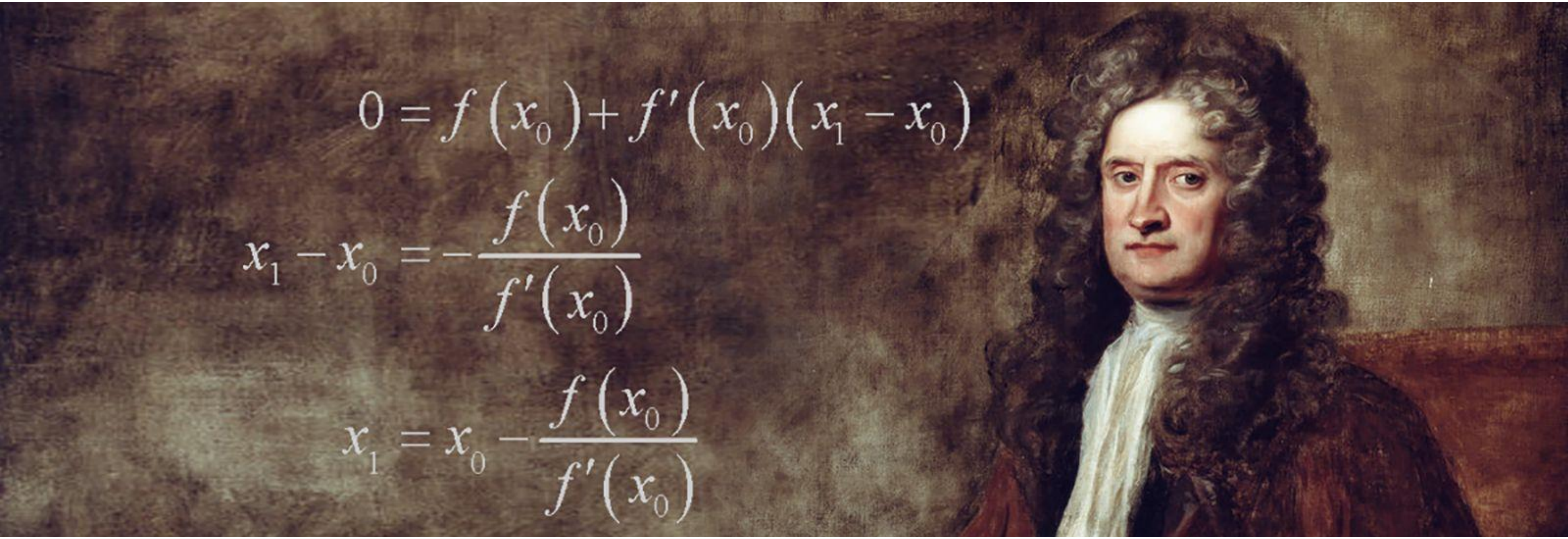


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Limites et dérivées

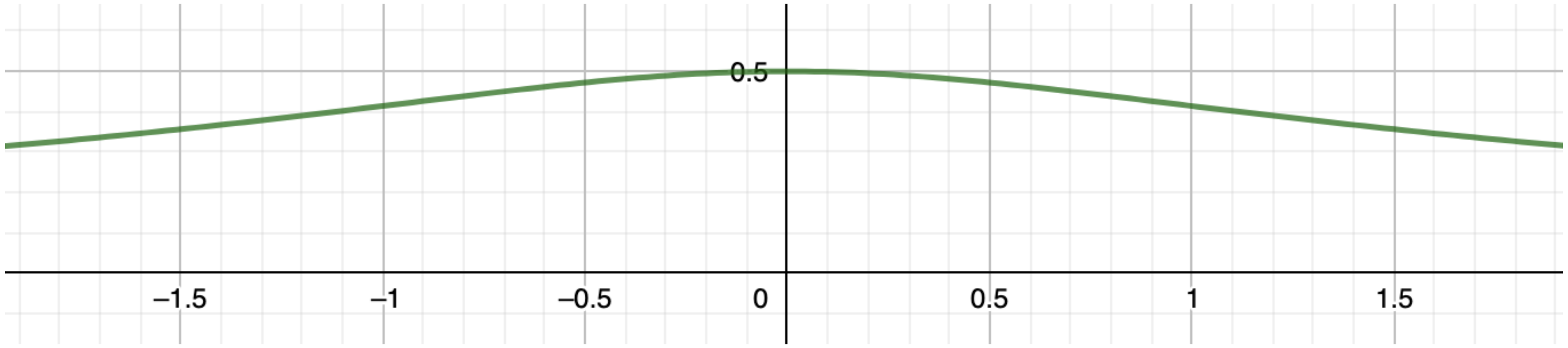
Philippe Chabloz

Limite de f au point x_0

Exemple introductif : considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}.$$

Elle n'est pas définie en $x = 0$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$) mais si on observe les valeurs de f ainsi que son graphe on constate que la fonction se comporte comme si sa valeur en $x = 0$ était égale à $1/2$.



x	$f(x)$
-0.1	0.4987562
-0.01	0.4999875
-0.001	0.4999999

x	$f(x)$
0.1	0.4987562
0.01	0.4999875
0.001	0.4999999

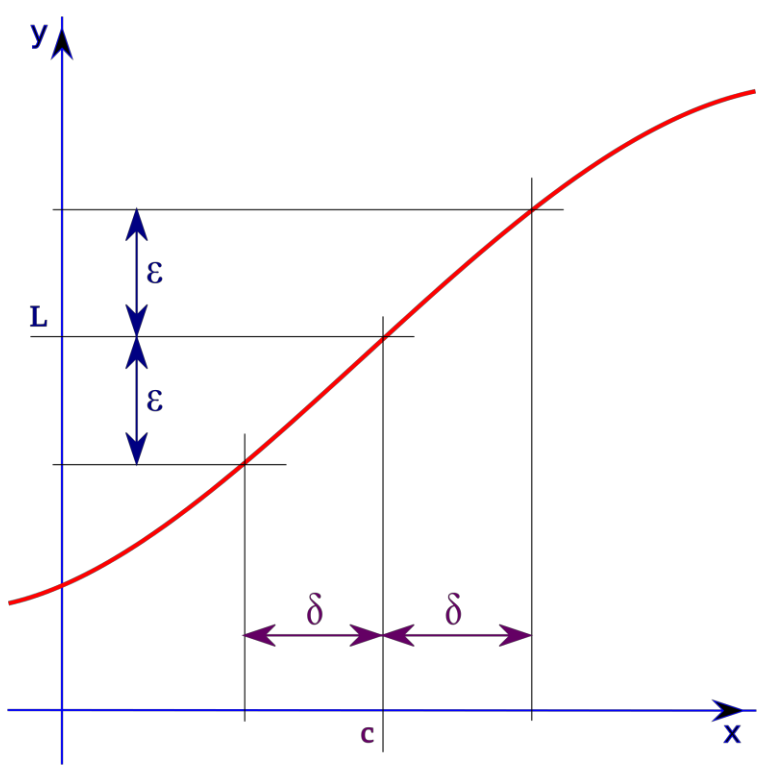
Limite d'une fonction

Supposons que f soit une fonction à valeur réelle et que c et L soient des nombres réels. *Intuitivement*, l'expression

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

signifie que $f(x)$ **peut être rendu aussi proche de** L **que souhaité, en rendant** x **suffisamment proche de** c.

Dit autrement, la fonction $f(x)$ a pour limite le nombre L quand x tend vers c si l'écart entre $f(x)$ et L finit toujours par être plus petit que n'importe quelle marge fixée, pourvu que x soit suffisamment proche de c, mais non égal à c.



(ε, δ)-définition de la limite

Augustin-Louis Cauchy et Karl Weierstrass (XIXe siècle) :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- "$f(x)$ *devient arbitrairement proche de* L" signifie que $f(x)$ se trouve finalement dans l'intervalle $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
- L'expression "*lorsque* x *s'approche de* c" indique alors que nous nous référons à des valeurs de x dont la distance par rapport à c est inférieure à un certain nombre positif δ.

Limite gauche et droite

La **limite à gauche de $f(x)$ en c** (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers c *par la gauche*) est égale à L et on note

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de c mais **strictement inférieur à** c.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f - \delta < x - c < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La **limite à droite de $f(x)$ en c** (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers c *par la droite*) est égale à L et on note

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de c mais **strictement supérieur à** c.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Propriété

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

Propriétés algébriques des limites

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies au voisinage de c, mais pas forcément en c, telles que

$$\lim_{x \to c} f(x) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to c} g(x) = L_2$$

Alors :

1. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
2. $\lim\limits_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L_1$ quel que soit $k \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

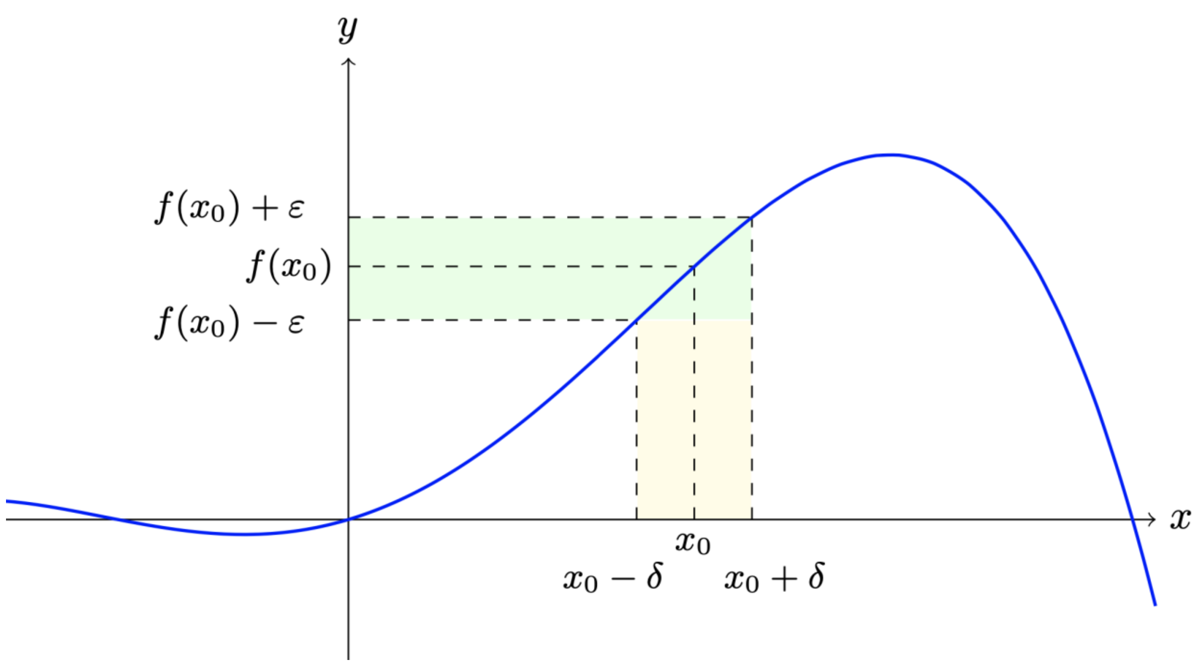
Les propriétés précédentes s'appliquent aussi aux limites à droite ou à gauche.

Continuité d'une fonction en un point

La fonction $f(x)$ peut être définie en x_0 et sa limite lorsque x tend vers x_0 simplement égale à $f(x_0)$, la valuer de la fonction en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dans un tel cas, la fonction f **est dite continue en** x_0**.**



Les fonction « *classiques* », c.-à-d. les fonctions polynomiales et rationnelles, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de ces fonctions sont continues sur leur domaine définition (c.-à-d. qu'elles sont continues en tout point de leur domaine de définition).

La fonction $f(x)$ peut être définie en x_0 mais sa limite lorsque x tend vers x_0 peut être différente de $f(x_0)$. Dans un tel cas, la fonction f **est dite discontinue en** x_0.

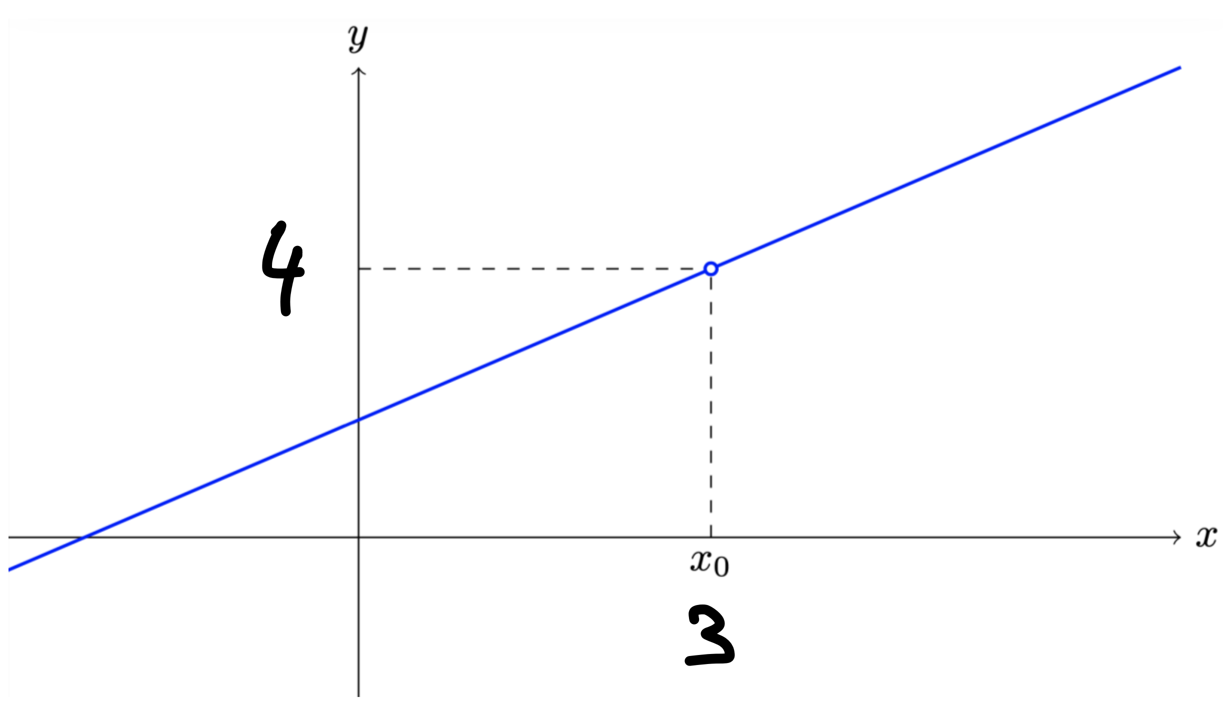
Exemples de fonctions discontinues

$\tilde{f}(x) = x + 1$

Exemple (*trou*)

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{x-3}}$$

est discontinue en $x_0 = 3$.

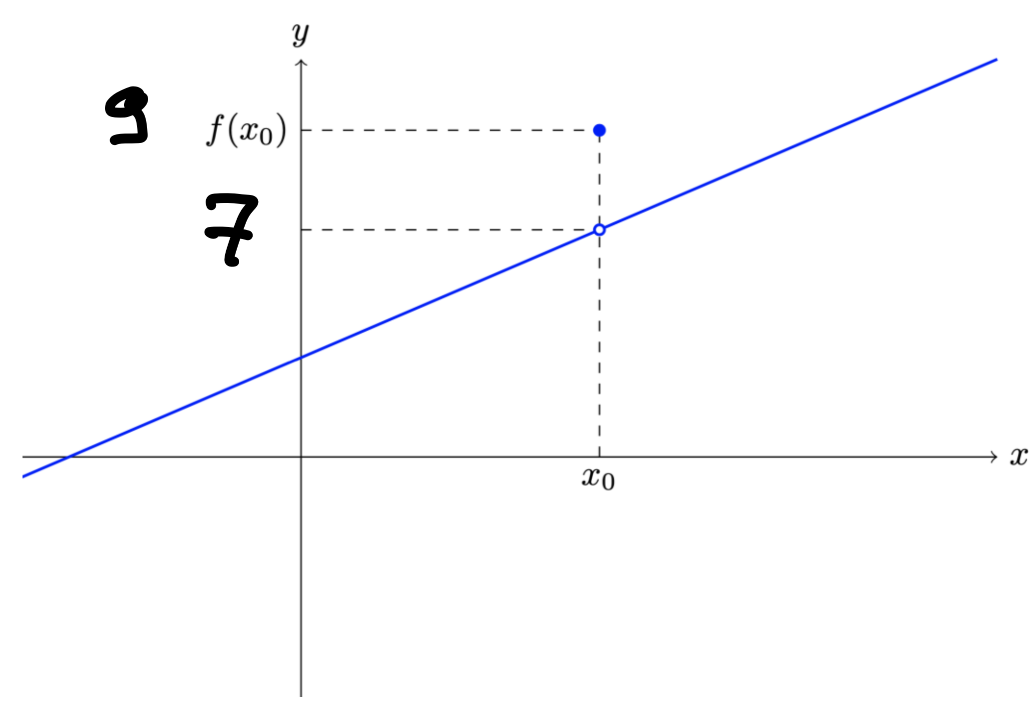


$\boxed{f(x_0) \text{ n'existe pas !}}$

Exemple (*déplacement*)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x \neq 5 \\ 9 & si\ x = 5 \end{cases}$$

est discontinue en $x_0 = 5$.



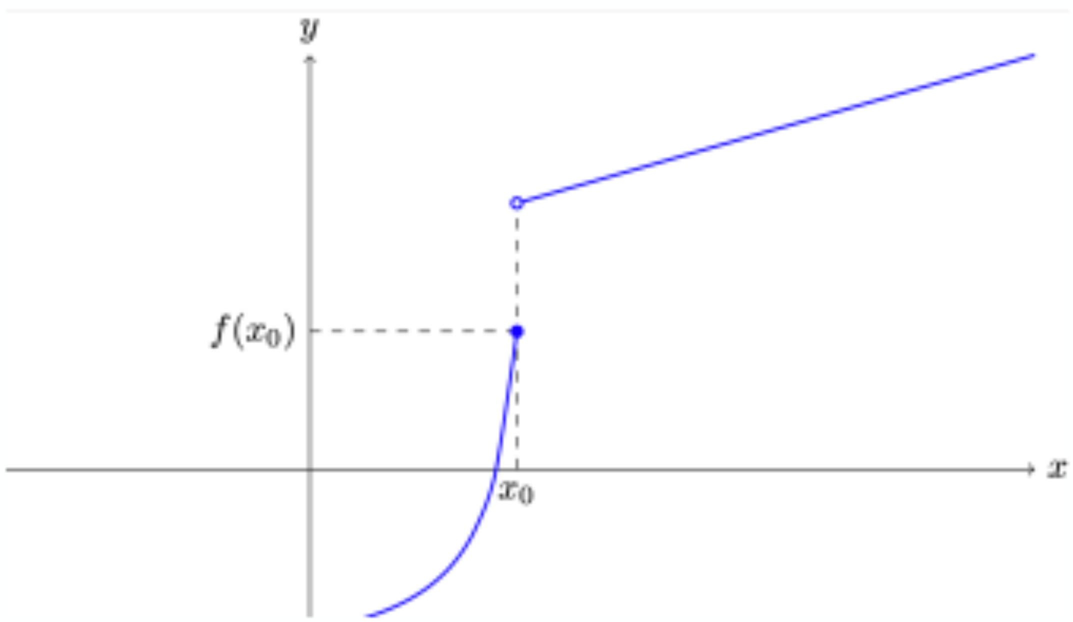
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)}$$

Discontinuités apparentes de *saut* et *infinie*

Exemple (*saut*)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

est discontinue en $x_0 = 2$.

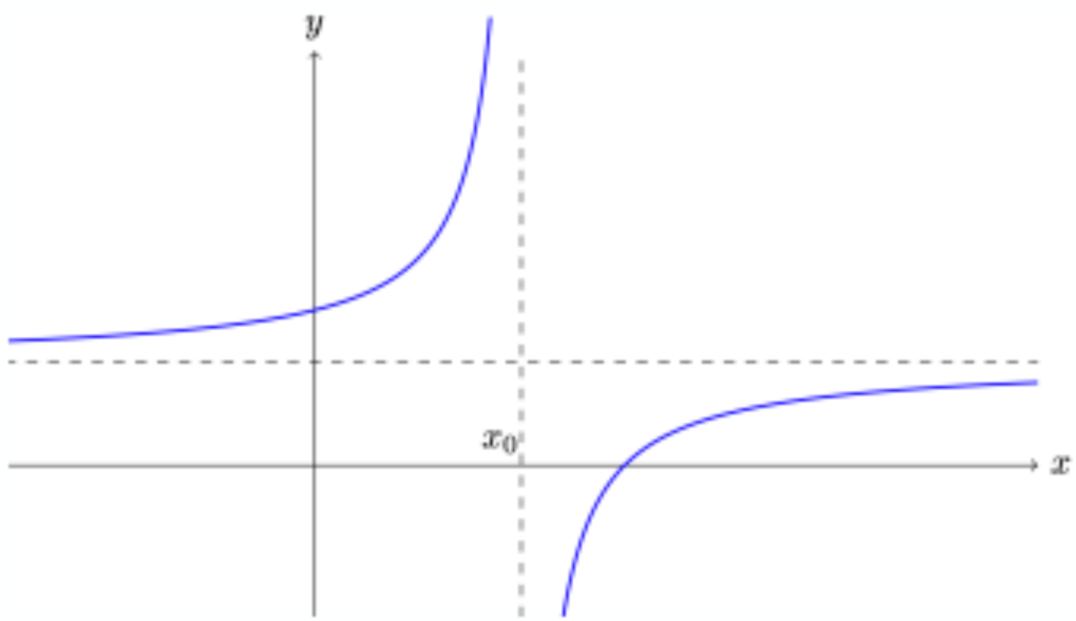


$$\boxed{\begin{array}{c} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \end{array}}$$

Exemple (*infinie*)

$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

est discontinue en $x_0 = 2$.



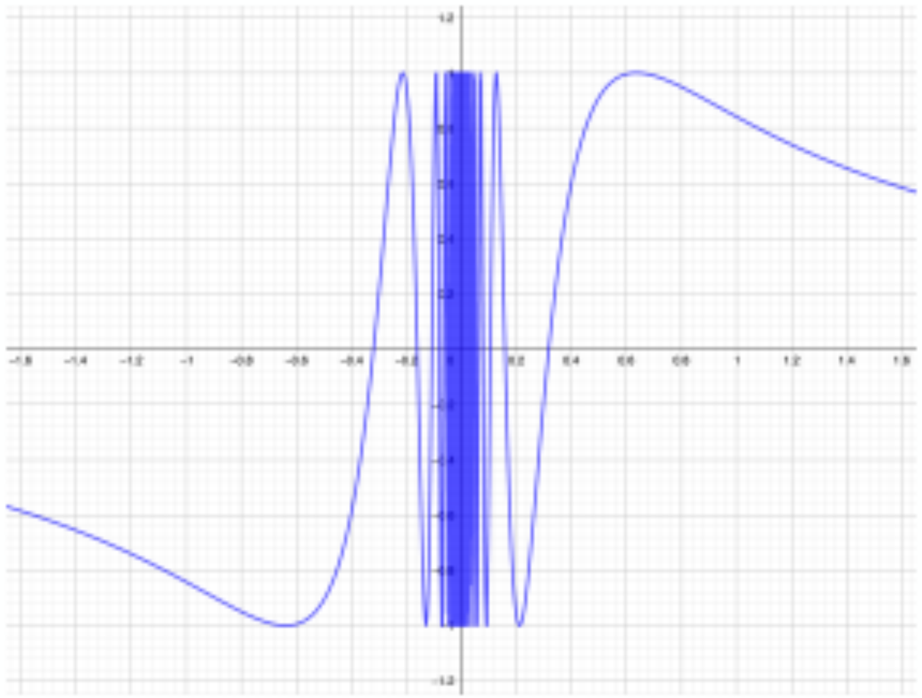
$$\boxed{\begin{array}{c} f(x_0) \text{ n'existe pas !} \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \end{array}}$$

Discontinuité
essentielle

Exemple (*Cauchy* 1821)

La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

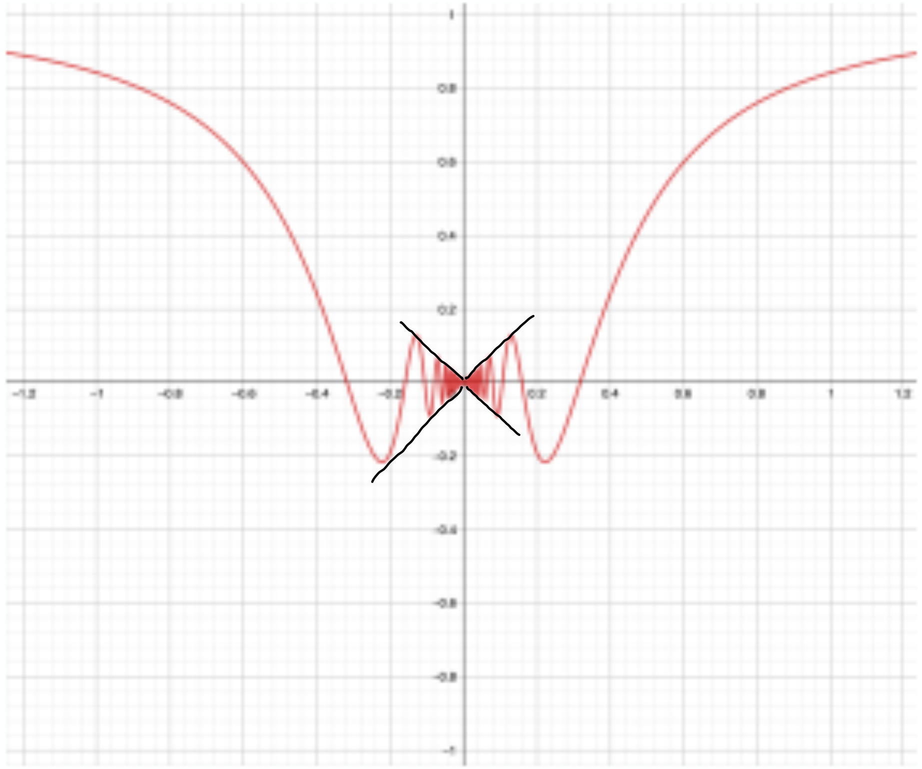
est discontinue en $x_0 = 0$ car $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ n'existent pas !



Exemple (*Weierstrass 1874*)

La fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

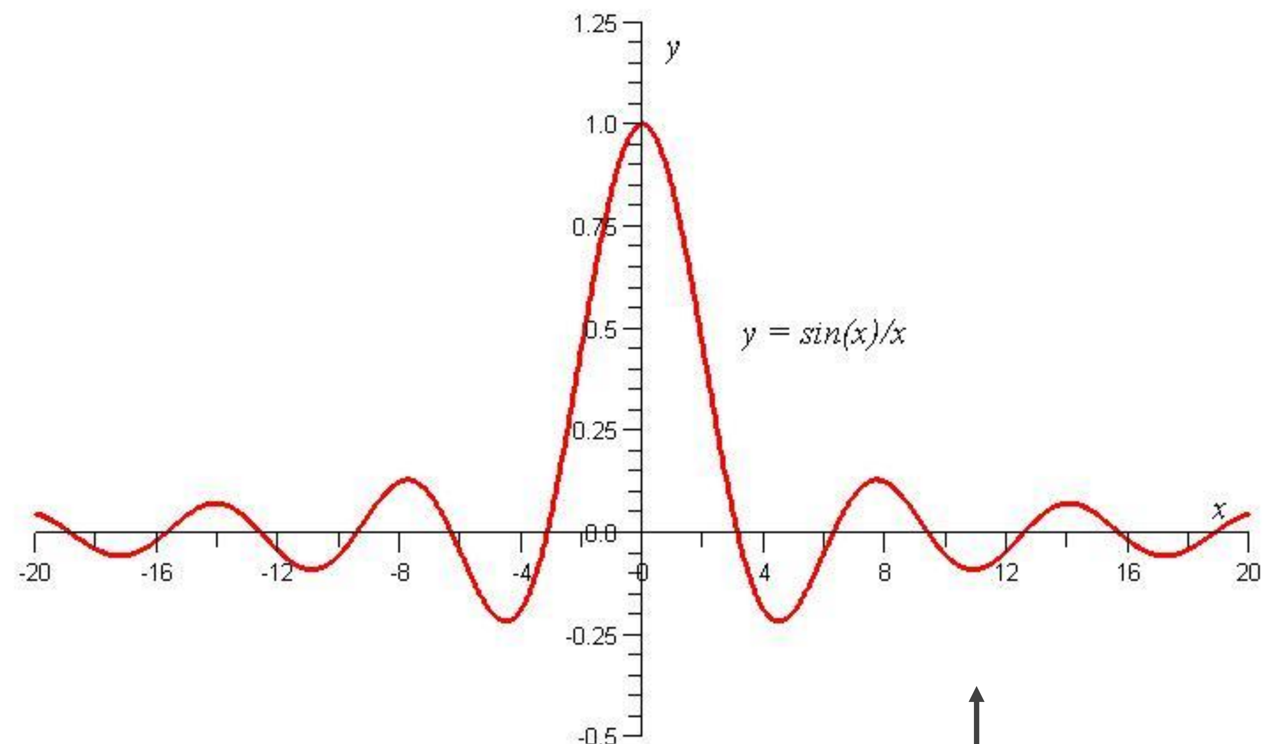
est continue en $x_0 = 0$.



Exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

$$\text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$



3 façons (au moins) de lever l'indétermination:

1. majoration
2. série de Taylor
3. règle de l'Hospital

1. Majoration : pour x petit on a

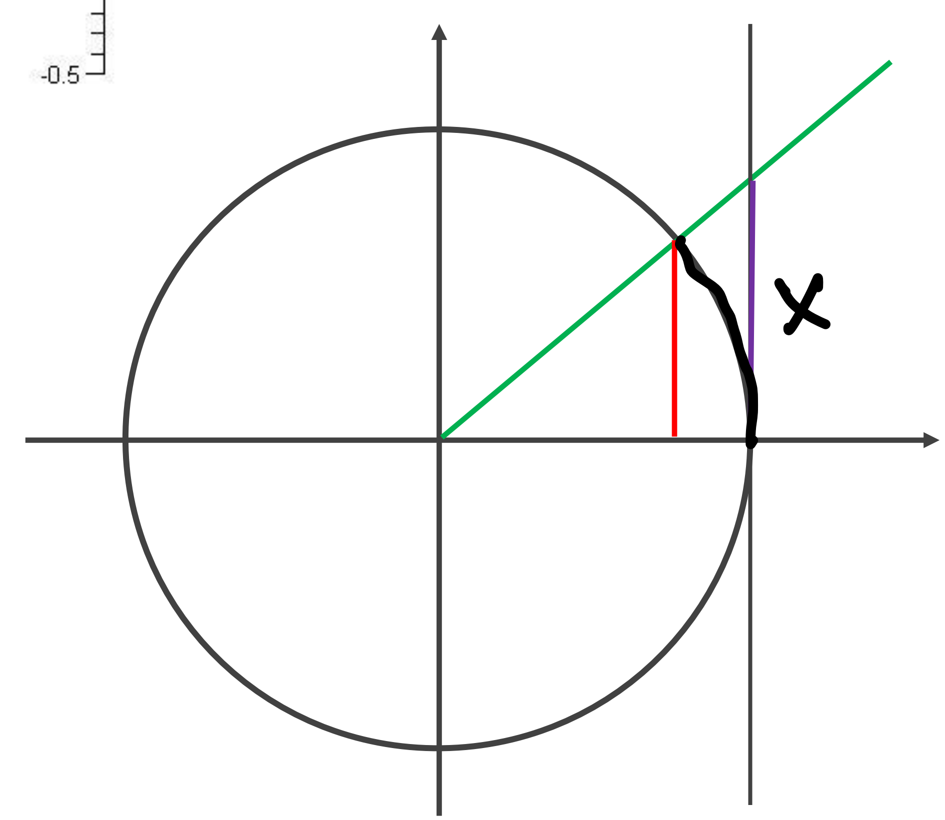
$$\boxed{\sin x < x < \tan x} \quad \| \cdot \frac{1}{\sin x}$$

En divisant par sin x on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

En faisant tendre x vers 0 on obtient, par le théorème des 2 gendarmes que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$



$$a < b$$

$\Downarrow$ faux

$$ac < bc$$

⚠

$$2 < 3 \qquad c = -4$$

$$-8 < -12$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a < b \iff ac < bc \\ \text{ssi } \; c > 0 \end{array}}$$

Exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Série de Taylor:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overbrace{x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots}}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{3\,!} + \frac{x^4}{5\,!} - \cdots}{1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)}{\cancel{x}}$$

Indétermination de type "∞ − ∞"

Calculer

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+5} - x$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+5} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+3x+5-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3+\frac{5}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left[\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+1\right]} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+1} = \frac{3}{2}$$

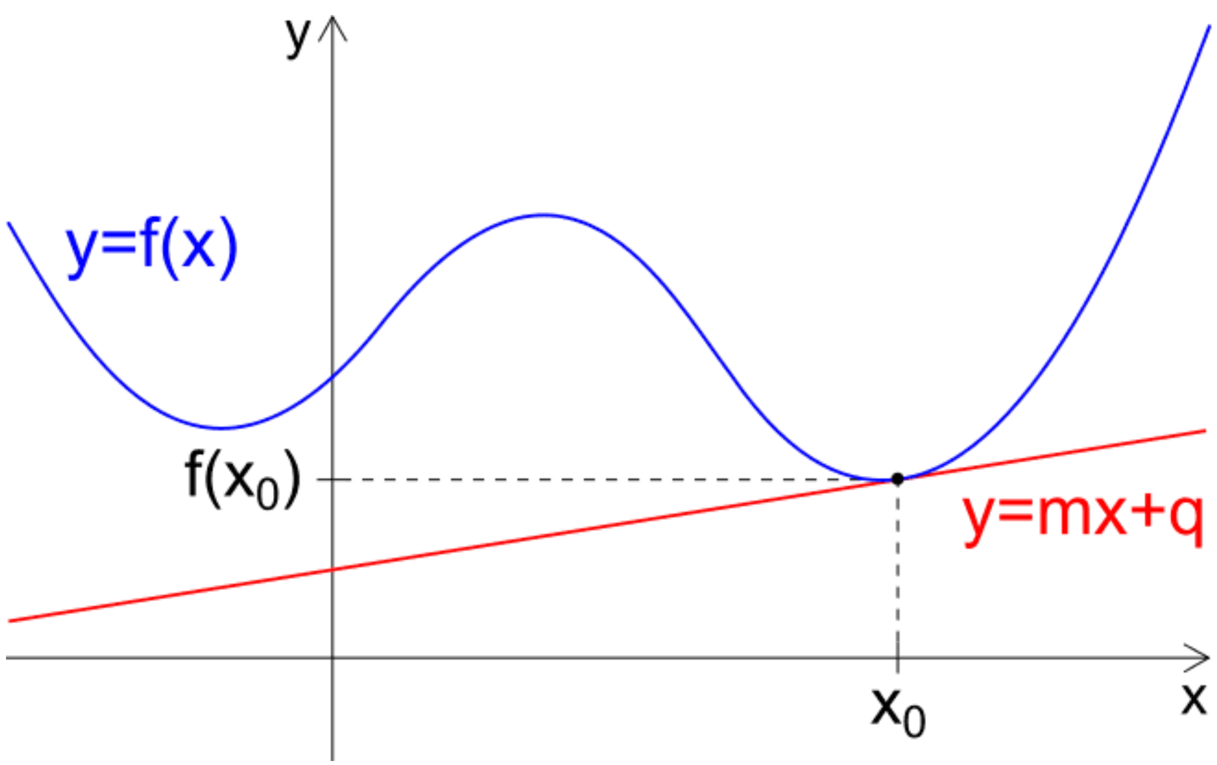
$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{(-5)^2} = 5$

Tangente à une courbe

Problème géométrique :

Étant donnés une courbe continue d'équation $y = f(x)$ et un point $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe ($x_0 \in \mathbb{R}$), nous cherchons à déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe en ce point $(x_0, f(x_0))$.



Puisque la tangente doit passer par le point $(x_0, f(x_0))$, tout ce que nous avons besoin de connaître est m : la pente de la droite.

Tangente à une courbe

Solution proposée par Newton et Leibniz (*XVIIe siècle*) :

Soit $h \in \mathbb{R}$ une *petite quantité infinitésimale*. Nous cherchons la pente de la droite sécante qui passe par le deux points :

P Q

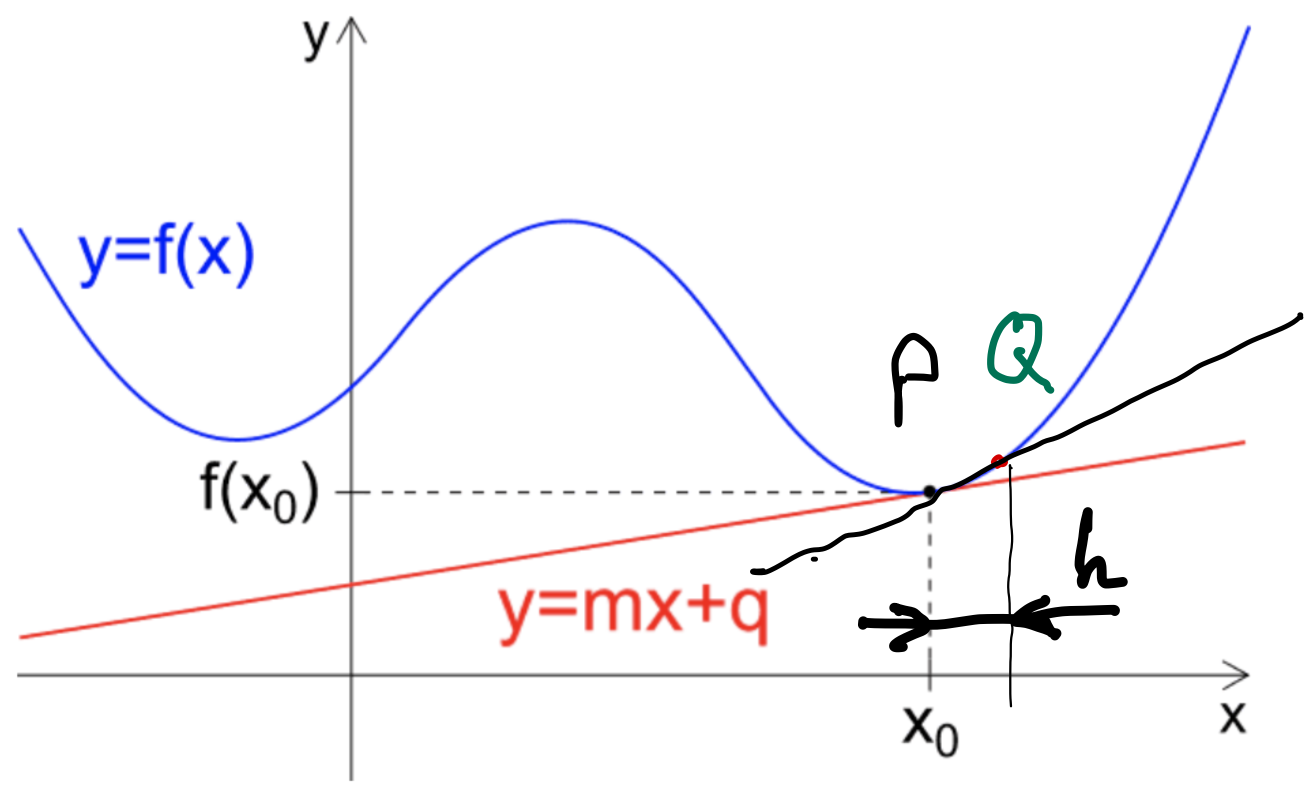
$$(x_0, f(x_0)) \text{ et } (x_0 + h, f(x_0 + h)).$$

La pente de la droite sécante vaut

$$\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

On définit la **dérivée de la fonction continue f en x_0** comme la limite de la pente des droites sécantes pour h qui tend vers 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



La dérivée

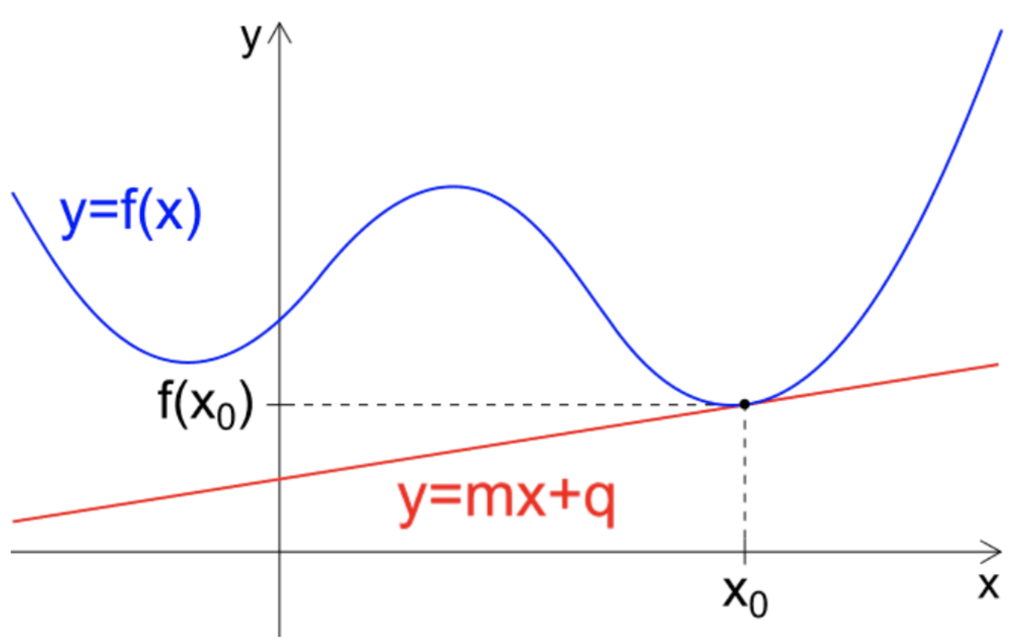
Soit une courbe décrite par une fonction continue $y = f(x)$. **La pente de la droite tangente à la courbe en un point** $(x_0, f(x_0))$ est la limite de la pente de la droite sécante qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, quand $h \in \mathbb{R}^+$ se rapproche de plus en plus de zéro, c'est-à-dire :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

Si cette limite existe, $f'(x_0)$ est appelée la **dérivée** de la fonction f en $x = x_0$ et on dit que **la fonction f est dérivable en $x = x_0$.**

Motivations pour étudier la dérivée première :

- Le calcul de l'angle d'intersection de deux courbes (Descartes).
- La construction de lunettes astronomiques (Galilée) et d'horologes (Huygens)
- La recherche de maxima et minima d'une fonction (Fermat)
- Le calcul de vitesse et de l'accélération d'un mouvement (Galilée, Newton)
- La vérification des lois de gravitation en astronomie (Kepler, Newton)



Premiers exemples

Exemple 1 : pente d'une droite

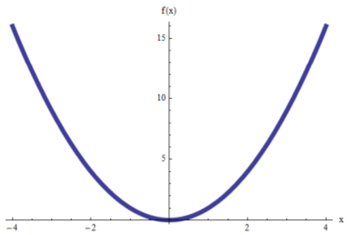
Pour vérifier que la définition précédente est correcte, nous considérons le cas le plus simple possible :

$$f(x) = ax + b \;\; où \;\; a \in \mathbb{R}^* et \;\; b \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire f représente une droite. Nous nous attendons à trouver que la pente de la droite tangente est constante et vaut a. En effet :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Exemple 2 : pente d'une parabole



Considérons une parabole décrite par l'expression $f(x) = x^2$.

Nous nous attendons à trouver que la pente de la droite tangente soit égale à 0 si x_0 est nul et elle doit augmenter au fur et à mesure que l'on s'éloigne de zéro :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2}+2x_0h+h^2-\cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Premiers exemples

Exemple 3 : dérivée de l'exponentielle. Soit $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}e^{h}-e^{x_0}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^{h}-1}{h} = e^{x_0}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

La dernière égalité vient de:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3\,!} \dots\right] - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3\,!} + \cdots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\right) = 1$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots\right)}{h}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Équation de la droite tangente

Solution au problème de la tangente :

Si la dérivée de la fonction continue f en x_0 existe, c'est-à-dire si la limite suivante existe

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

alors la tangente au graphe de la fonction $y = f(x)$ passant par le point $(x_0, f(x_0))$ est bien définie et son équation est :

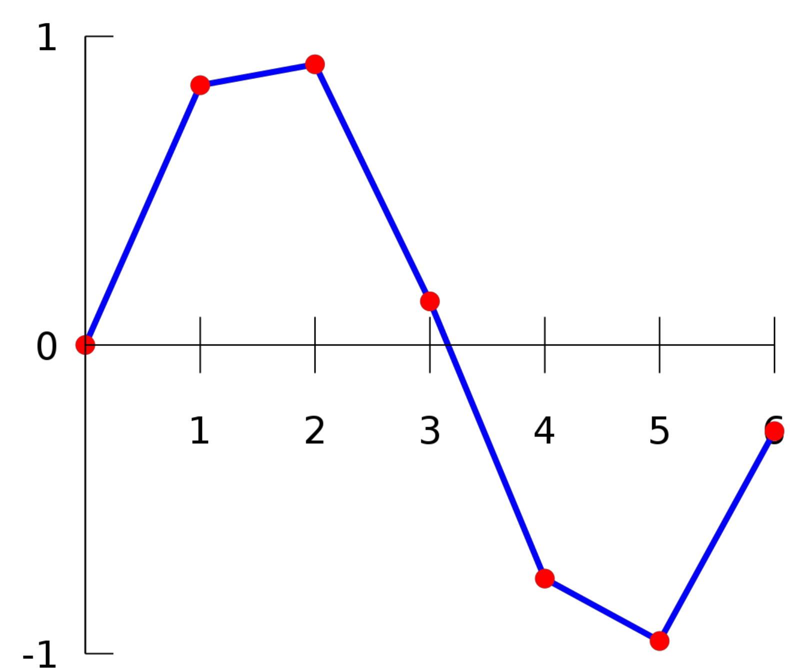
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$ $P(x_0, f(x_0))$

Soit $\mathcal{D}_f$ est le domain de la fonction f. Si pour chaque $x \in \mathcal{D}_f$ la dérivée de la fonction f en x existe on dira que **la fonction f est dérivable en $\mathcal{D}_f$** (ou *smooth* en anglais).

⚠ x_0 est fixe
x est la variable

Exemple :

La fonction représentée à droite est un exemple de fonction continue dans l'intervalle]0,6[mais non dérivable dans les points $x = 2,3,4,5$.



Règles de dérivation

Propriétés

Soient f et g deux fonctions dérivables $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes réelles. Alors :

a. La dérivée est linéaire:

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

b. Dérivée d'un produit (formule de Leibniz) :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

c. Dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

En posant $f = g$ dans la formule b on obtient

$$(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x)$$

et par récurrence:

d. Dérivée d'une puissance de f :

$$(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

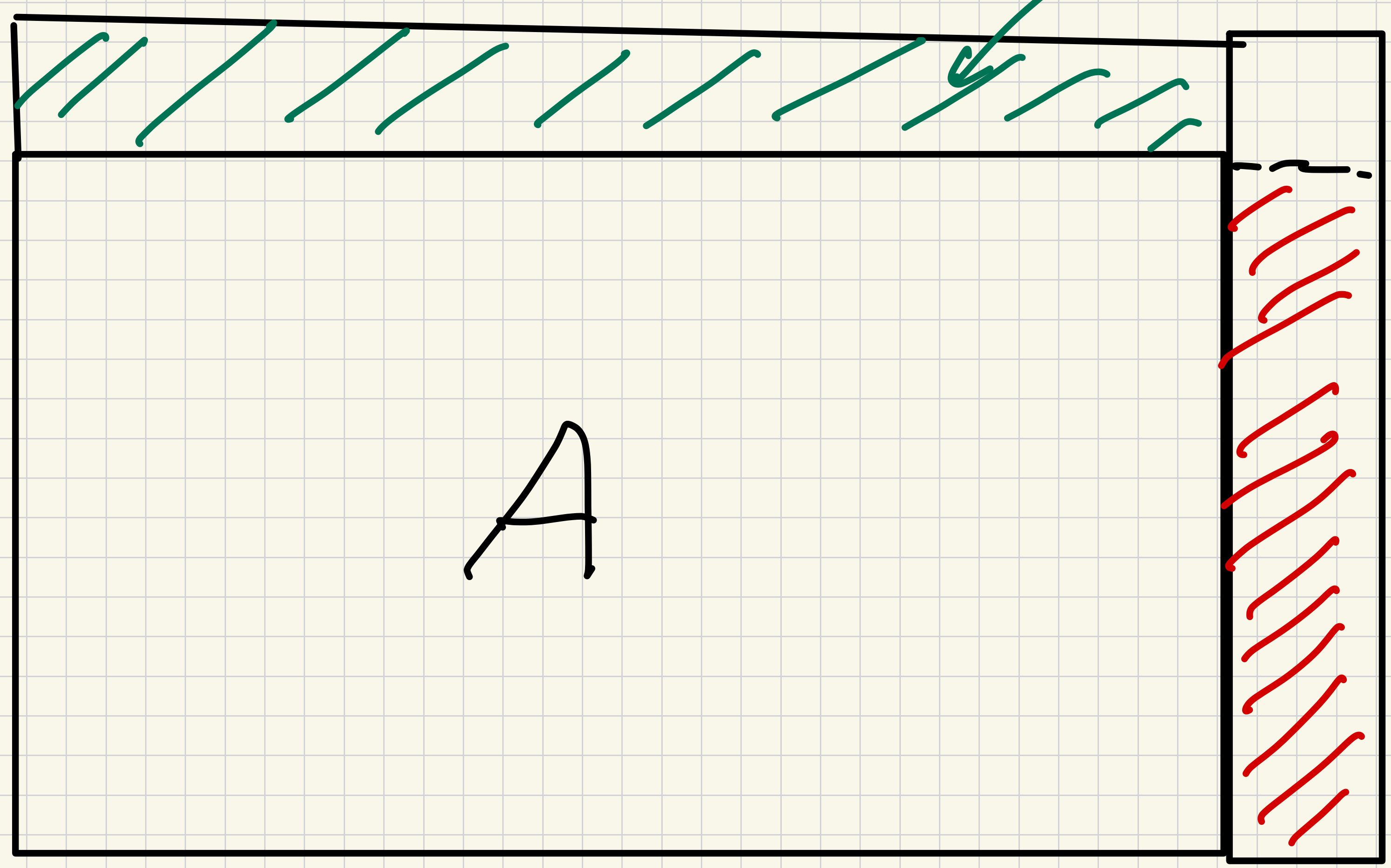
$L \cdot \Delta H$

$= L \cdot H' \Delta t$

$= \Delta H$

$H'(t) \cdot \Delta t$

$H(t)$



$H \cdot \Delta L$

$= H \cdot L' \cdot \Delta t$

$L(t)$

$\Delta L = L'(t) \Delta t$

$$A(t) = L \cdot H = L(t) \cdot H(t)$$

$$L'(t) = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\Delta A = L \cdot H' \cdot \Delta t + H \cdot L' \cdot \Delta t + L' \cdot H' (\Delta t)^2$$

$$\Delta A = H' \cdot L \,\Delta t + H \cdot L' \cdot \Delta t$$

$$+ H'L' \cdot \underbrace{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \underbrace{H'L + HL'} + (H'L' \,\Delta t)$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$A' = \frac{dA}{dt} = H'L + HL'$$

$$y = f(x)$$

Diverses notations de la dérivée

$$f'(x_0)$$

$$\frac{d}{dx} f(x_0)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Dérivée d'une composition des fonctions

Soient $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ deux fonctions, où X, Y, Z sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Ainsi $y = f(x)$ et $z = g(y)$ et soit h **une fonction composée**, formée par la composition de f et de g :

$$h: X \to Z$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Règle de dérivation des fonctions composées (*chain rule*)

Si $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ alors

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

dérivée interne.

Exemples :

1. $f(x) = ax$ et $g(y) = e^y$ où $a \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x) = g(f(x)) = e^{ax}$ et

$$h'(x) = e^{ax} \cdot a = ae^{ax}$$

2. $f(x) = ax$ et $g(y) = y^n$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $h(x) = g(f(x)) = (ax)^n$ et

$$h'(x) = na(ax)^{n-1}$$

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + \underline{(n-1) a_{n-1} x^{n-2}} + \dots + a_1$$

$$h(x) = e^{x^3 + 2x^2}$$

$$g(y) = e^y$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

$$h'(x) = \underbrace{e^{x^3+2x^2}}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(3x^2 + 4x)}_{f'(x)}$$

$$h = g \circ f$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Définition

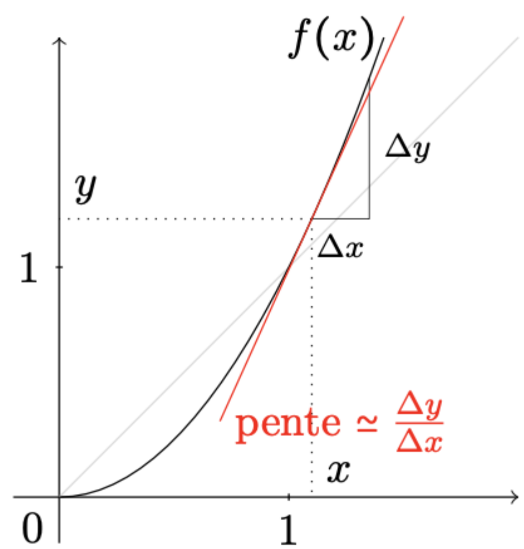
Soient X, Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $f: X \to Y$ et $g: Y \to X$ deux fonctions telles que

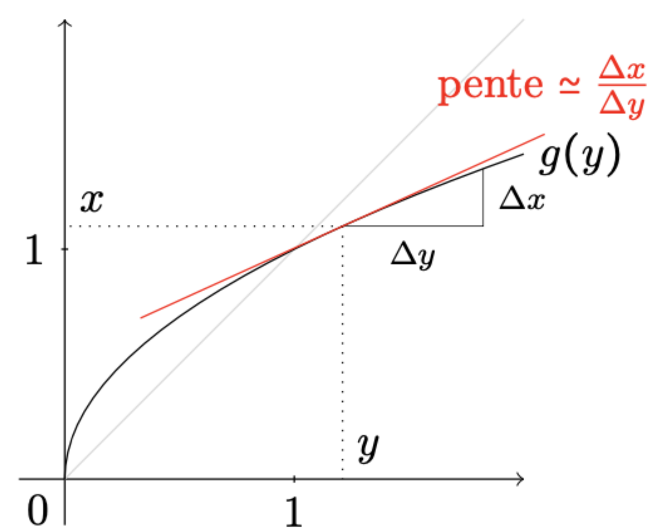
$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in Y.$$

Dans ce cas on écrit $g = f^{-1}$ et on dit que g est la **fonction réciproque** de f.

Exemples :

1. $f(x) = x^n$ et $g(y) = \sqrt[n]{y}$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. $f(x) = \cos(x)$ et $g(y) = \arccos(y)$ pour $x \in [0, \pi[$ et $y \in]-1,1]$.
3. $f(x) = e^x$ et $g(y) = \ln(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.





Règle de dérivation des fonctions réciproques

Si f est dérivable en $g(y)$, alors g est dérivable en y et

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Fonction réciproque

$f : x \to y \qquad g : y \to x$

$$f(g(y)) = y \qquad g(f(x)) = x$$

On dérive cette égalité par rapport à y en utilisant la règle de composition :

$$f'(g'(y)) \cdot g'(y) = 1 \Rightarrow$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Dérivée de e^x et de $ln(x)$

On a vu que la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est égale à elle-même :

$$f'(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque on trouve la dérivée de

$$g(y) = \ln(y)$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y)} = \frac{1}{e^{lny}} = \frac{1}{y}$$

On vient donc de démontrer que $\ln(x)$ est bien la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$

Dérivées des fonctions trigonométriques

Les dérivées des trois principales fonctions trigonométriques sont :

1. $(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Les dérivées des trois principales fonctions trigonométriques réciproques sont :

4. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$
5. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$
6. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dérivée des fonctions hyperboliques

La dérivée de la fonction sinus hyperbolique est égale au cosinus hyperbolique :

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$sh(x)$

La dérivée de la fonction cosinus hyperbolique est égale au sinus hyperbolique :

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$ch(x)$

La dérivée de la fonction tangente hyperbolique est égale à l'inverse du carré du cosinus hyperbolique :

$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$th(x)$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh' x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

Dérivées de quelques fonctions

La dérivée de la fonction exponentielle $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ $(a > 0)$. On met f sous la forme $f(x) = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a} \xrightarrow{(\,)'} \underbrace{e^{x \ln a}}_{a^x} \cdot \ln a$$

Dérivée de la fonction $\boldsymbol{f(x) = x^q}$ avec $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Alors $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ est équivalent à $\quad [f(x)]^n = x^m$

En dérivant des 2 côtés on obtient:

$$n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) = m x^{m-1}$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{(x^q)^{n-1}} = q \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{m-m/n}} = q \cdot x^{m-1-m+m/n} = q \cdot x^{\frac{m}{n}-1} = \boldsymbol{q \cdot x^{q-1}}$$

$$\boxed{(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'}$$

$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad (x^n)' = n\,x^{n-1} \cdot 1$

$= n\,x^{n-1} \qquad n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{(x^q)' = q \cdot x^{q-1}}$$

$q \in \mathbb{Q}$

$f(x) = x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Ex

$$f(x) = 2^{x}$$

$$f'(x) = 2^{x} \cdot \ln(2)$$

Dérivées de quelques fonctions

Dérivée de la fonction

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \boxed{x > 0}$$

x^{π}

On met f sous la forme $f(x) = \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

Alors

$$f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right) = x^{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

$$(\alpha \ln x)' = \alpha \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{\alpha}{x}\right)$$

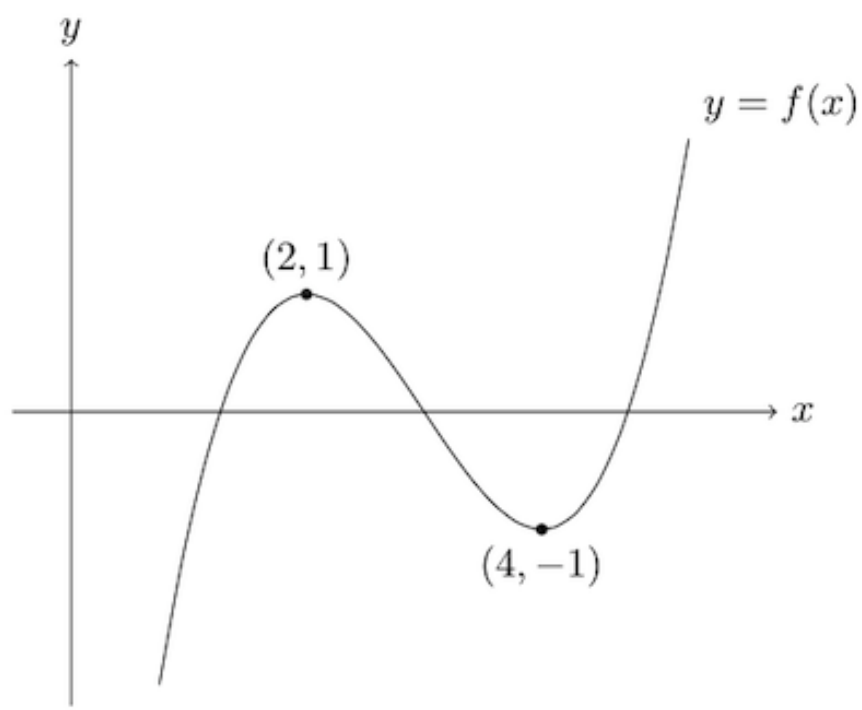
Ex : $(x^{\pi})' = \pi x^{\pi - 1}$

Dérivée et monotonie

Fonction croissante ou décroissante ?

La dérivée de la fonction continue $f(x)$ donne la pente de la tangente à la courbe représentée par l'expression $y = f(x)$. Étant donné un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nous déclarons que :

1. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **croissante** sur $]a, b[$.
2. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **décroissante** sur $]a, b[$.
3. Si $f'(x_0) = 0$ alors f a un **point stationnaire** en x_0.



Exemple :

$f'(x) > 0$ dans l'intervalle $]-\infty, 2[$

$f'(x) = 0$ en $x = 2$

$f'(x) < 0$ dans l'intervalle $]2{,}4[$

$f'(x) = 0$ en $x = 4$

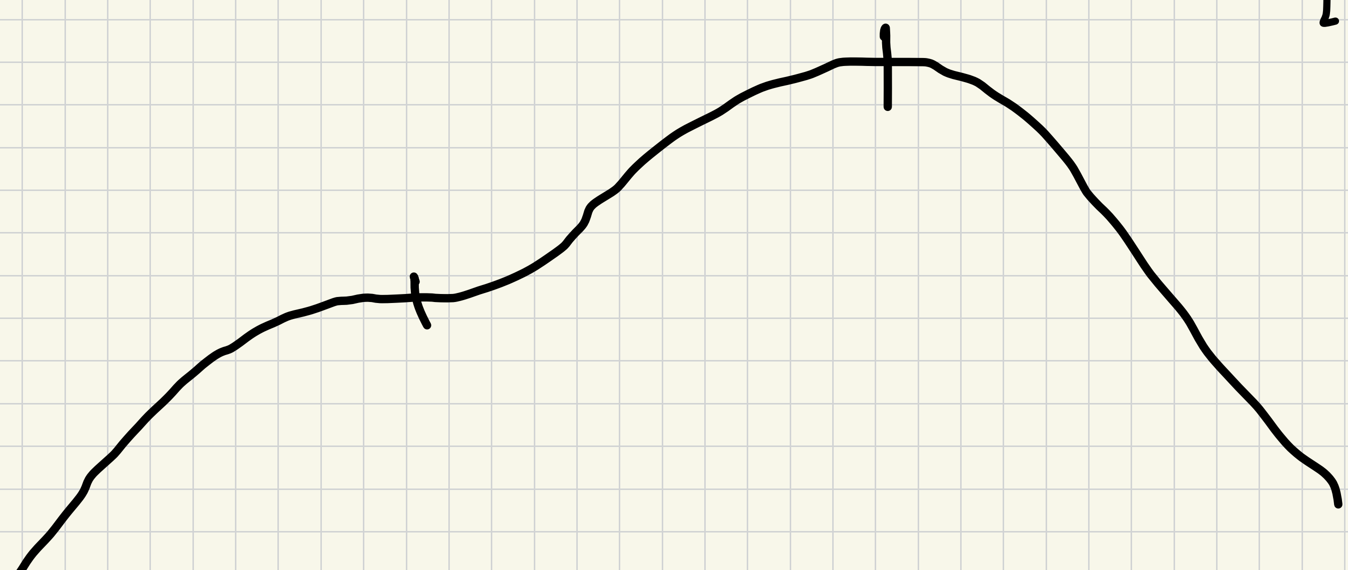
$f'(x) > 0$ dans l'intervalle $]4, +\infty[$

		$(2,1)$		$(4,-1)$	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max		min	

Tableau de signe de f'

$\Rightarrow$ croissance de f

		x_0		x_1	
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$



Règle de l'Hospital

Pour lever une indétermination dans une limite **du type** $\frac{0}{0}$ **ou** $\frac{\infty}{\infty}$ on peut utiliser la **règle de l'Hospital** qui dit que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}_{L}$$

si la seconde limite existe !

Exemples:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{n x^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n} x^{-n} = 0 \text{ pour tout } n > 0$$

$$\frac{1}{n} \quad \frac{1}{x^n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

Exemples Hospital.

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} \underset{\text{Hosp.}}{=}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^4}{x^3} \underset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{4 \cdot (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4(\ln x)^3}{3x^3} \underset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{12(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}}{9x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{12 (\ln x)^2}{9x^3} \underset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{24 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{27 x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{24 \ln x}{27 x^3} \underset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{24}{x}}{81 x^2} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{24}{81 x^3} = 0 \qquad \forall \alpha$$

$$\forall \beta > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{0}\underbrace{(\ln x)^2}_{\infty}$ "$0 \cdot \infty$"

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \ln x \, \frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}$$

$$(f^2)' = 2 f \cdot f'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2/x}{1/x^2} = \lim_{x \to 0} 2x = 0$$

Théorème

Rem

$$\underbrace{f(x)}_{\text{bornée}} \cdot \underset{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ 0}}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Sin $\underbrace{0}_{}$

$\dfrac{1}{x}$

"

$0 \cdot \text{borné} = 0$

"

Formes indéterminées

$\infty - \infty \implies \sqrt{x^2+2} - x$

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$ || Règle de l'Hospital

$\implies \frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\boxed{1^{\infty} \quad \infty^{0} \quad 0^{0}}$$

1) On applique le ln $\implies \frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

2) Règle de l'Hospital $\implies L$

3) On applique exp $\implies e^{L}$

Exemples

$$\ln\left(a^b\right) = b \ln(a)$$

1) $\lim\limits_{x \to 0} x^x \qquad \left(0^0\right)$

A) $\ln\left(x^x\right) = \underbrace{x \ln(x)}_{0 \cdot -\infty} = \dfrac{\ln(x)}{1/x} \quad \dfrac{-\infty}{\infty}$

B) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{1/x} \underset{\text{Hosp}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0}(-x)$
$= 0$

C) $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(x^x\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} x^x = e^0 = 1.$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{2}{\sin(x)}} = e^2 \quad \text{"} 1^{\infty} \text{"}$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A) $\ln (1+x)^{\frac{2}{\sin(x)}} = \frac{2}{\sin x} \ln(1+x)$

$$= \frac{2 \ln(1+x)}{\sin x} \quad \text{"} \frac{0}{0} \text{"}$$

B) $\lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1+x)}{\sin(x)} \underset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2/1+x}{\cos(x)} = 2$

$\approx x$

$\approx x$

C) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^2$

$$\lim_{x \to 0} x(\ln x)^2 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{(\ln x)^2}}$$

Compliqué

$$\|$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)^2}{1/x}$$

plus facile !!

h	h'
f^n	$n f^{n-1} \cdot f'$
e^f	$e^f \cdot f'$
$\ln(f)$	$\dfrac{f'}{f}$
$f^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$
$\sin(f)$	$\cos(f) \cdot f'$
$\cos(f)$	$-\sin(f) \cdot f'$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0 \qquad \forall \alpha \quad \forall \beta > 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\beta}}{a^{x}} = 0 \qquad \forall \beta \quad \forall a > 1$$

$$\boxed{(\ln x)^{\alpha} \ll x^{\beta} \ll a^{x}} \qquad x \to +\infty$$