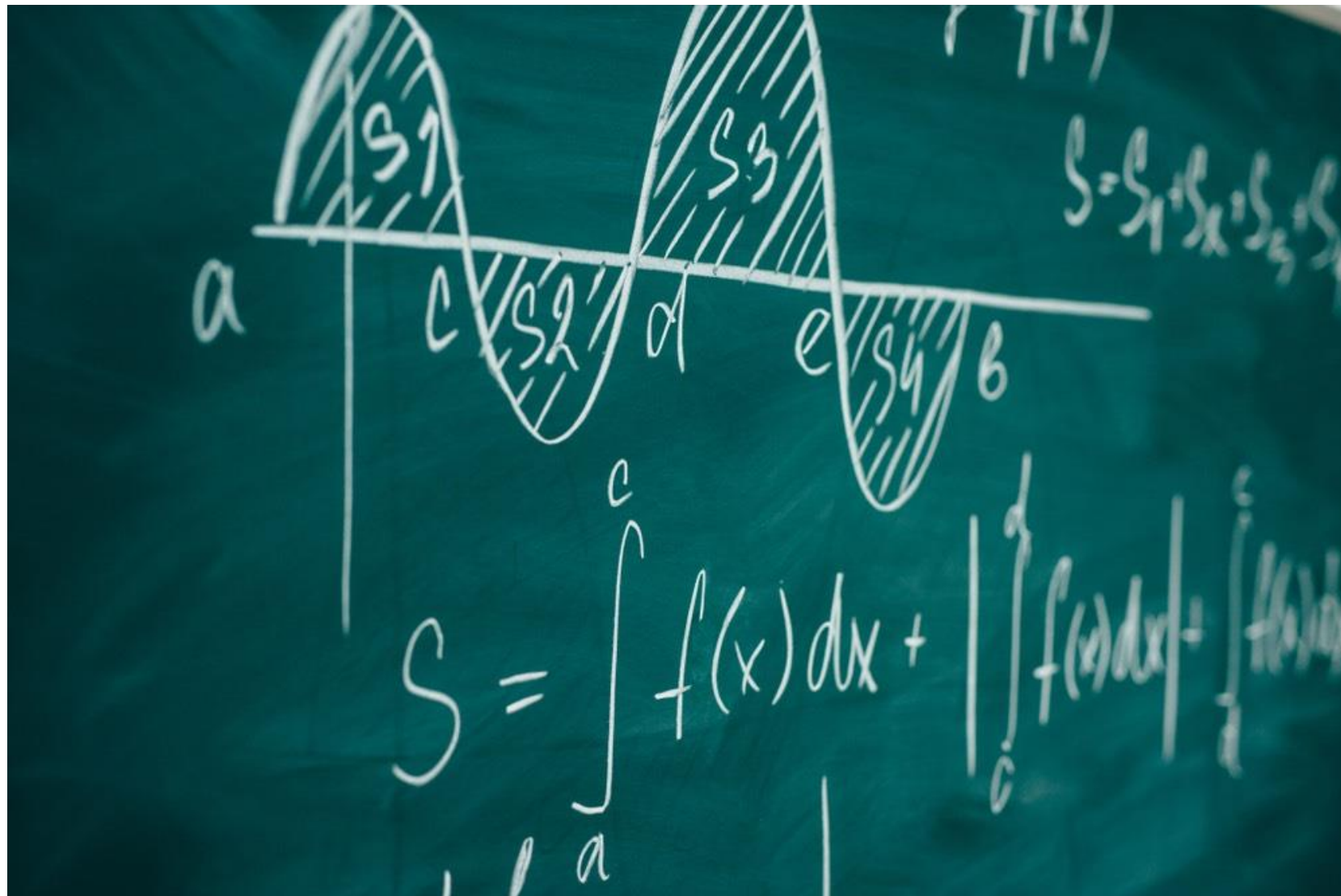




Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Calcul intégral

Philippe Chabloz

Une perspective historique

- ❖ On désigne par *calcul infinitésimal* l'outil de calcul élaboré à partir du XVIIe siècle mettant en jeu des quantités « *infinitement petites* ».
- ❖ Ses principales applications sont le *calcul différentiel* (notion de vitesse, de tangente à une courbe, de dérivée...) et le *calcul intégral* (calcul de la longueur d'une courbe, de l'aire d'une surface, du volume d'un solide).
- ❖ Les principaux auteurs qui ont contribué à la théorie du calcul intégral sont :

IIIe siècle



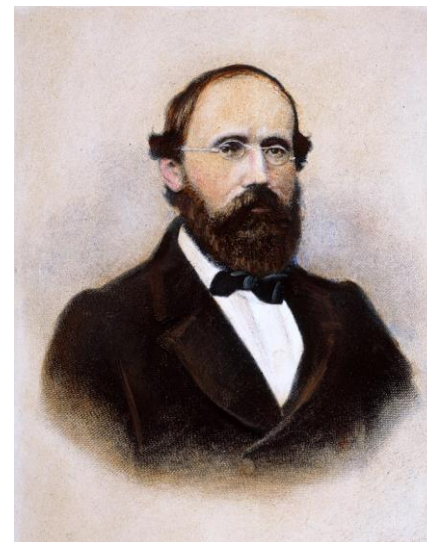
Archimède

XVIIe siècle



Gottfried Leibniz

XIXe siècle



Bernhard Riemann

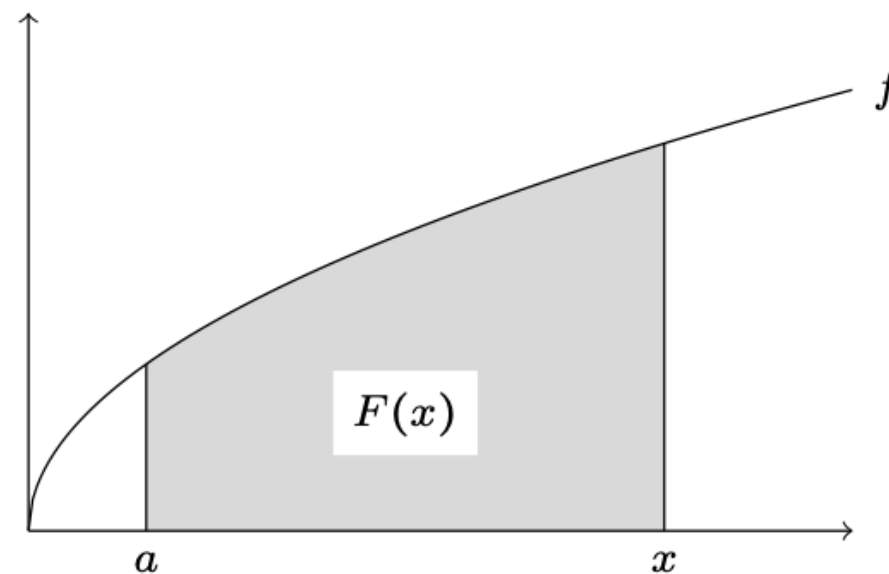
XXe siècle



Henri Lebesgue

L'aire sous la courbe

- ❖ Étant donnée une fonction f continue et positive, de nombreux problèmes d'application concernent le calcul de l'aire entre la courbe décrite par l'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites verticales passant par les points $(a, 0)$ et $(x, 0)$, où $x \geq a$.



- ❖ Comme cette aire dépend du point x , il est naturel de la définir comme une fonction de x , désignons-la par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- ❖ Il est clair que $F(a) = 0$ et $F(x) \geq 0$ pour $x \geq a$.

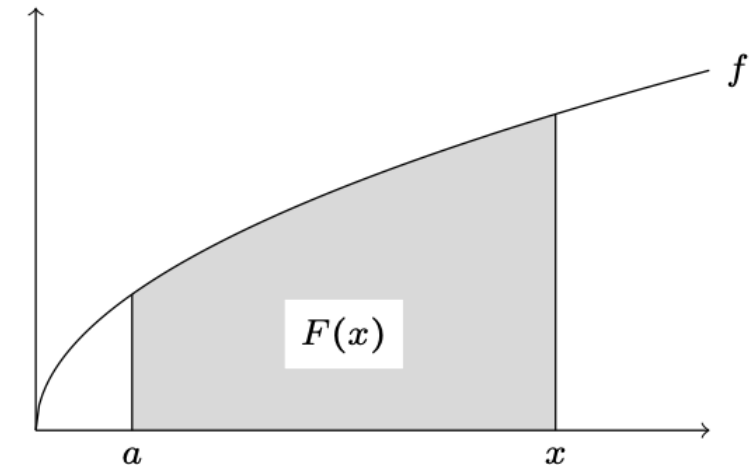
La notion de primitive

Théorème de Leibniz (*Geometria recondita* - 1686)

La fonction F , qui donne l'aire sous la courbe décrite par la fonction continue et positive f , est dérivable et

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \geq a$$

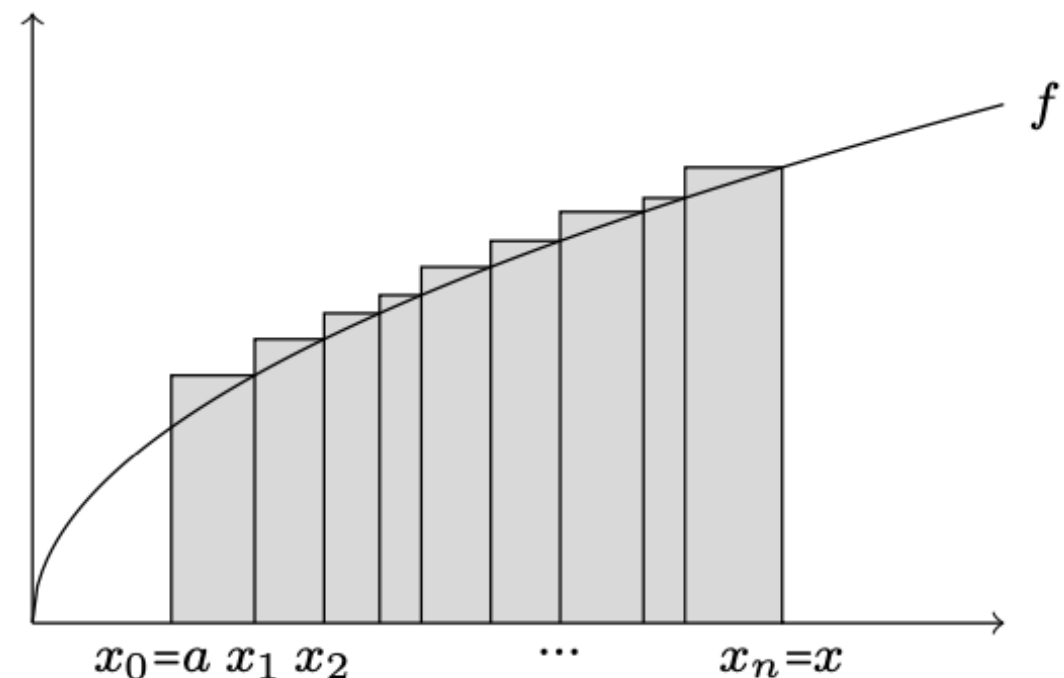
Point crucial : la fonction f est la dérivée de la fonction F .



Nomenclature : On dira qu'une fonction F est une **primitive** d'une fonction f si

$$F'(t) = f(t) \quad \forall t \in [a, x] \cap \mathcal{D}_f.$$

En utilisant le *principe de découpage à la Fermat*, Leibniz considère l'aire sous la courbe comme une somme des aires de rectangles « *infiniment* » petits.



Intégrale indéfinie vs intégrale définie

- ❖ Comme l'aire est donnée par une somme infinie d'aires de rectangles, Leibniz s'est servi de l'initiale du mot latin *summa*, « somme » et de l'ancien symbole *s long*, pour indiquer une **primitive de f** :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

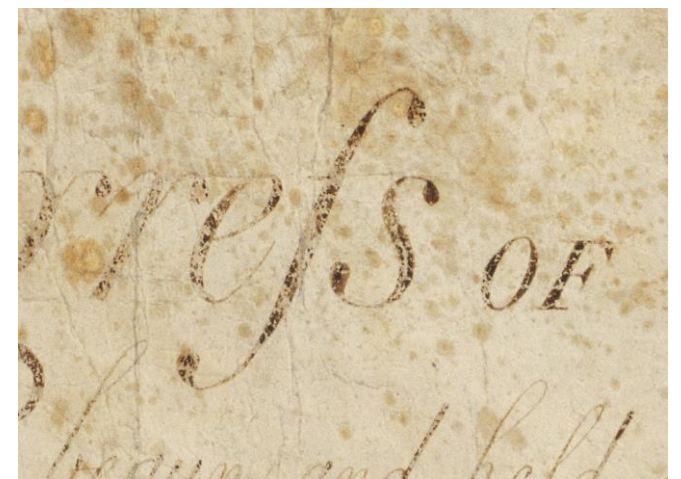
- ❖ Pour designer l'aire sous la courbe entre les deux bornes a et b , Jean Baptiste Fourier introduit la notation de l'intégrale de f entre a et b (aussi appelée **intégrale définie**) :

$$\int_a^b f(x)dx$$

- ❖ **Remarque** : Une fonction f possède en général une infinité de primitives. En effet si $F'(x) = f(x)$, alors $(F(x) + c)' = f(x)$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Nous utiliserons la notation :

$$\int f(t)dt$$

pour dénoter l'ensemble de toutes les primitives de la fonction f (**intégrale indéfinie**).



Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$, où a et b sont deux constantes réelles. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I , alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Ce théorème est extrêmement utile si nous voulons calculer l'intégrale définie de f et que nous connaissons une primitive de f . Il établit que la dérivation et l'intégration, sont réciproques l'une de l'autre et que pour calculer une aire sous la courbe représentative d'une fonction, on peut utiliser une primitive de cette fonction.

Propriétés des intégrales définies

Soit f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes telles que $a \leq b$.

1. La variable d'intégration est muette :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

2. Intégration sur un intervalle de longueur nulle :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

3. Inversion des bornes d'intégration :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4. Linéarité de l'intégrale : soient $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes, alors

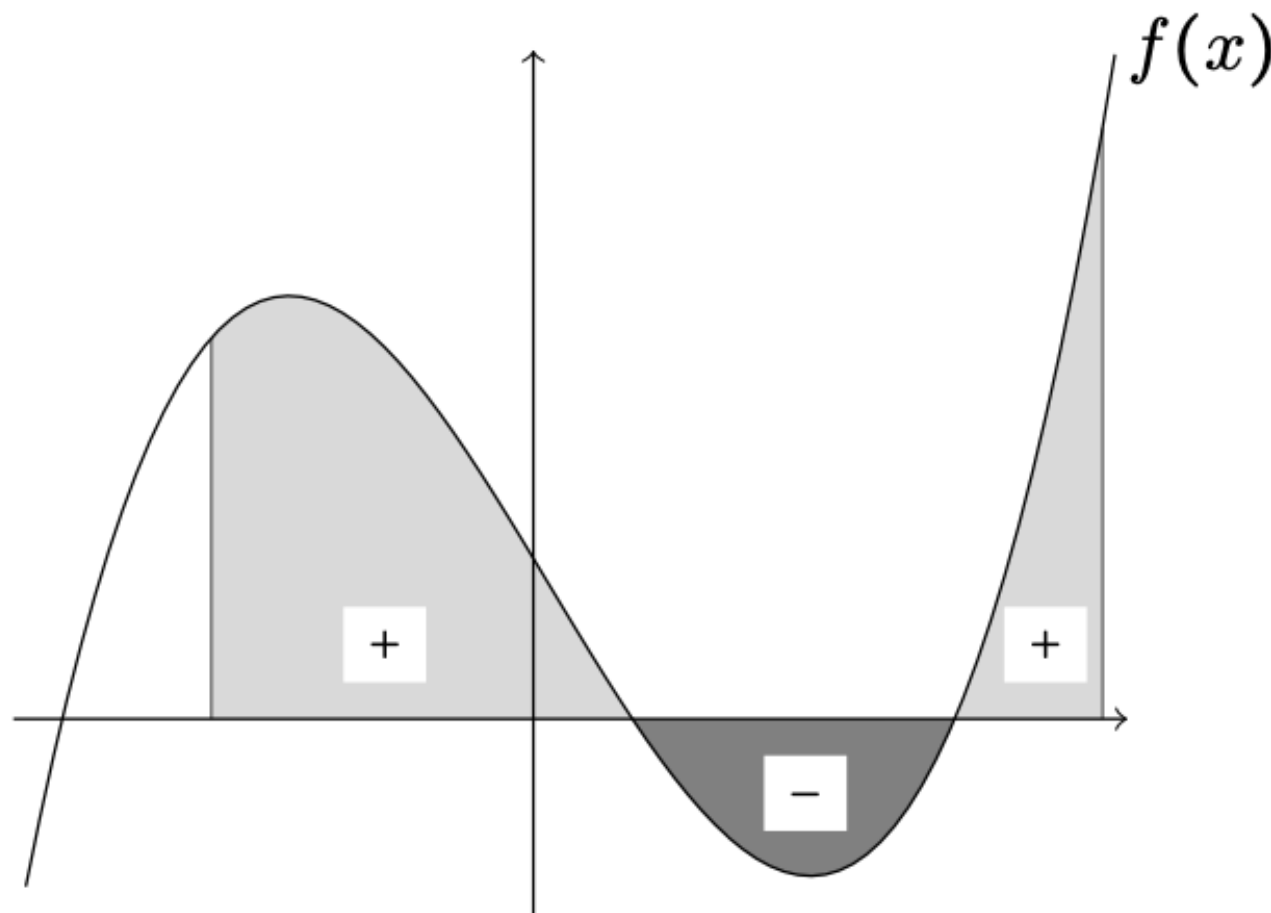
$$\int_a^b k_1 f(x) + k_2 g(x) dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx$$

5. Additivité d'un intervalle d'intégration : soit $a \leq c \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégrale = aire avec signe

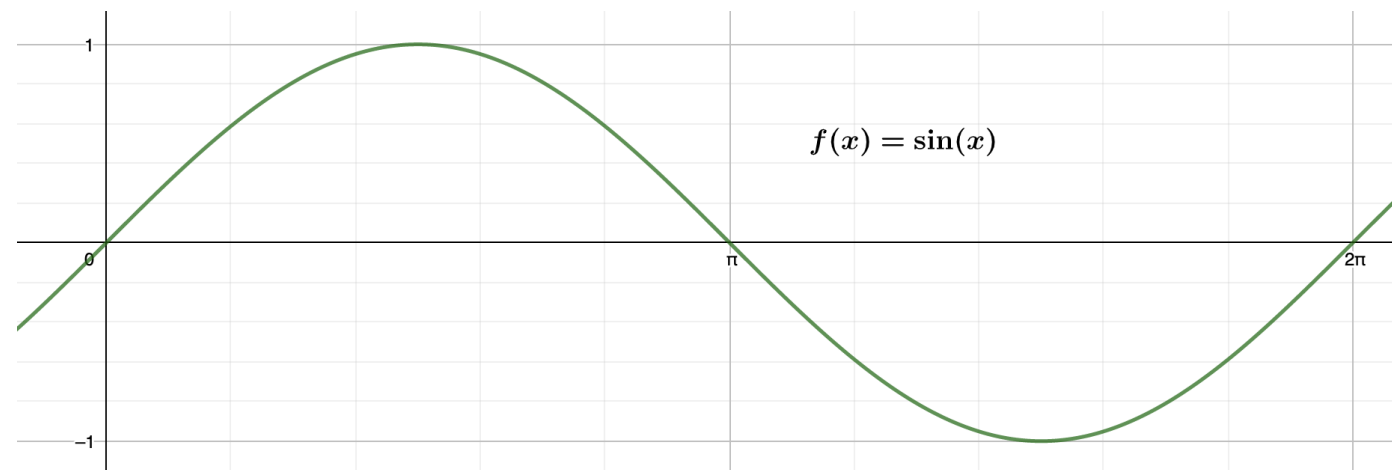
- ❖ Lorsqu'une intégrale est interprétée comme une aire, notons que celle-ci peut être négative. La "*justification*" de Leibniz montre que l'aire entre la courbe et l'axe Ox dépend du signe de la fonction $f(x)$.
- ❖ Une surface est positive, tandis que $\int_a^b f(t)dt$ est un nombre qui peut être négatif.
- ❖ L'intégrale représente donc une *aire avec signe*.



Exercice

Évaluer les deux intégrales définies suivantes :

a) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$



b) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx$

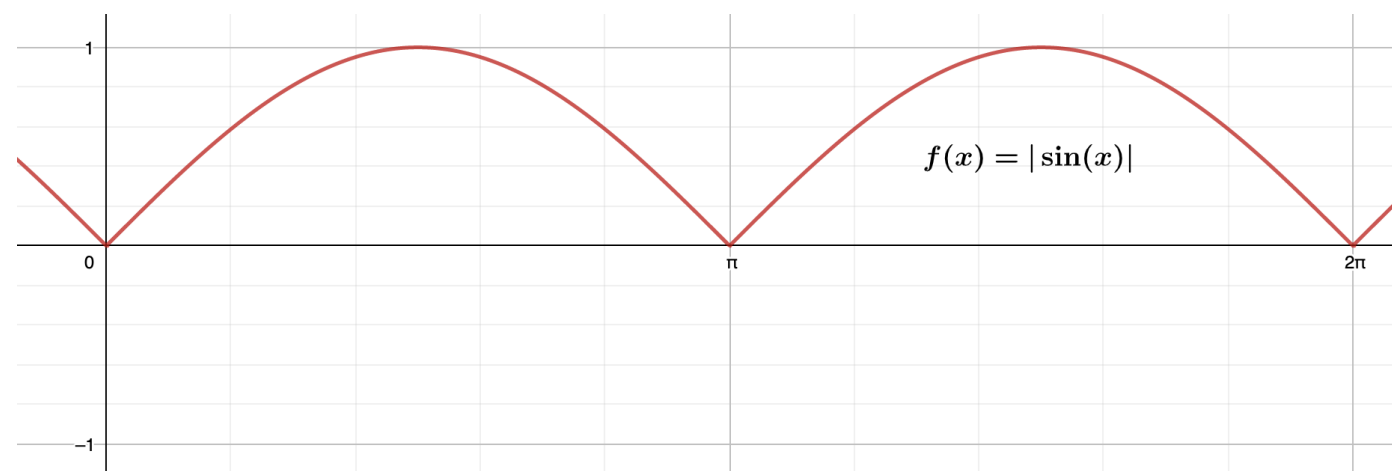


Table de primitives

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln(b)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (\text{if } a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

Expression de F	Expression de F'
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\argch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\argsh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\argth(x)$	$\frac{1}{1-t^2}$

Calcul de l'aire entre deux courbes

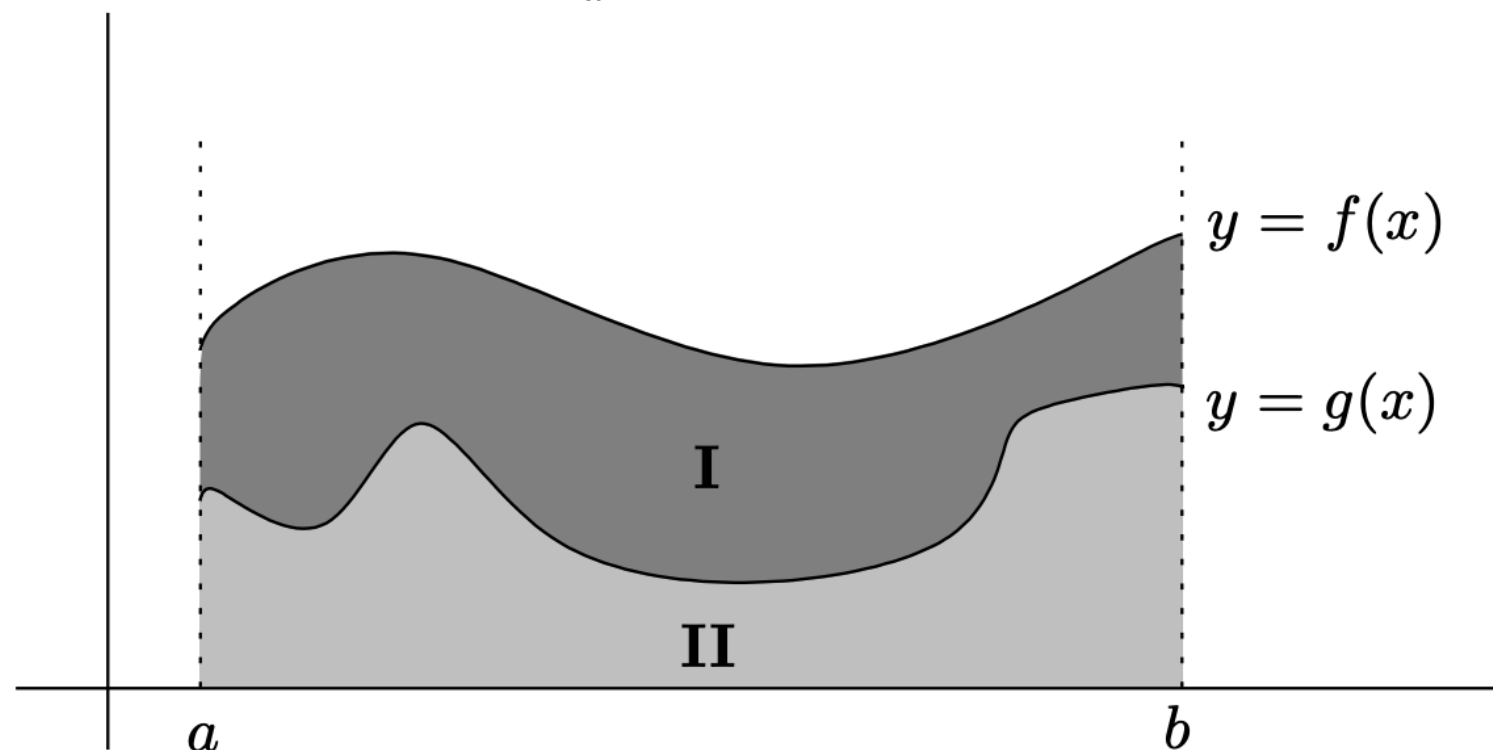
Supposons que nous avons deux courbes définies par $y = f(x)$ et $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions continues.

- ❖ Si les deux courbes sont l'une au-dessus de l'autre (par exemple $f(x) \geq g(x)$), alors l'aire de la région entre les courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ est

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

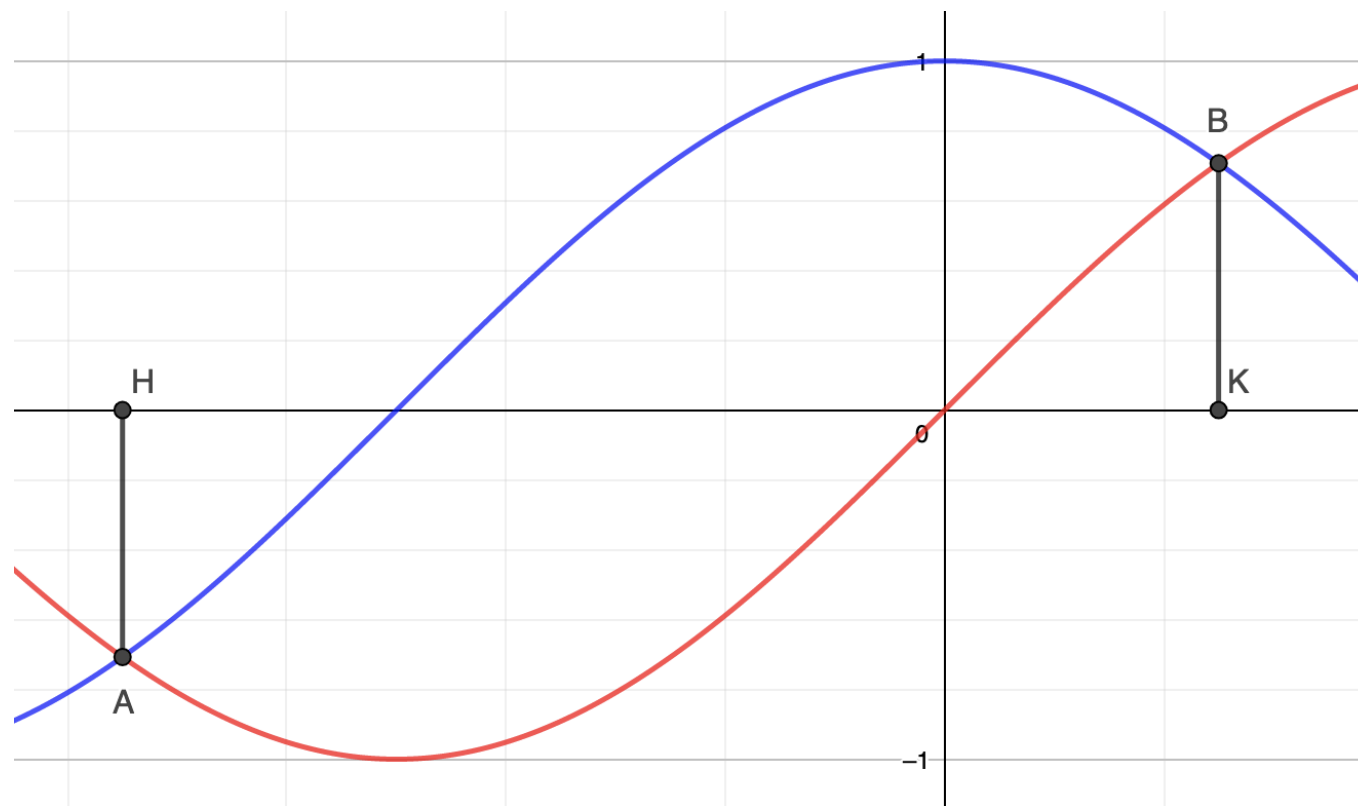
- ❖ En général, l'aire de la région entre les courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Exercice

Calculer l'aire de la surface comprise entre les courbes décrites par les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.



L'intégration par substitution

L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la fonction composée de deux fonctions.

Le but de cette technique est de simplifier l'intégrande pour que l'intégrale soit plus facile à calculer, la difficulté résidant dans la *recherche de la bonne substitution*.

Théorème (changement de variable)

Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle courant les valeurs $g(a)$ et $g(b)$, alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Démonstration. Soit F une primitive de f , c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$. Considérons la fonction composée :

$$h(x) = (F \circ g)(x) = F(g(x)).$$

Par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

La fonction h est donc une primitive de la fonction $(f \circ g) \cdot g'$, ce qui implique que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dt = F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(g(a)) - F(g(b)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Exemples

Calculer les deux intégrales suivantes

a) $\int \sqrt{1 - x^2} \cdot x \, dx$

b) $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$

où $|x| < 1$, en utilisant l'intégration par substitution.

Aire du disque

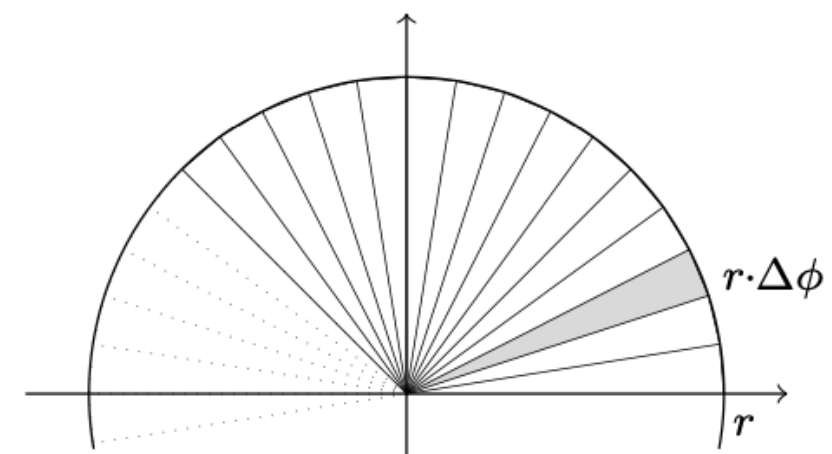
- ❖ Les travaux d'Archimède sur le calcul des aires et des volumes constituent l'apogée de la géométrie alexandrine.
- ❖ Le disque est découpé en de nombreux triangles isocèles.
- ❖ Lorsque le nombre de triangles augmente, la hauteur de chacun devient presque égale au rayon r du cercle et la base égale à $r \cdot \Delta\phi$.
- ❖ L'aire de chaque petit triangle est

$$\frac{r \cdot r \cdot \Delta\phi}{2}$$
- ❖ On fait varier l'angle entre 0 et 2π , et lorsque $\Delta\phi \rightarrow 0$ le nombre de triangles devient infini et l'aire sera calculée comme une somme infinie :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\phi = \frac{r^2}{2} \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = \frac{r^2}{2} 2\pi = \pi r^2$$



Archimède de Syracuse



Aire du disque

Approche moderne : l'équation du cercle de rayon r centré dans l'origine est

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

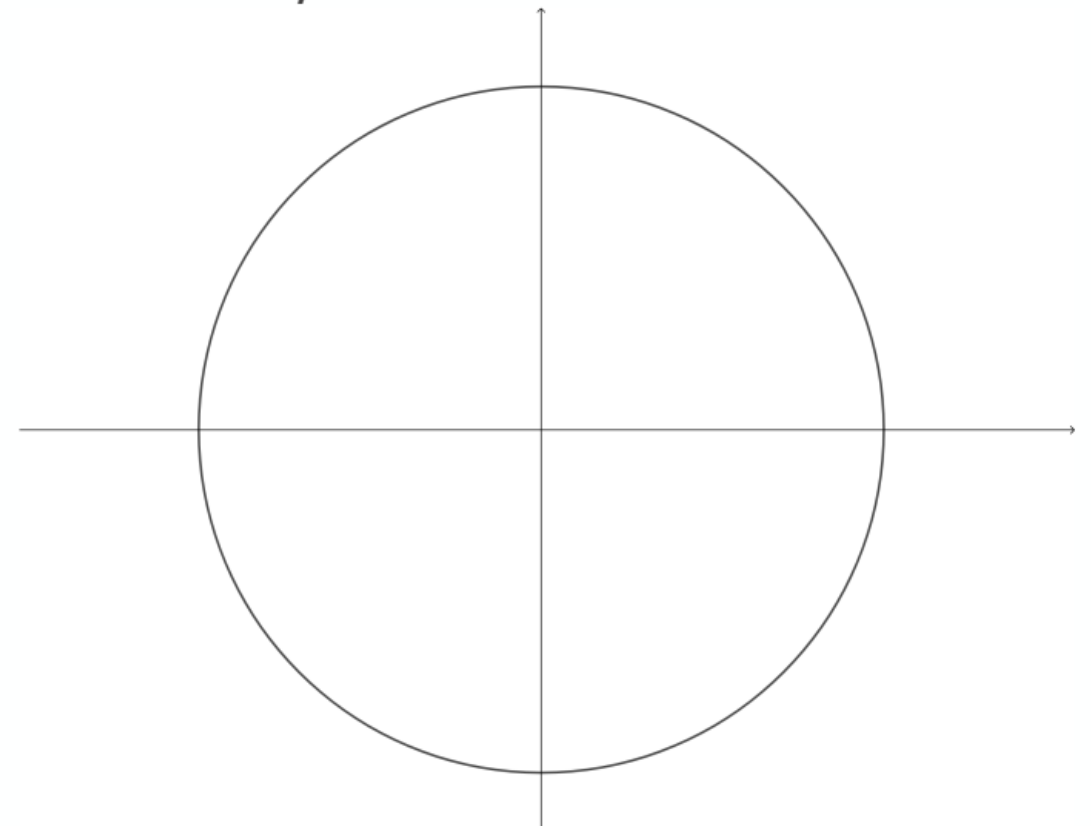
Nous pouvons calculer l'aire du demi-disque de rayon r grâce à l'intégrale suivante

$$A_{1/2} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Nous effectuons le changement de variable suivant $z = \frac{x}{r}$, alors $dz = \frac{1}{r}dx$ et

$$\begin{aligned} A_{1/2} &= \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - r^2 z^2} r dz = r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} dz \\ &= r^2 \left(\int_{-1}^0 \sqrt{1 - z^2} dz + \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz \right) \\ &= 2r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz = \frac{\pi r^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi l'aire du disque de rayon r est $A = 2 \cdot A_{1/2} = \pi r^2$.



L'intégration par parties

Théorème (formule d'intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration. La formule d'intégration par parties découle de la règle de dérivation du produit de deux fonctions. Rappelons la règle de Leibniz pour la dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

La fonction $u'v + uv'$ est donc une primitive de la fonction uv . Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, nous avons que

$$\begin{aligned} \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx &= u(x)v(x)\Big|_a^b \\ \int_a^b u'(x)v(x)dx &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx \end{aligned}$$

L'intégration par parties

Théorème (formule d'intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cas particulier : en choisissant $u'(x) = 1$ dans formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_a^b v(x)dx = x v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b x v'(x)dx$$

C'est la méthode utilisée pour obtenir l'intégrale des fonctions $\ln$, $\arctan$, $\arccos$ et $\arcsin$:

$$1. \int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$$

$$3. \int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$2. \int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$4. \int \arccos(x)dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c$$

Exercice

Calculez l'intégrale suivante de trois façons différentes :

$$\int \sin(x)\cos(x)dx$$

- a) en utilisant une identité trigonométrique (formule de l'angle double);
- b) en utilisant les techniques d'intégration par parties;
- c) en utilisant l'intégration par substitution.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Démontrer la formule de réduction suivante :

$$\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx$$

Intégration des fonctions rationnelles

Une **fonction rationnelle** est une fonction quotient de deux fonctions polynômes :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes.

- ❖ Une **décomposition en éléments simples** consiste à remplacer une expression complexe à intégrer par une somme d'expressions plus simples à manipuler, notamment en remplaçant une fonction rationnelle par une somme de fonctions rationnelles simples à intégrer.
- ❖ La primitive de f sera déterminée en trois étapes :
 1. Réduction au cas $\deg(P) < \deg(Q)$
 2. Factorisation du polynôme Q
 3. Intégration des fractions simples

Exemple

On veut évaluer $I = \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x - 1}{x^2 - 4x + 3} dx$

Intégration des fractions simples

Les fractions simples s'intègrent en utilisant les formules suivantes:

Fractions simples de 1^{ère} espèce:

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$$

Pour $n \neq 1$

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C$$

Fractions simples de 2^{ème} espèce:

$$\int \frac{1}{(x+a)^2 + b^2} dx = \frac{1}{b} \cdot \arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + C$$

$$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+d} dx = \ln|x^2+bx+d| + C$$

Intégration des fonctions rationnelles

Exemple

On veut évaluer

$$I = \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x - 1}{x^2 - 4x + 3} dx$$

Quadrature de la parabole

Théorème d'Archimède

La surface d'un arc de parabole est égale aux quatre tiers de celle du triangle inscrit.

Considérons la courbe d'équation $y = x^2$. Soient A et B deux points de cette courbe. Soit C le point tel que la tangente en ce point soit parallèle à la droite passant par A et B . Alors la surface délimitée par la courbe et le segment AB est égale à la surface du triangle, multipliée par $4/3$.

