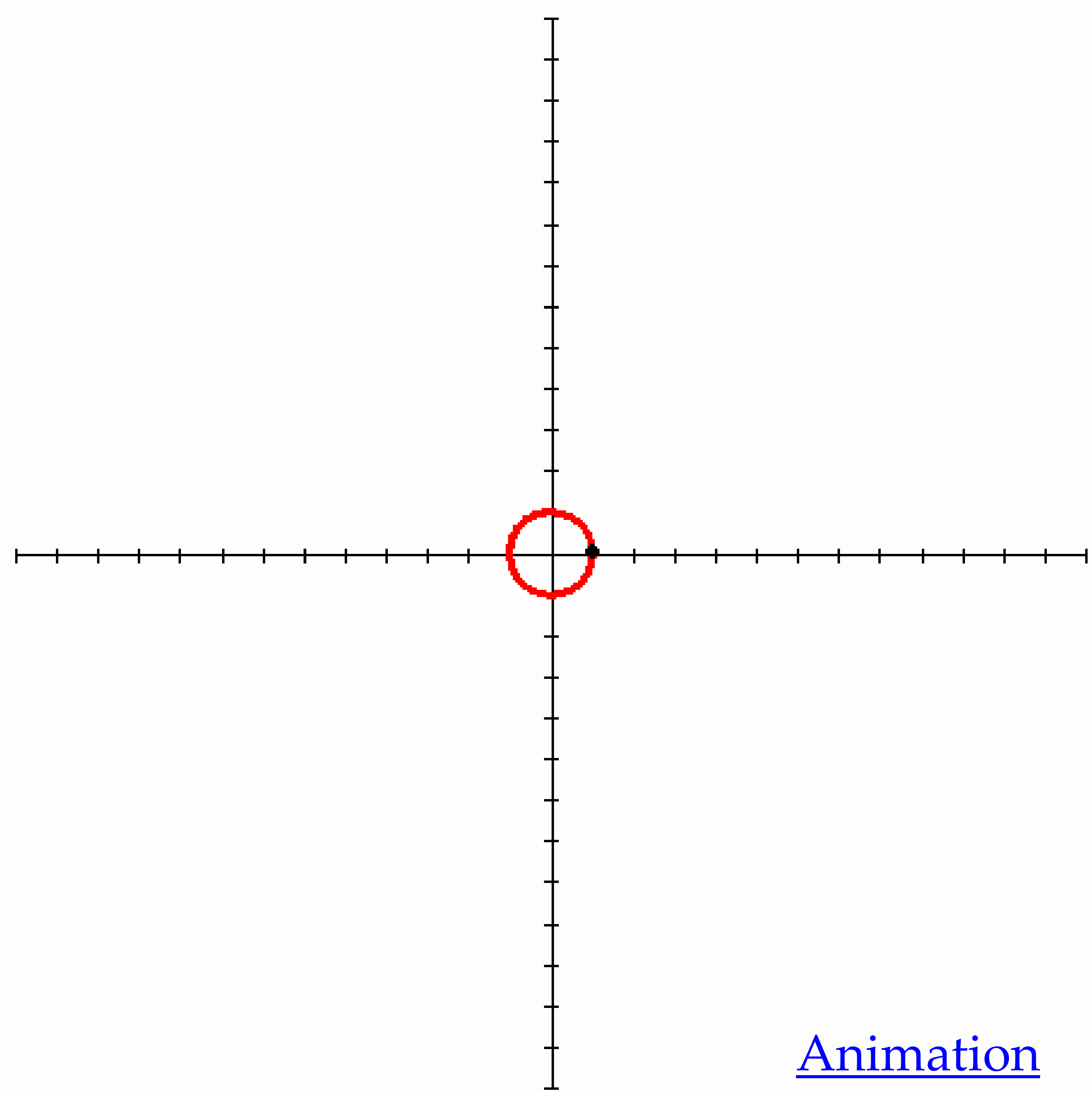
- Et donc $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - L(t) \cdot \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$



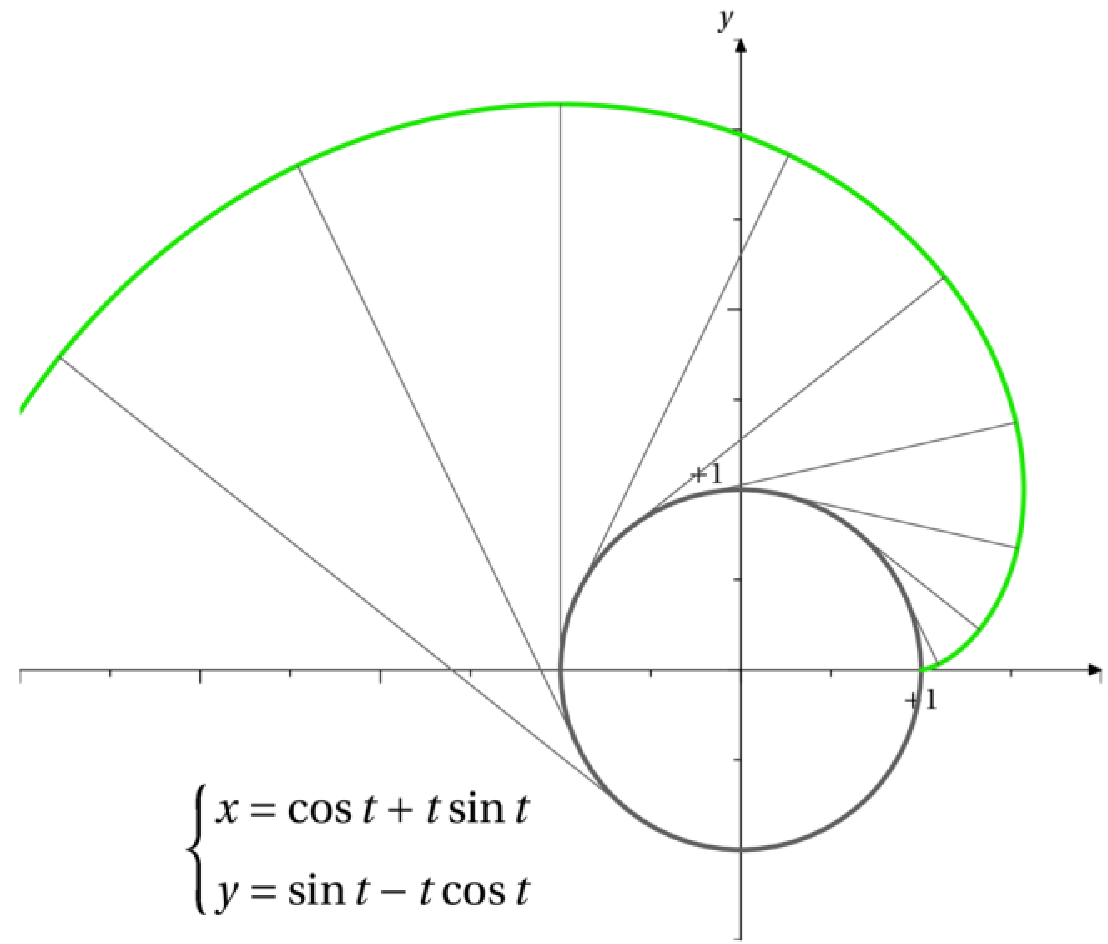
donne

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{L(t)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)}} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Exemple : développante du cercle



[Animation](#)



Développante de cercle

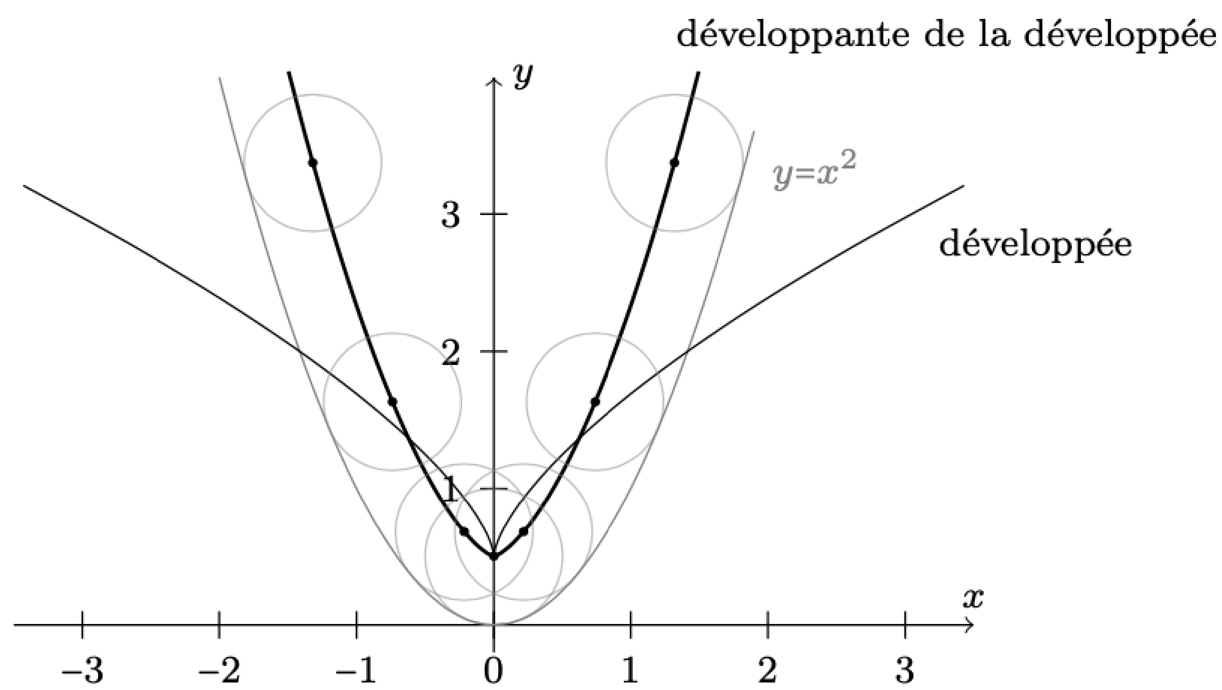
Exemple : développante du cercle

Développante de la développée

D'après l'exemple précédent, la **développante de la développée** ne redonne pas la courbe d'origine. Par contre, on peut montrer que **la développante de la développée** d'une courbe est "*parallèle*" à la courbe originale, c'est-à-dire est une courbe décrite par le centre d'un cercle de rayon constant qui "*roule*" sur la courbe d'origine.

Théorème

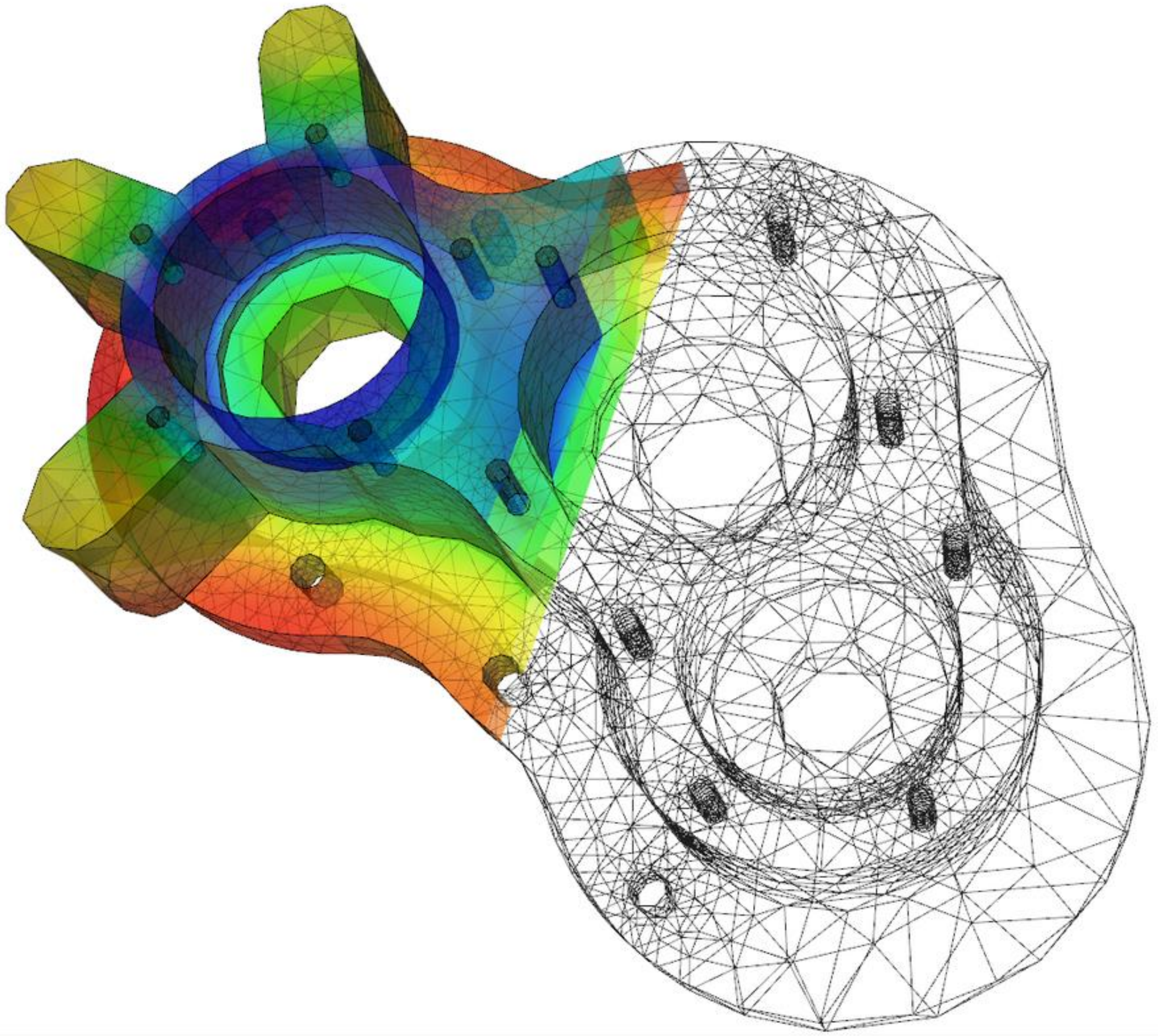
La développée de la développante d'une courbe redonne la courbe d'origine.



Un parallèle peut être fait entre ce théorème et le fait que la *dérivée* (assimilée à la développée) d'une *primitive* (assimilée à une développante) d'une fonction redonne la fonction d'origine alors que la primitive d'une dérivée la redonne à une constante près.

Conception assistée par ordinateur

La conception assistée par ordinateur ou CAO (en anglais, *computer aided design* ou CAD) comprend l'ensemble des logiciels et des techniques de modélisation géométrique permettant de concevoir à l'aide d'un ordinateur des produits manufacturés et les outils pour les fabriquer.

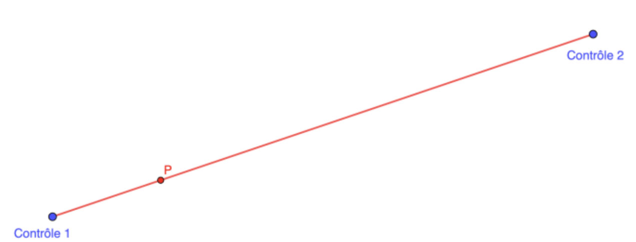


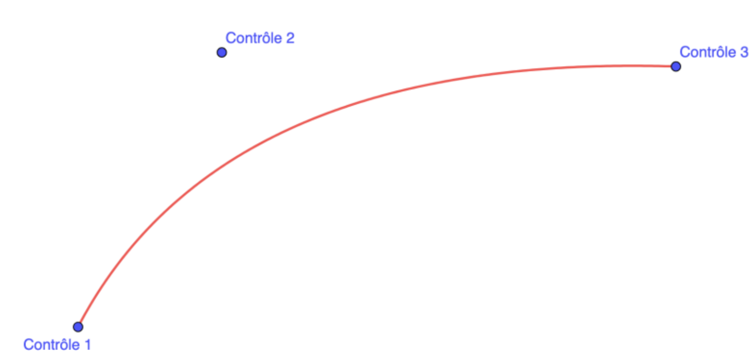
Courbes de Bézier

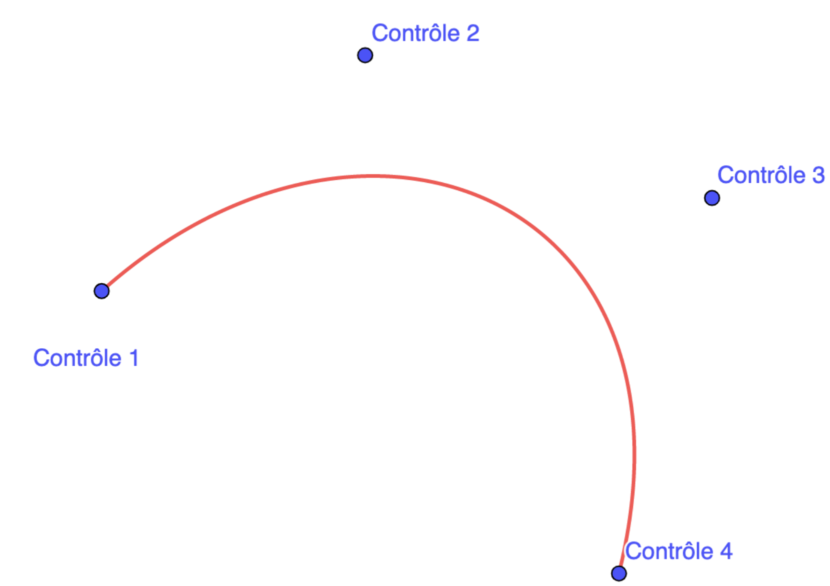
Principe clé **:** nous remplaçons un objet complexe tel qu'une courbe par un objet plus simple, un ensemble de points de contrôle, de sorte qu'il existe une procédure unique et non ambiguë (*algorithme*) pour reconstruire la courbe à partir de l'ensemble de points de contrôle.

Une courbe de Bézier est définie par un nombre $n+1$ des points $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, appelés **points de contrôle**, qui engendrent une portion de courbe. Les types de courbes de Bézier les plus utilisées sont :

- **les courbes de Bézier linéaires** : deux points de contrôle $(n = 1)$;
- **les courbes de Bézier quadratiques** : trois points de contrôle $(n = 2)$;
- **les courbes de Bézier cubiques** : quatre points de contrôle $(n = 3)$.







Théorie générale

La courbe de Bézier pour les $n+1$ points de contrôle $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, est l'ensemble des points définis par la représentation paramétrique :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot \mathbf{P}_i$$

où $t \in [0; 1]$ et les B_i^n sont les *polynômes de Bernstein :*

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Exemples :

- Pour $n = 2$ on a la courbe de Bézier de degré 2 (quadratique) :

$$P(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2$$

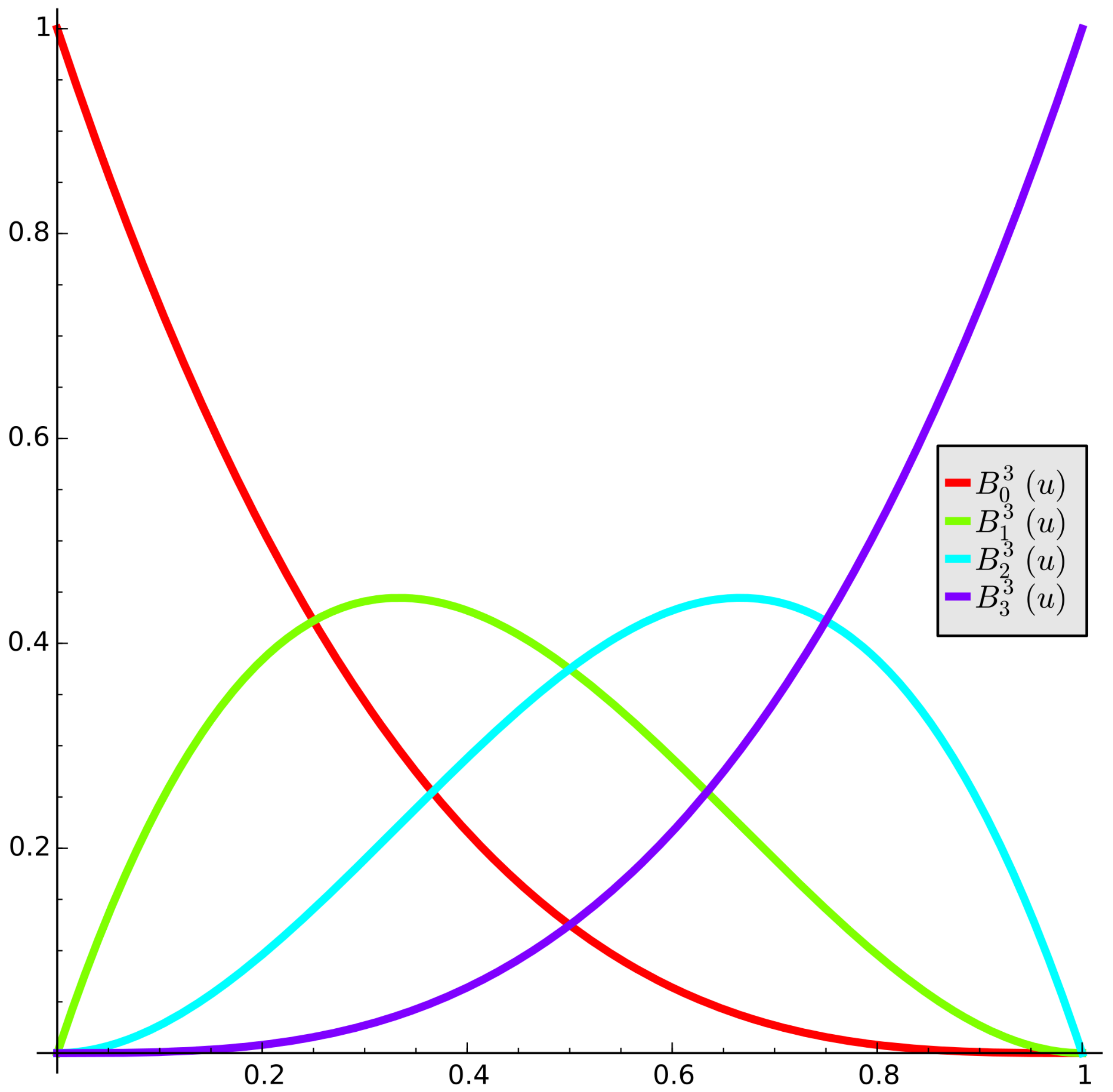
où $t \in [0; 1]$.

- Pour $n = 3$ on a la courbe de Bézier de degré 3 (cubique) :

$$P(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

où $t \in [0; 1]$.

Polynômes de Bernstein de degré 3

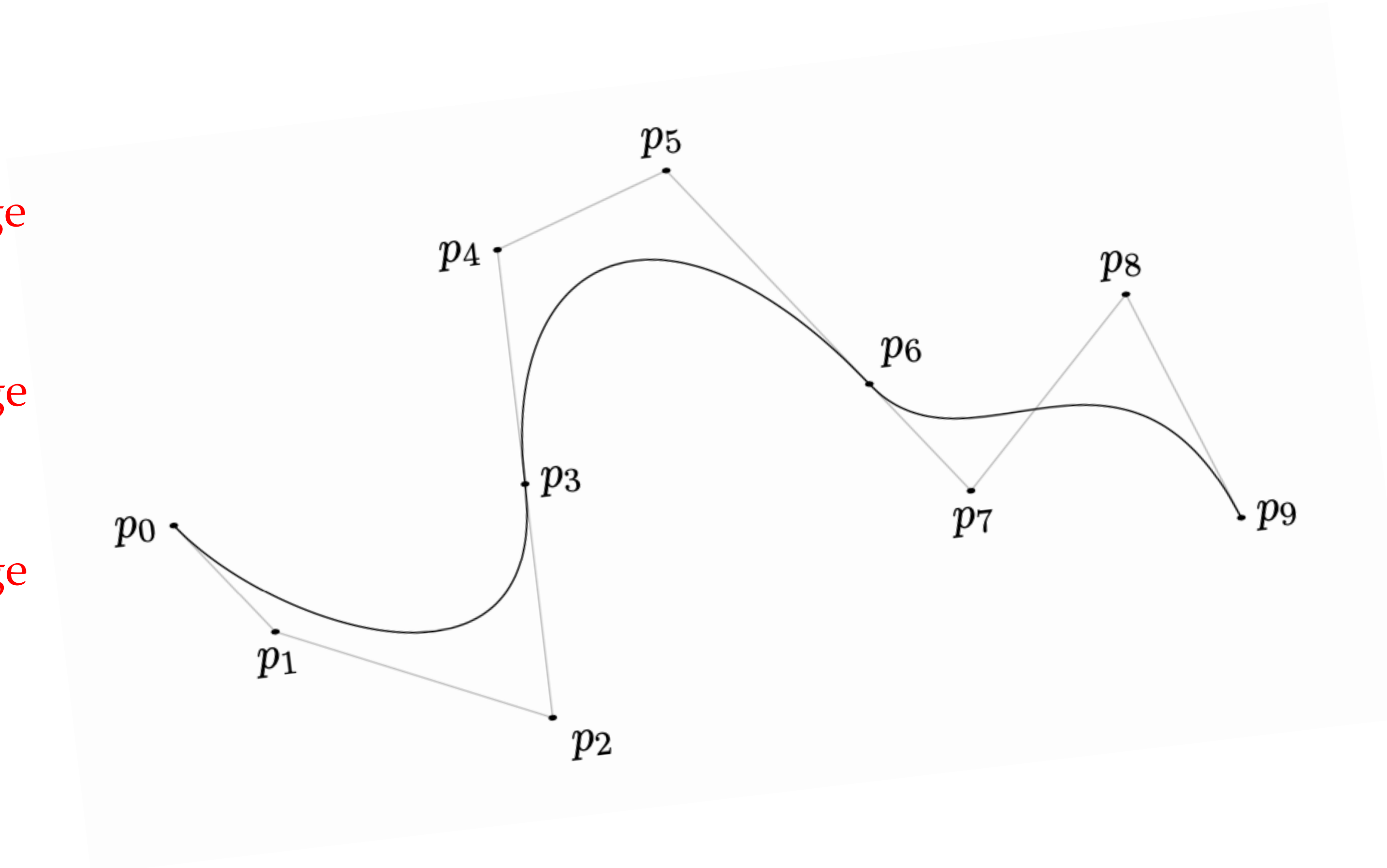


Recollements de courbes de Bézier

- Les courbes de Béziers sont conçues pour être collées les unes aux autres.
- Si on veut recoller n **courbes de Bézier cubiques**, on aura $3n + 1$ points de contrôle : $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{3n})$.
- Les points $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_6 \dots, \mathbf{P}_{3n})$ par lesquels passe effectivement la courbe sont aussi appelés les **points d'ancrage** de la courbe, les autres points $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \dots, \mathbf{P}_{3n-2}, \mathbf{P}_{3n-1})$ seront alors les **points de direction**.

Exemple avec n=3

- La courbe de Bézier cubique γ_1 a les points d'ancrage p_0 et p_3 et les points de direction p_1 et p_2.
- La courbe de Bézier cubique γ_2 a les points d'ancrage p_3 et p_6 et les points de direction p_4 et p_5.
- La courbe de Bézier cubique γ_3 a les points d'ancrage p_6 et p_9 et les points de direction p_7 et p_8.



Courbes de Bézier cubiques

La courbe de Bézier cubique pour les 4 points de contrôles $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

Le vecteur tangent devient

$$\gamma'(t) = -3(1-t)^2\mathbf{P}_0 + 3[(1-t)^2 - 2t(1-t)]\mathbf{P}_1 + 3[2t(1-t) - t^2]\mathbf{P}_2 + 3t^2\mathbf{P}_3 \qquad t \in [0,1]$$

et au début et à la fin de la courbe on a

$$\gamma'(0) = -3\mathbf{P}_0 + 3\mathbf{P}_1 = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \qquad \text{et} \qquad \gamma'(1) = -3\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_3 = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$$

Si on veut recoller 2 courbes de Bézier cubiques γ_1 et γ_2 déterminées par 7 points de contrôles:
$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ pour γ_1 (γ_1 passe par $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_3$ mais pas nécessairement par $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$!!)
$(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$ pour γ_2 (γ_2 passe par $\mathbf{P}_3$ et $\mathbf{P}_6$ mais pas nécessairement par $\mathbf{P}_4$ et $\mathbf{P}_5$!!)

Alors pour que le recollement soit lisse, on impose que le vecteur tangent ${\gamma_1}'(1)$ soit égal au vecteur tangent $\gamma_2'(0)$.
Ceci impose que $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3$

Autrement dit, pour que la courbe totale (réunion des courbes γ_1 et γ_2) soit lisse, il faut choisir $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_4$ de telle sorte que $\mathbf{P}_3$ soit le milieu du segment $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4$ donc

Continuité des vecteurs tangents (I) : $\mathbf{P}_4 = 2\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$

Courbes de Bézier cubiques

La courbe de Bézier cubique pour les 4 points de contrôles $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

En dérivant deux fois $\gamma(t)$ on peut montrer que

$$\gamma''(0) = 6\mathbf{P}_0 - 12\mathbf{P}_1 + 6\mathbf{P}_2 \qquad \gamma''(1) = 6\mathbf{P}_1 - 12\mathbf{P}_2 + 6\mathbf{P}_3$$

On veut recoller 2 courbes de Bézier cubiques γ_1 et γ_2 déterminées par 7 points de contrôles:
$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ pour γ_1
$(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$ pour γ_2

Pour que le **recollement est la même courbure au point P_3**, on impose que le vecteur $\gamma_1''(1)$ soit égal au vecteur $\gamma_2''(0)$.

Ceci impose que $\mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 - 2\mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5$ et donc

Continuité de la courbure (II): $\mathbf{P}_5 = 2\mathbf{P}_4 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1$

En mettant ensemble les conditions (I) et (II), on constate que, pour des points donnés $\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_6}, \boldsymbol{P_9}, \dots$,dès que les points de directions $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ sont fixés les autres points de directions sont imposés par

(I)	$\mathbf{P}_4 = 2\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$	et	(II)	$\mathbf{P}_5 = 2\mathbf{P}_4 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1$
puis (I)	$\mathbf{P}_7 = 2\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_5$	et	(II)	$\mathbf{P}_8 = 2\mathbf{P}_7 - 2\mathbf{P}_5 + \mathbf{P}_4$

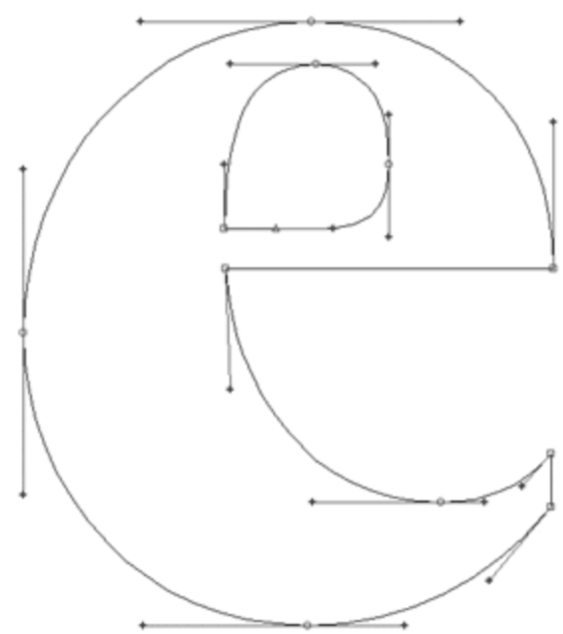
On obtient les formules suivantes $\mathbf{P}_{3k+1} = 2\mathbf{P}_{3k} - \mathbf{P}_{3k-1}$ et $\mathbf{P}_{3k+2} = 2\mathbf{P}_{3k+1} - 2\mathbf{P}_{3k-1} + \mathbf{P}_{3k-2}$

Généralisation

Les courbes de Bézier possèdent un certain nombre de défauts :

- Si on déplace un point de contrôle, toute la courbe en sera modifiée.
- La courbe *ne passe pas* nécessairement par tous les points de contrôle, ce qui peut rendre son contrôle délicat.
- Le cercle ne peut pas être reproduit exactement en recollant des morceaux de courbes de Bézier.

Pour toutes ces raisons, ces courbes ont subi de nombreuses généralisations : *courbes de Bézier rationnelles*, *B-splines*, *Nurbs*, *etc…*



Exemple

On veut faire passer une courbe de Bézier cubique par les points d'ancrage $P_0(0,0)$, $P_3(3,4)$ $P_6(7,1)$ et $P_9(10,3)$ Choisir les points de direction P_1 P_2 P_4 P_5 P_7 et P_8 de façon à que le recollement des 3 courbes soit le plus lisse possible (dérivées secondes continues)

Puis calculer les 2 courbes de Béziers γ_1 et γ_2 pour les points P_0 à P_6 (on ne calculera pas la 3ème courbe) et vérifier que l'on a bien en P_3

$$y_1'(1) = y_2'(0) \qquad \text{et} \qquad y_1''(1) = y_2''(0)$$