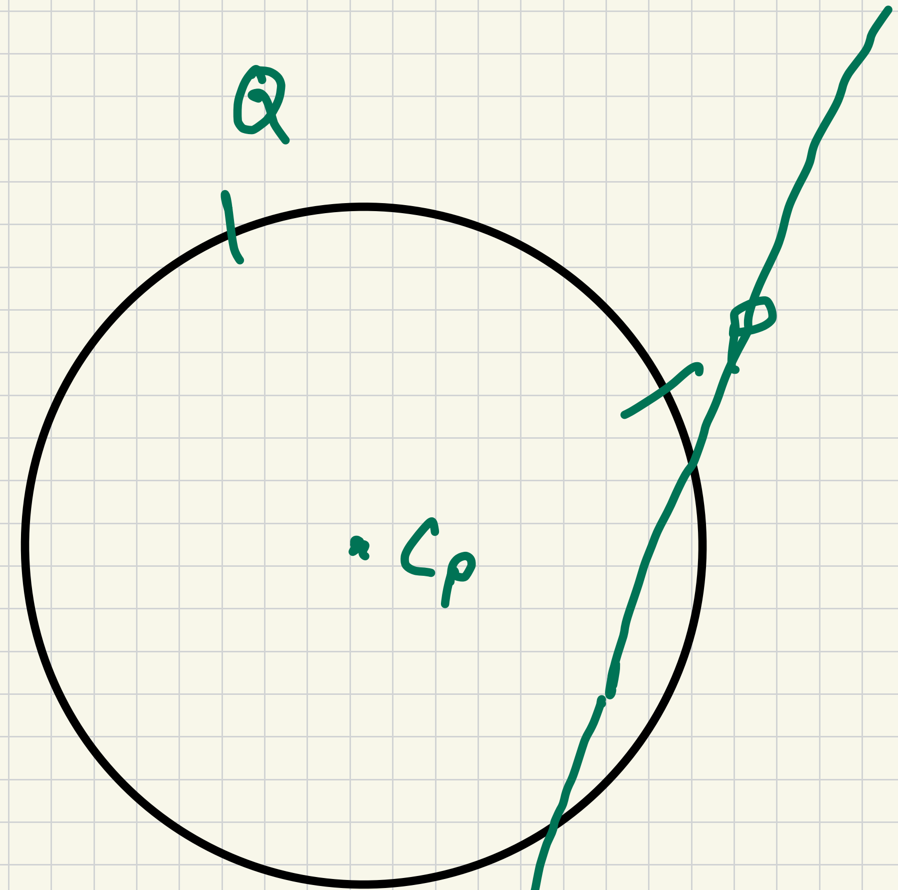
Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Longueur d'arc et développantes

Philippe Chabloz

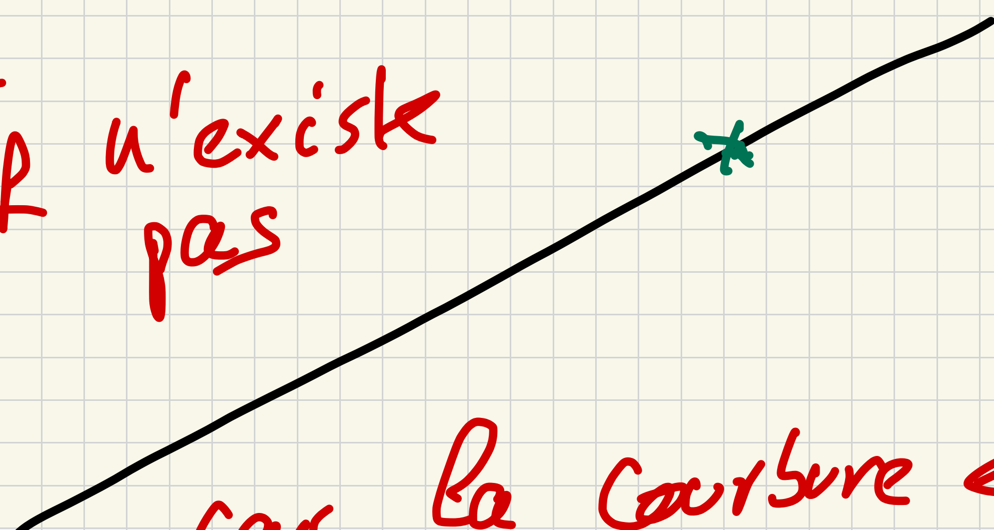
Développée de C = ensemble des centres des cercles osculateurs

1) Développée du cercle ?



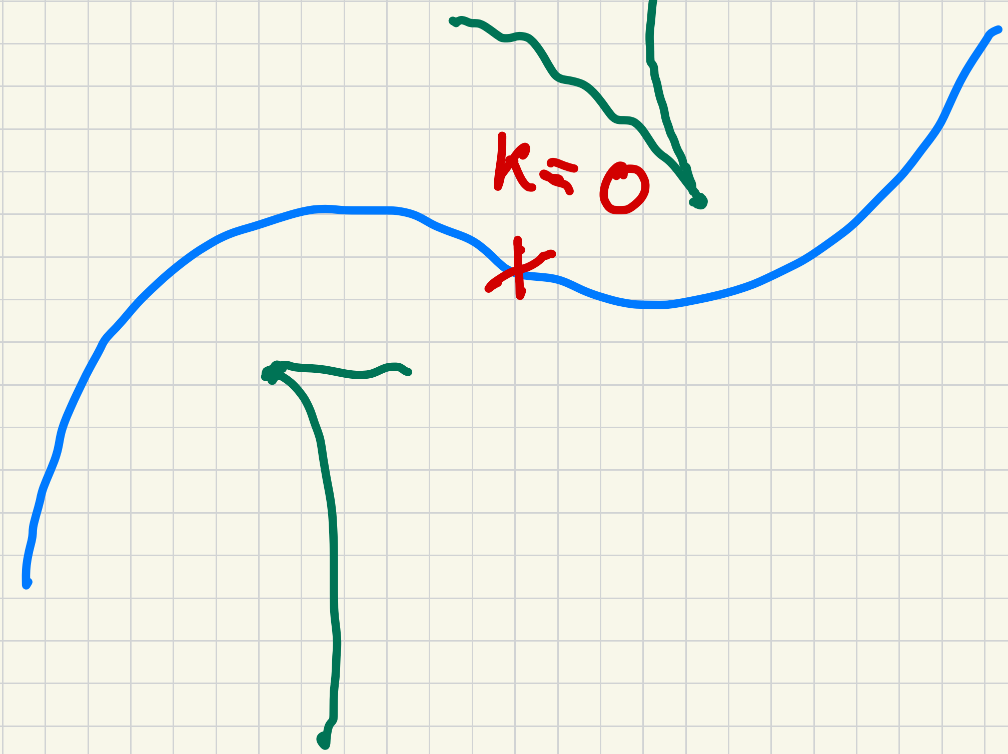
<u>Rép</u> : Le centre

2) Développée de la droite ?



<u>Rép</u> n'existe pas

car la courbure est nulle !!



Longueur d'arc

On considère une courbe C

Nous allons calculer la longueur d'une portion de cette courbe entre les deux points $P(x, y)$ et $R(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

La longueur d'arc entre P et R est approximée par Δs où

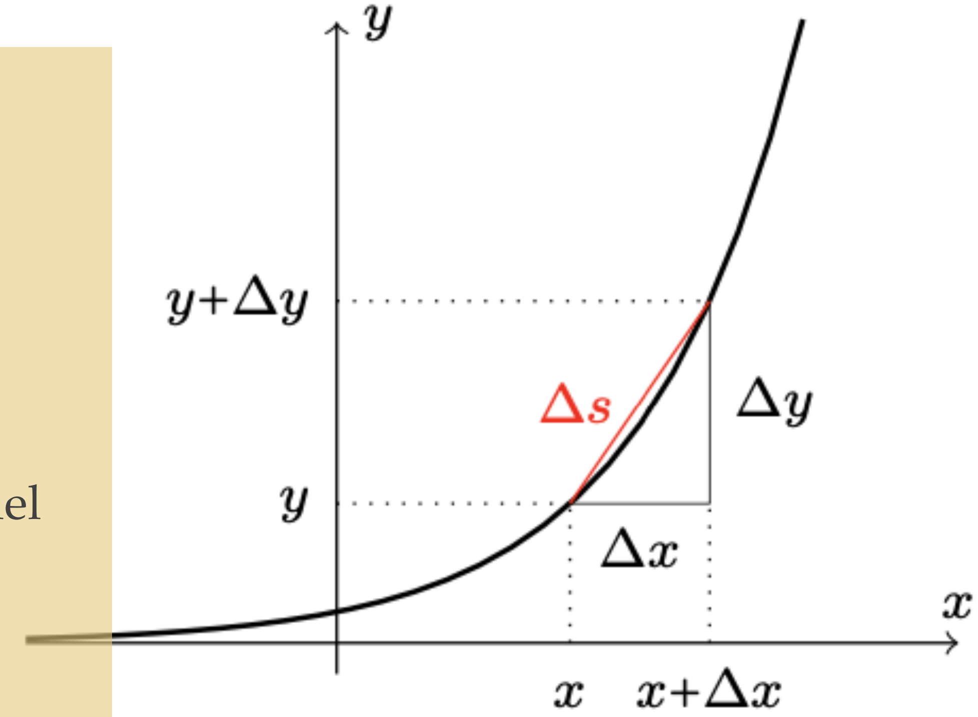
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Si on fait tendre le point R vers le point P on obtient l'élément différentiel (infiniment petit) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En **intégrant l'élément différentiel ds** sur un segment de C on obtient la longueur totale du segment

$$L = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



Longueur d’arc (forme paramétrique)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$c'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique $c(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions continues et dérivables.

La longueur de la courbe entre deux points $P(x(a), y(a))$ et $R(x(b), y(b))$, obtenus en fixant la valeur du paramètre $t = a$ et $t = b$ respectivement (avec $b > a$), est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

En effet $x = x(t)$ donne par définition de la dérivée $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ et donc $dx = x'(t)\, dt$ $= v_x(t) dx$

De même $y = y(t)$ donne $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ et donc $dy = y'(t)\, dt$ $= v_y(t) dy$

Alors l’élément différentiel de longueur d’arc ds de la courbe c vaut

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2\, dt^2 + y'(t)^2\, dt^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, |dt|$$

Formes cartésienne

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Si la courbe est donnée sous forme **cartésienne explicite** $y = f(x)$ alors on peut utiliser la paramétrisation canonique

$$\mathrm{x}(t) = t, \quad y(t) = f(t)$$

ce qui donne $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(t)$. La longueur d'un segment de la courbe vaut alors

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Exercice

Une parabole d'équation $y = x^2$ intersecte un cercle d'équation

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le cercle soit supérieure ou égale à 4 ?

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

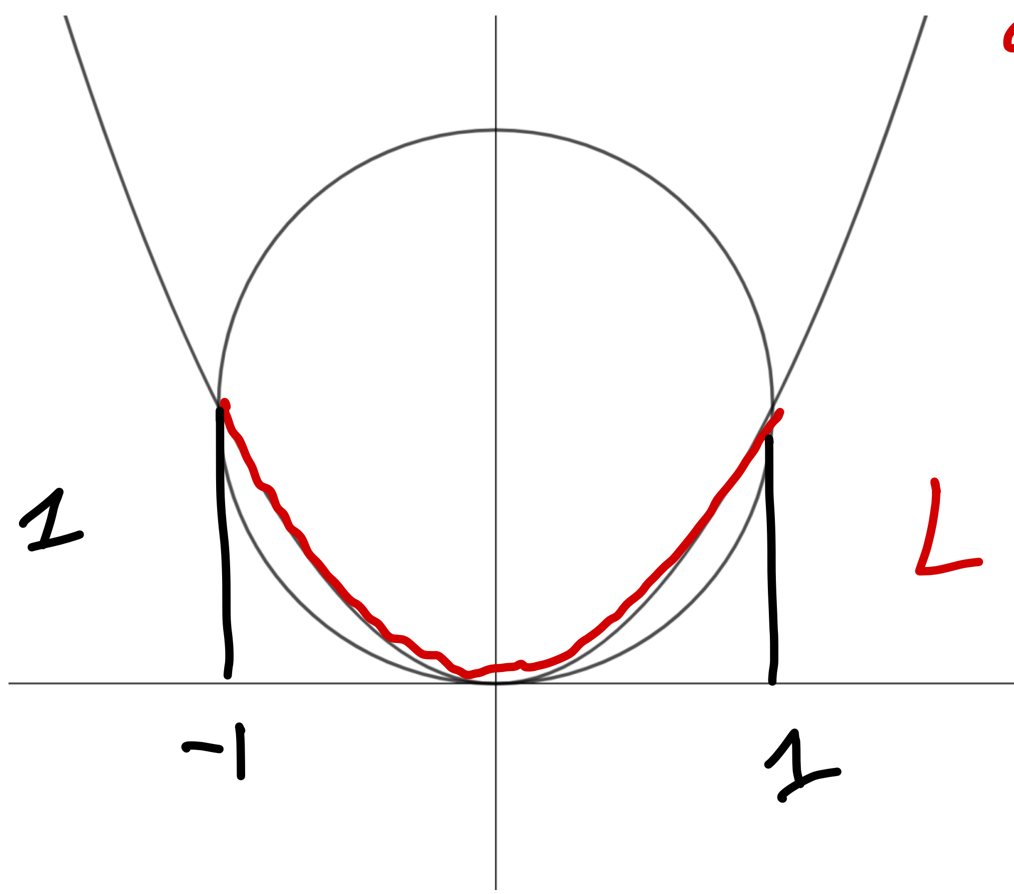
$$x^2 + (x^2-1)^2 = 1$$

$$x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = 1$$

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = \pm 1$$



$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

A) $y = \operatorname{arcsinh}(x) \iff \sinh(y) = x$

$$\iff \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = x \iff e^{y} - e^{-y} = 2x$$

$$\iff e^{2y} - 1 = 2xe^{y} \qquad u = e^{y} > 0$$

$\cdot (e^{y})$ $\qquad\qquad\qquad\qquad y = \ln(u)$

$$\iff u^2 - 2xu - 1 = 0$$

$$u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1} = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow y = \ln\big(x + \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{> |x|}\big) = \operatorname{arcsinh}(x)$$

$$\cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

B) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \underline{1}$

$\Rightarrow \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$

$\Rightarrow \cosh(x) = \underline{+\sqrt{1 + \sinh^2(x)}}$

(+) car $\cosh x > 0$ $\forall x$

C) $\sinh(2\alpha) = 2\cosh(\alpha) \cdot \sinh(\alpha)$

$\overset{(B)}{=} \underline{2 \sinh(\alpha) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha)}}$

D) $\sinh(2 \underbrace{\operatorname{arcsinh} z}_{\alpha}) \overset{(C)}{=} 2z\sqrt{1 + z^2}$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$z = 2x$

$dz = 2dx$

$$= 2 \cdot \int_0^2 \sqrt{1+z^2}\,\frac{dz}{2} = \int_0^2 \sqrt{1+z^2}\,dz$$

$z = \sinh(u)$

$dz = \cosh(u)\,du$

$$\int \sqrt{1+z^2}\,dz = \int \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2(u)}}_{= \cosh(u) \text{ par (B)}} \cosh(u)\,du =$$

$$\int \cosh^2(u)\,du = \frac{1}{2} \int 1 + \cosh(2u)\,du$$

$\cosh(2\alpha) = 2\cosh^2(\alpha) - 1$

$$= \frac{1}{2} \int 1 + \cosh(2u)\, du = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sinh(2u)\right) + C$$

$$\underset{u = \operatorname{arcsinh}(z)}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsinh}(z) + \frac{1}{2}\sinh(2\operatorname{arcsinh} z)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) + \frac{1}{4}\cdot 2 \cdot z\sqrt{1+z^2} + C$$

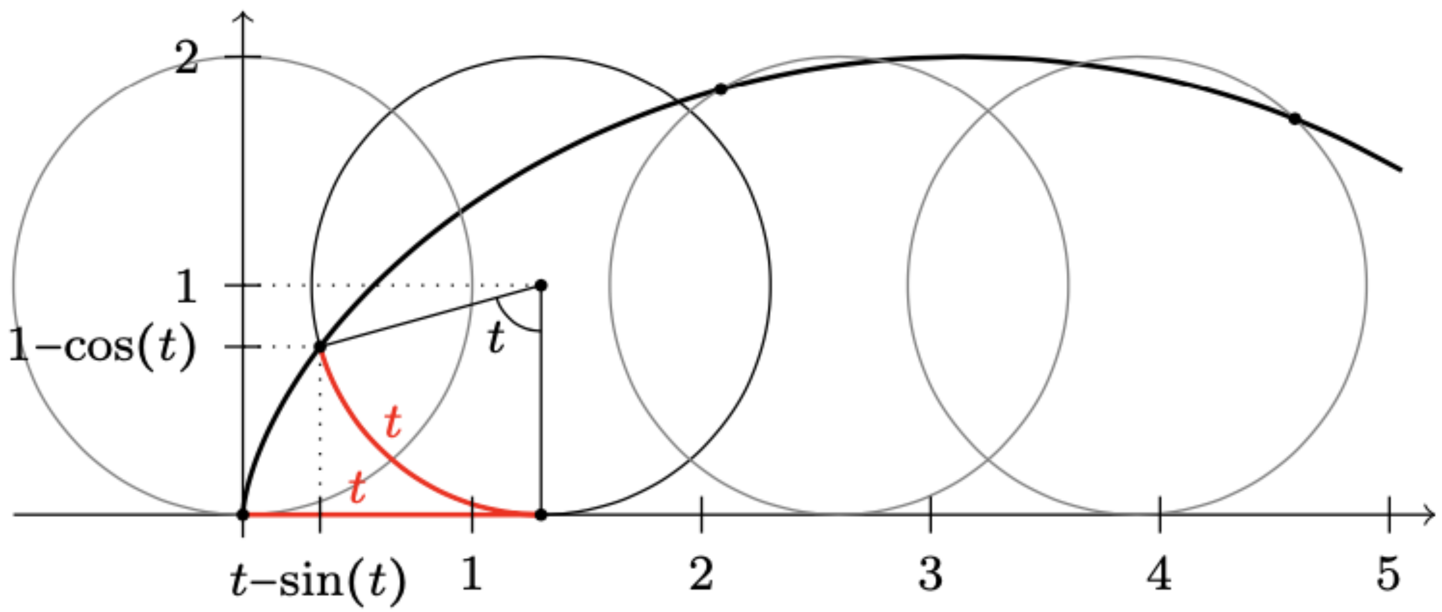
(A) + (D)

$$= \frac{1}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) + \frac{1}{2} z\sqrt{1+z^2} + C$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+z^2}\, dz = \frac{1}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) + \frac{1}{2} z\sqrt{1+z^2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \approx 2{,}95$$

Longueur de la cycloïde



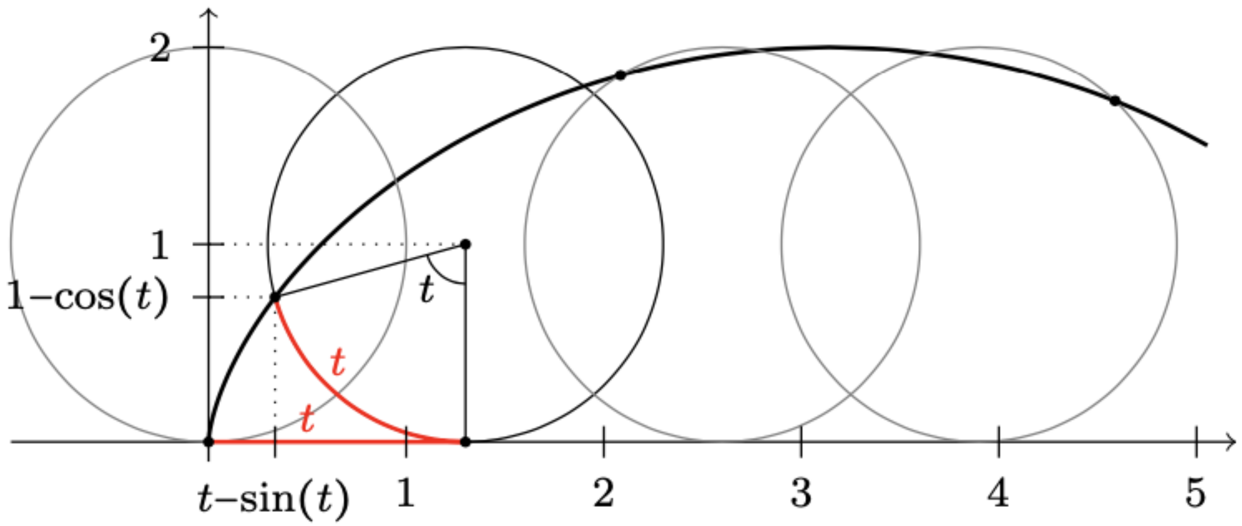
- *Rappel* : la cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

- La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Quelle est la longueur d'arc d'un cycle de la cycloïde, c'est-à-dire entre les points $P(0,0)$ et $R(2\pi, 0)$?

Longueur de la cycloïde



$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

$x' = 1 - \cos t$

$y' = \sin t$

Quelle est la longueur d'arc d'un cycle de la cycloïde, c'est-à-dire entre les points $P(0,0)$ et $R(2\pi, 0)$?

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$$

$$t = 2\alpha \qquad 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos(t)$$

$$\int \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$L = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}}_{ds}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$0 \leq t/2 \leq \pi$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \cdot \left[2\left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= 2(2+2) = \underline{\underline{8}}$$

Exercice

Etablir l'intégrale qui donne la longueur de l'ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, a > b > 1$$

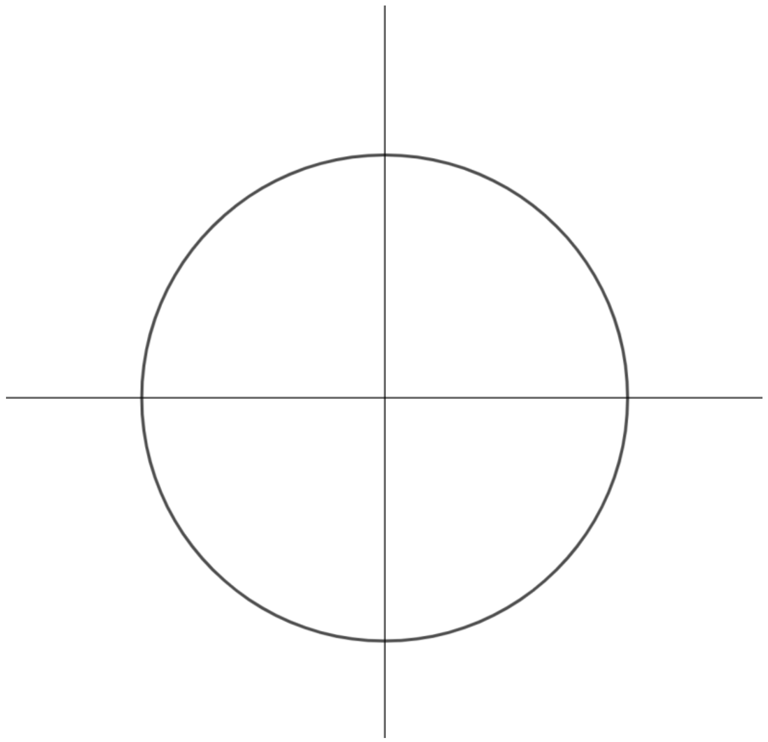
Montrer que $L \leq \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Développantes du cercle

Problème (Huygens 1673) : étant donné une courbe C et un point $P \in C$, on déroule un câble de longueur constante $L \in \mathbb{R}$ à partir du point P et en direction de la tangente à la courbe. En gardant le câble tendu (*tangente à la courbe*), trouver l'équation de la courbe décrite par l'extrémité libre du câble.

Cette courbe s'appelle **développante de C par rapport au point** P.

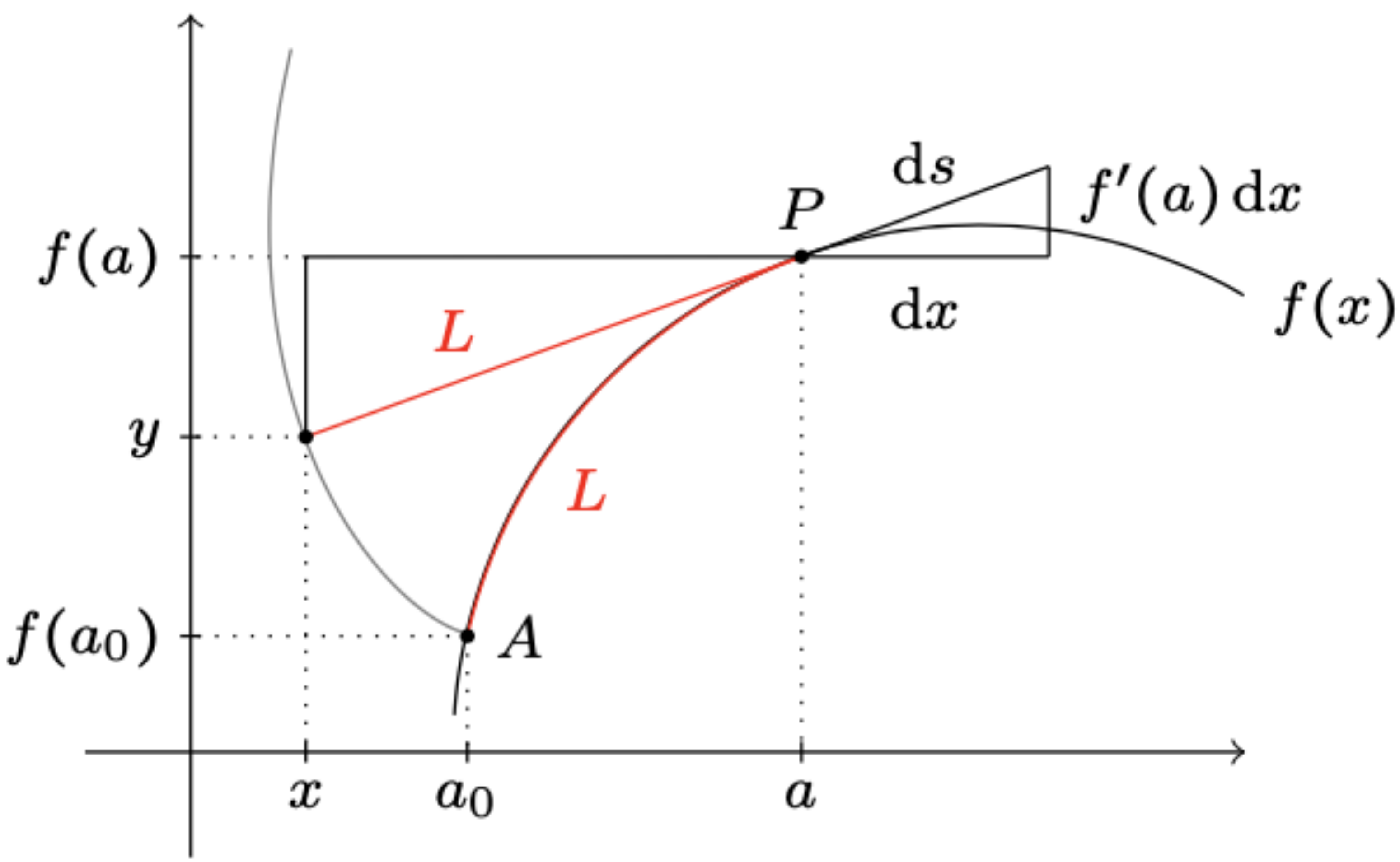
Huygens cherchait à concevoir des horloges sans pendule pour une utilisation sur un bateau en mer. Il utilisa la développante du cercle dans une tentative de forcer le pendule à se balancer selon le tracé d'une cycloïde.



Christiaan Huygens
1629 - 1695

Équation de la développante d'une courbe

- Pour obtenir l'équation de la développante, il est plus pratique de considérer que le fil de longueur variable $L \in \mathbb{R}$ se *déroule* le long de la courbe.
- Choisissons un point $A(a, f(a))$, où $a \in \mathbb{R}$, sur la courbe $y = f(x)$ qui sera l'extrémité du fil enroulé, c'est-à-dire le "*point de départ*" de la développante.
- Après avoir déroulé une longueur L du fil, celui-ci est tangent à la courbe en un point P.



Équation de la développante d'une courbe paramétrée.

Considérons une courbe donnée par des équations paramétriques : $c(t) = (x(t), y(t))$ et $t \in I$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues et dérivables.

La développante de la courbe au point $\mathrm{A}(x(t_0), y(t_0))$ est donc la courbe d'équations paramétriques :

$$X(t) = x(t) - \frac{x'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \mathrm{d}s}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \qquad Y(t) = y(t) - \frac{y'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \mathrm{d}s}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

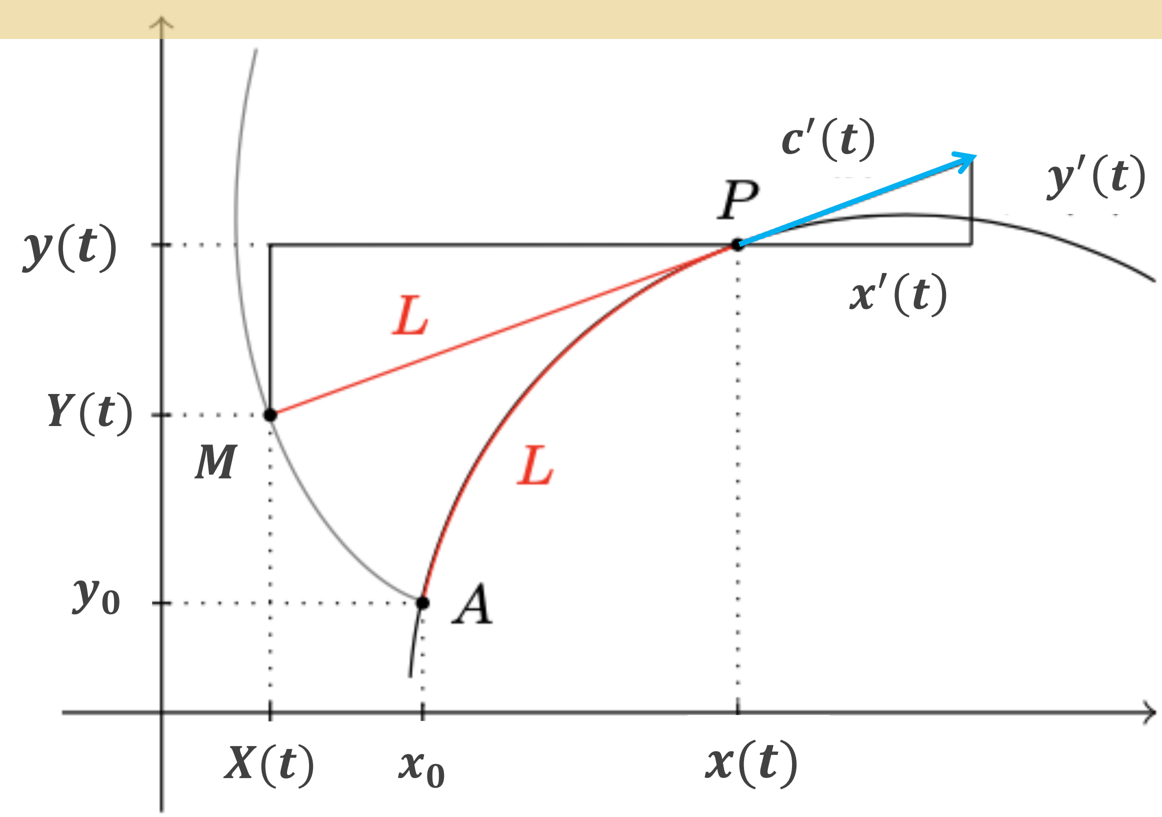
Démonstration:

- La tangente en P a comme vecteur directeur le vecteur tangent: $c'(t) = (x'(t), y'(t))$

- La longueur $L(t)$ vaut

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)} \, ds$$

- Et donc $$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - L(t) \cdot \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}}$$



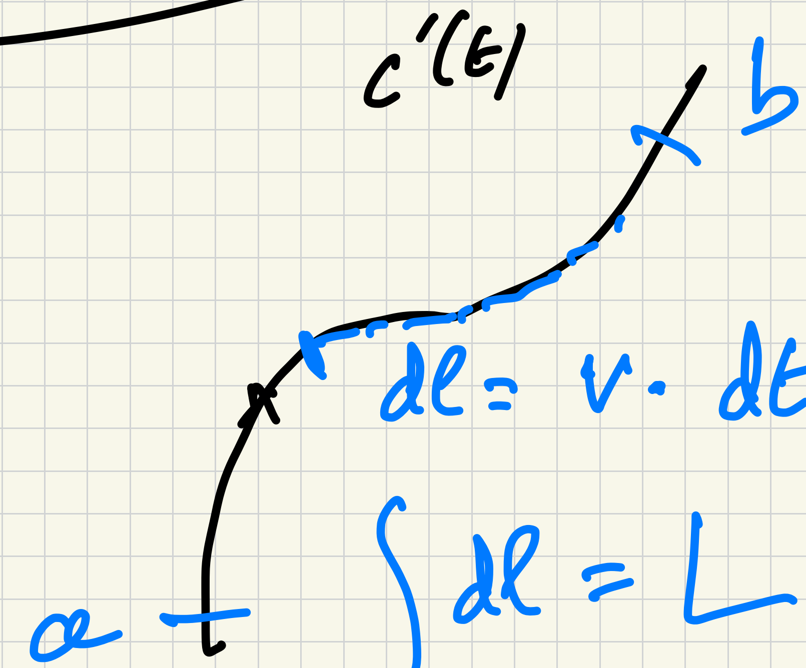
donne

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{L(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)}} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\|c'(t)\| = v(t)$$

$$L = \int \underbrace{\overbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\; dt}_{ds}$$

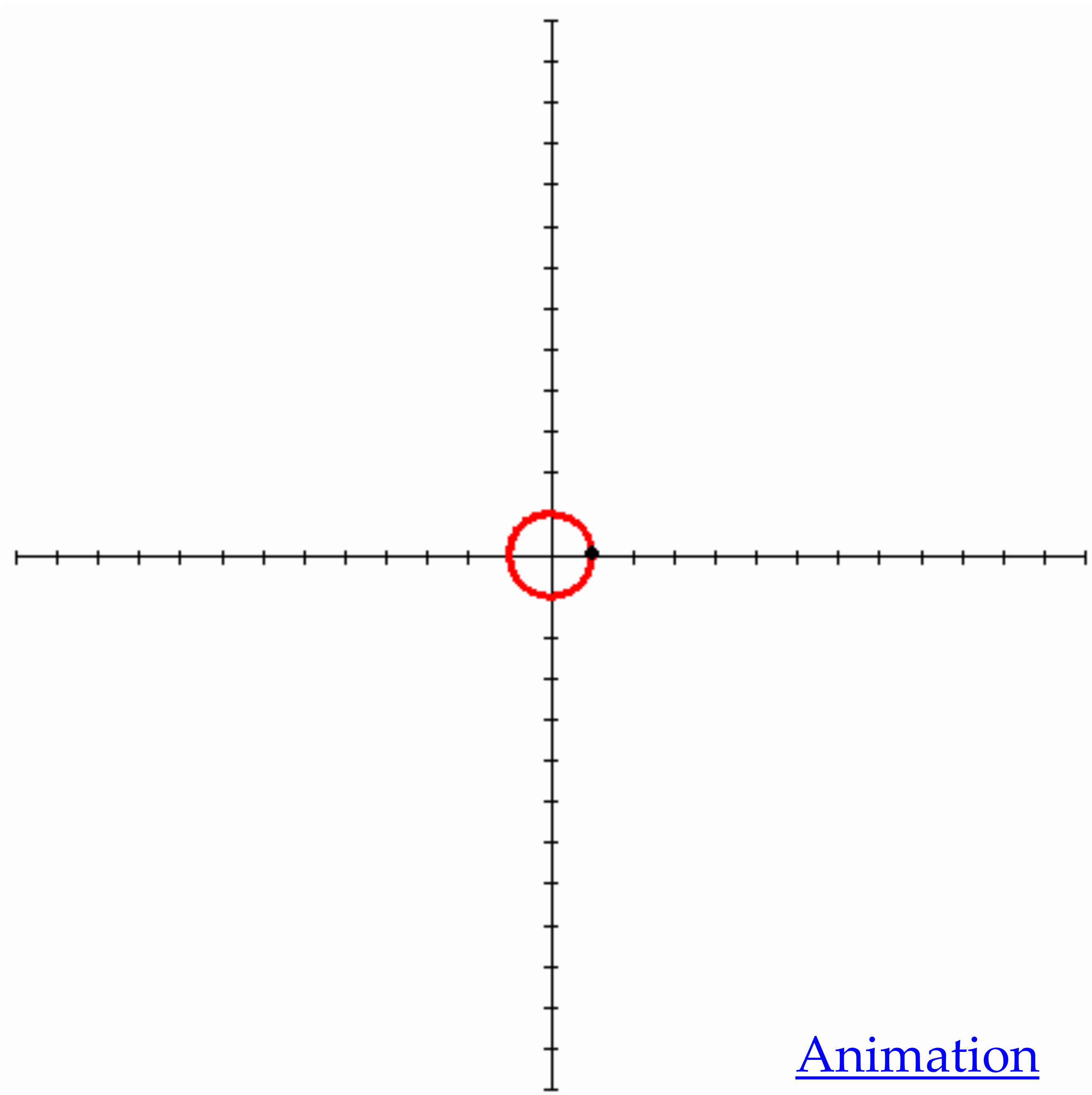
$$L = \int_{t=a}^{t=b} \underbrace{v(t) \cdot dt}_{ds}$$

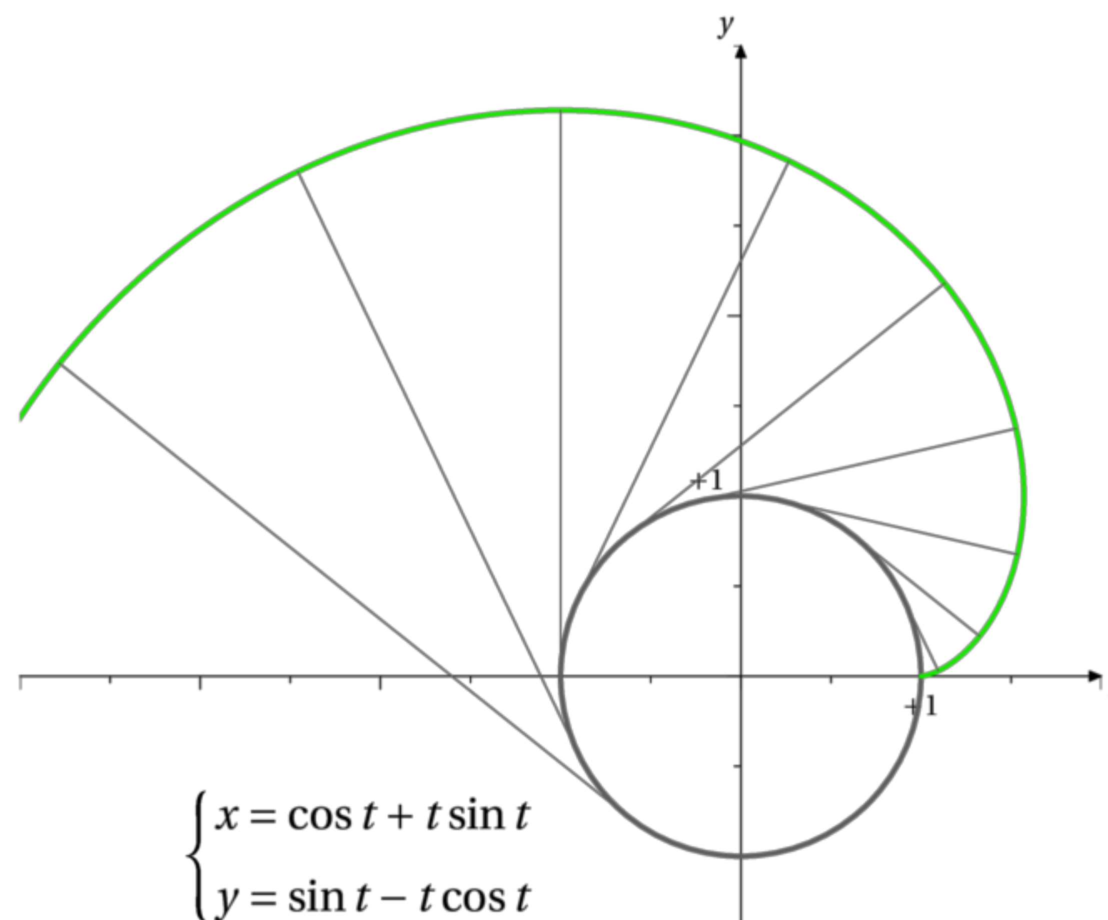


$$dl = v \cdot dt$$

$$\int dl = L$$

Exemple : développante du cercle





Développante de cercle

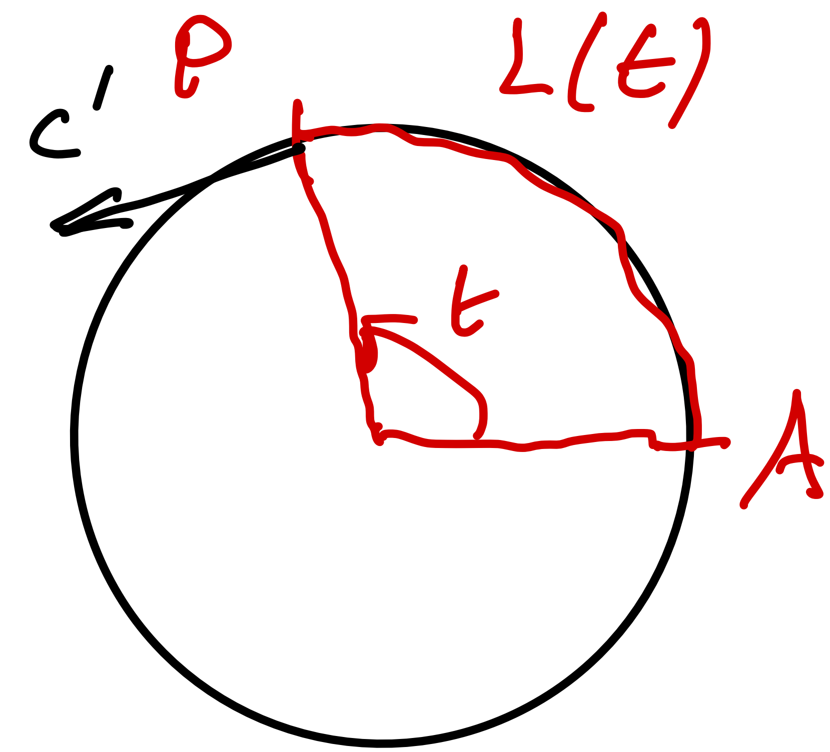
Exemple : développante du cercle

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad A(1,0) \qquad t_0 = 0$$

$$x'(t) = -\sin t \qquad y'(t) = \cos t \qquad \|c'(t)\| = 1$$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = dt$$

$$L(t) = \int_0^t ds = \int_0^t du = t$$



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \frac{L(t)}{\|\vec{c}\,'(t)\|} \cdot \vec{c}\,'(t)$$

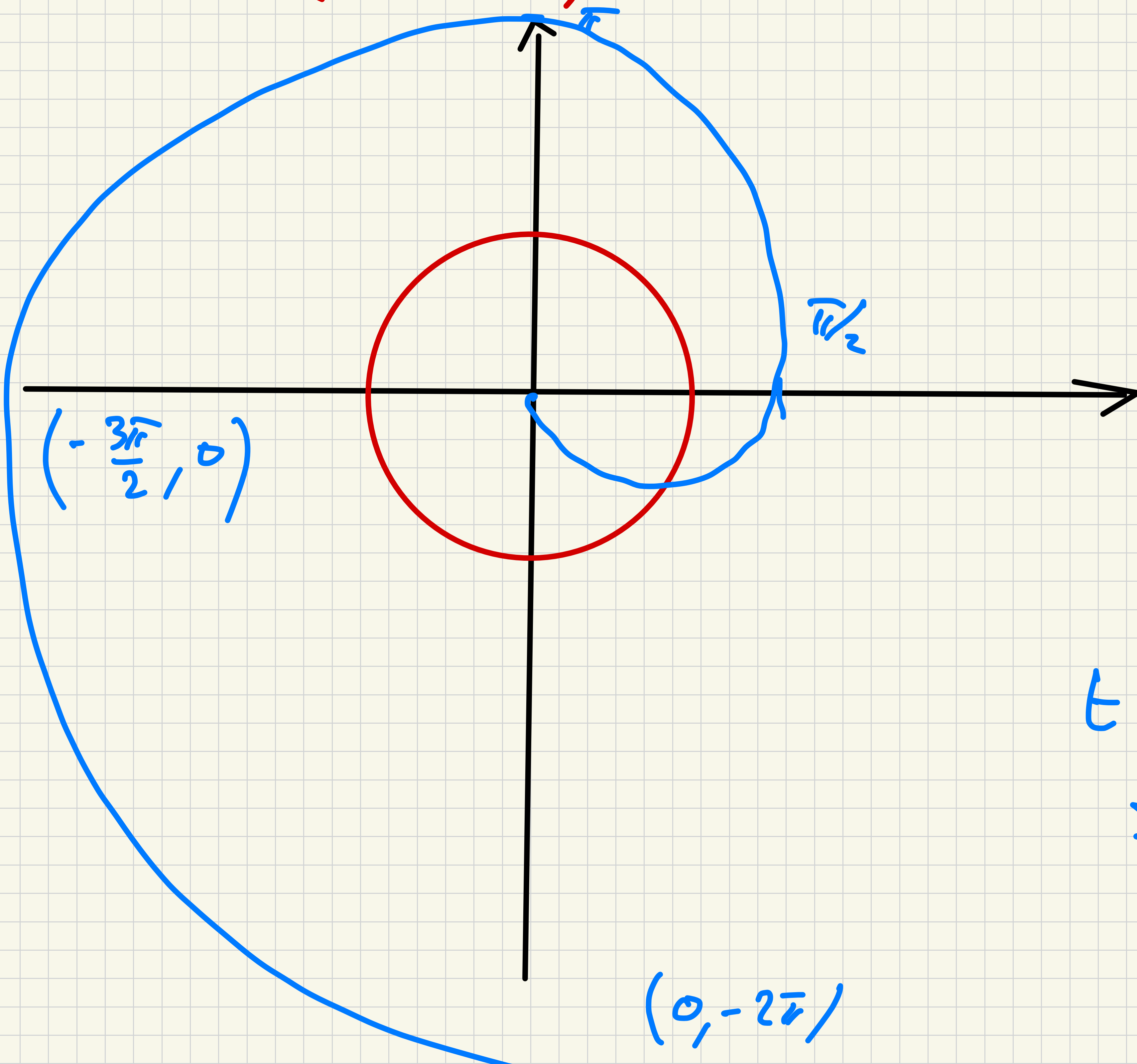
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \frac{L(t)}{\|c'(t)\|} \cdot c'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \frac{t}{1} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \cos t + t \sin t \\ y(t) &= \sin t - t \cos t \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$OM = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$



$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$(\pi/2 ; 0)$

$t = \pi \Rightarrow$

$(0, \pi)$

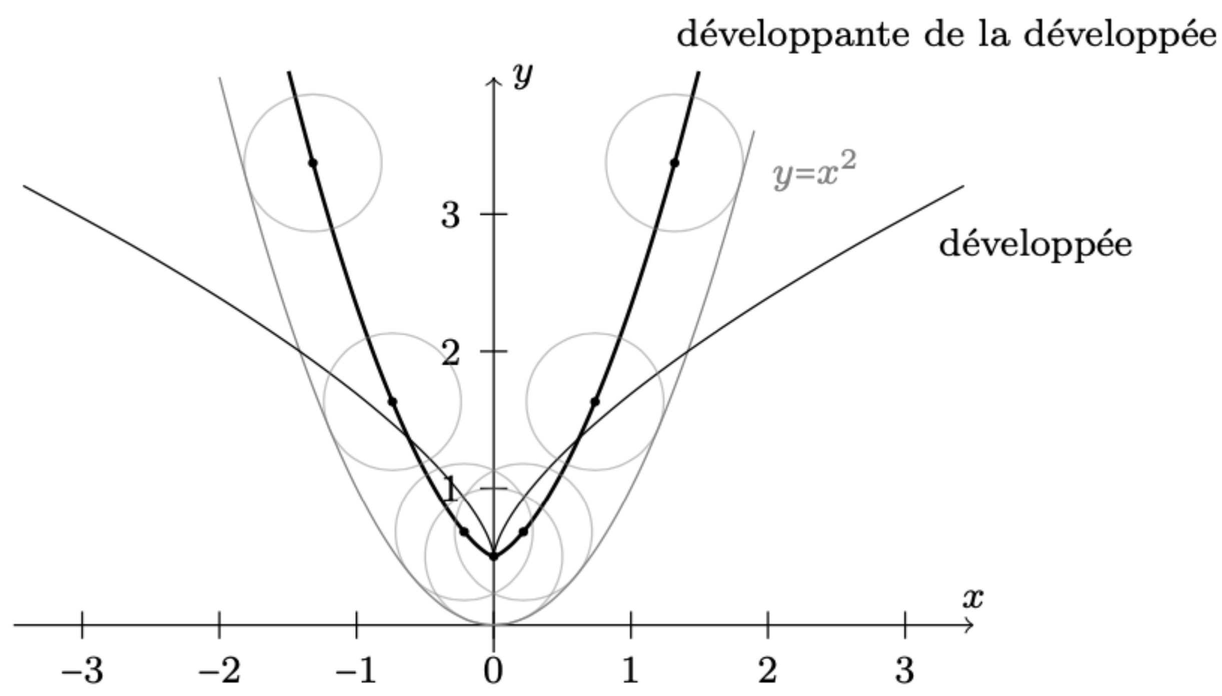
$t = 2\pi$
$\Rightarrow (0, -2\pi)$

Développante de la développée

D'après l'exemple précédent, la **développante de la développée** ne redonne pas la courbe d'origine. Par contre, on peut montrer que **la développante de la développée** d'une courbe est "*parallèle*" à la courbe originale, c'est-à-dire est une courbe décrite par le centre d'un cercle de rayon constant qui "*roule*" sur la courbe d'origine.

Théorème

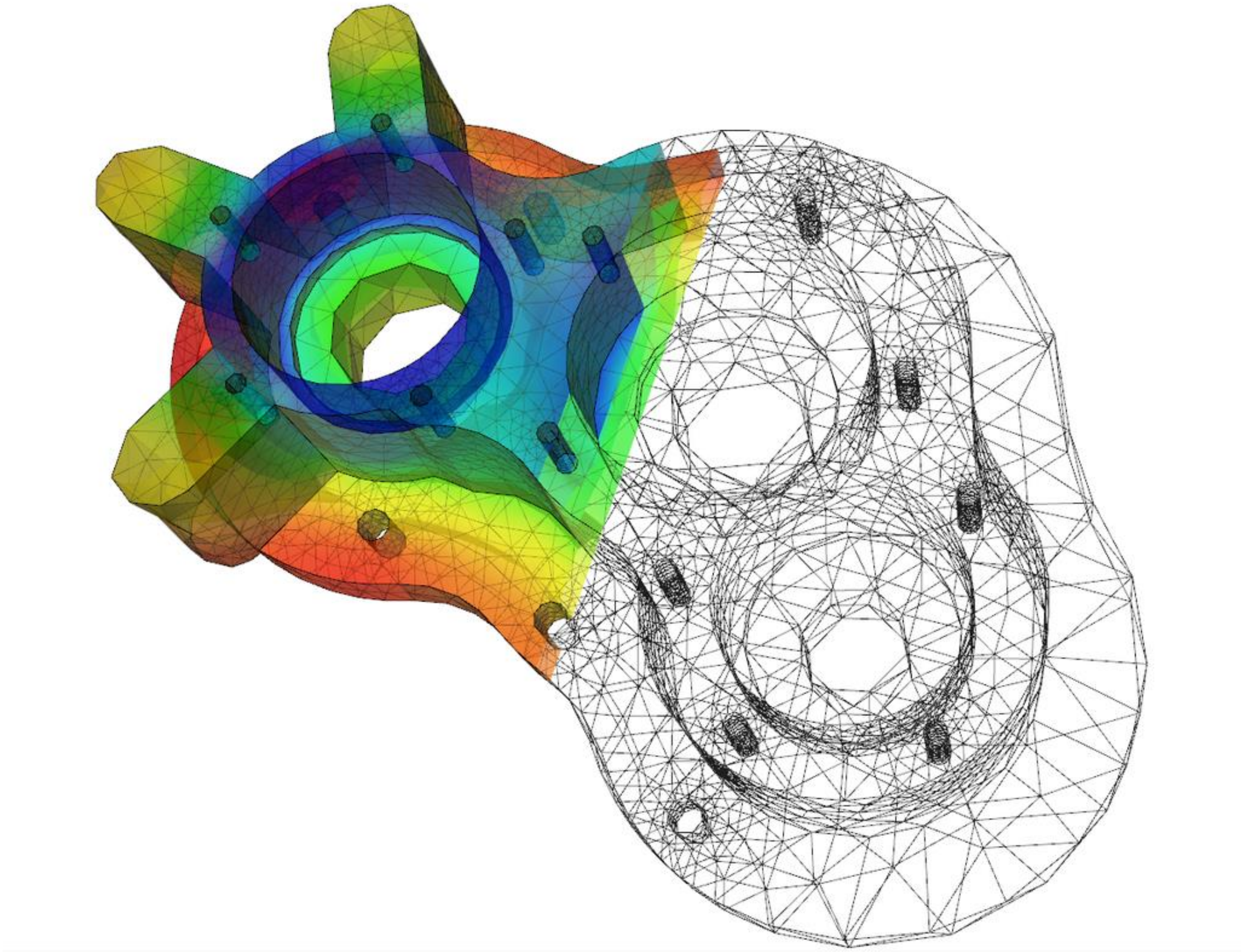
La développée de la développante d'une courbe redonne la courbe d'origine.



Un parallèle peut être fait entre ce théorème et le fait que la *dérivée* (assimilée à la développée) d'une *primitive* (assimilée à une développante) d'une fonction redonne la fonction d'origine alors que la primitive d'une dérivée la redonne à une constante près.

Conception assistée par ordinateur

La conception assistée par ordinateur ou CAO (en anglais, *computer aided design* ou CAD) comprend l'ensemble des logiciels et des techniques de modélisation géométrique permettant de concevoir à l'aide d'un ordinateur des produits manufacturés et les outils pour les fabriquer.

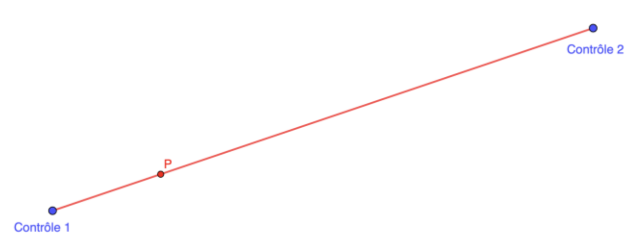


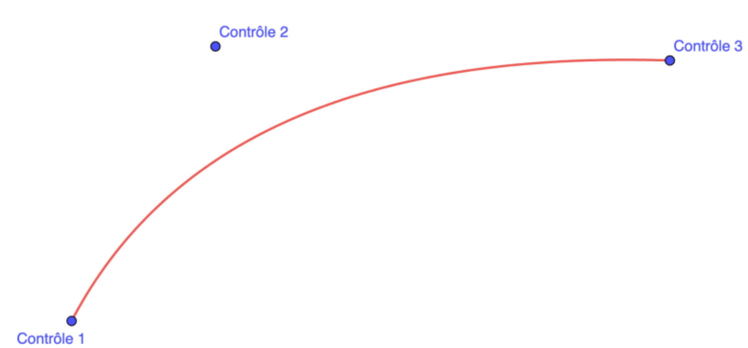
Courbes de Bézier

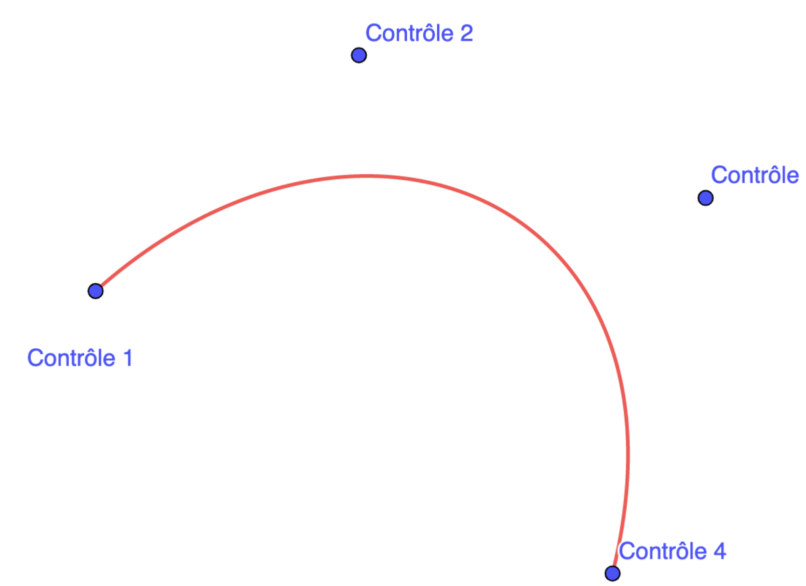
***Principe clé* :** nous remplaçons un objet complexe tel qu'une courbe par un objet plus simple, un ensemble de points de contrôle, de sorte qu'il existe une procédure unique et non ambiguë (*algorithme*) pour reconstruire la courbe à partir de l'ensemble de points de contrôle.

Une courbe de Bézier est définie par un nombre $n + 1$ des points $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, appelés **points de contrôle**, qui engendrent une portion de courbe. Les types de courbes de Bézier les plus utilisées sont :

- **les courbes de Bézier linéaires** : deux points de contrôle $(n = 1)$;
- **les courbes de Bézier quadratiques** : trois points de contrôle $(n = 2)$;
- **les courbes de Bézier cubiques** : quatre points de contrôle $(n = 3)$.







Théorie générale

La courbe de Bézier pour les $n+1$ points de contrôle $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, est l'ensemble des points définis par la représentation paramétrique :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot \mathbf{P}_i$$

où $t \in [0;1]$ et les B_i^n sont les *polynômes de Bernstein :*

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Exemples :

- Pour $n = 2$ on a la courbe de Bézier de degré 2 (quadratique) :

$$P(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2$$

$P(0) = P_0$

$P(1) = P_2$

où $t \in [0;1]$.

- Pour $n = 3$ on a la courbe de Bézier de degré 3 (cubique) :

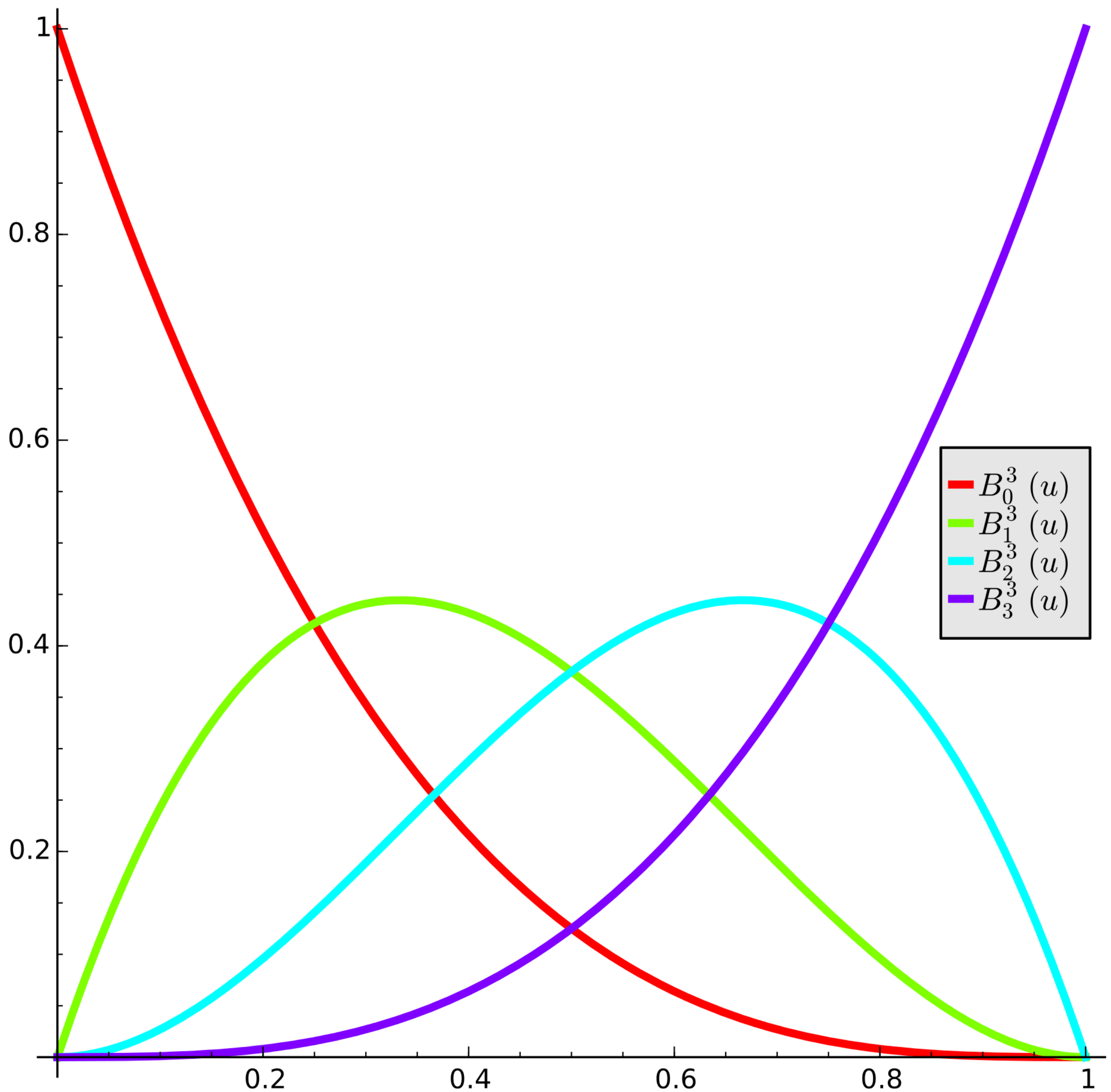
$$P(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

$P(0) = P_0$

$P(1) = P_3$

où $t \in [0;1]$.

Polynômes de Bernstein de degré 3



Exemple

$P_0(1,1) \qquad P_1(2,3) \qquad P_2(5,4) \qquad P_3(7,0)$

$$\gamma(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 \cdot t\, P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

$$= (1-t)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1 - 3t + 3t^2 - t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3t(1 - 2t + t^2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

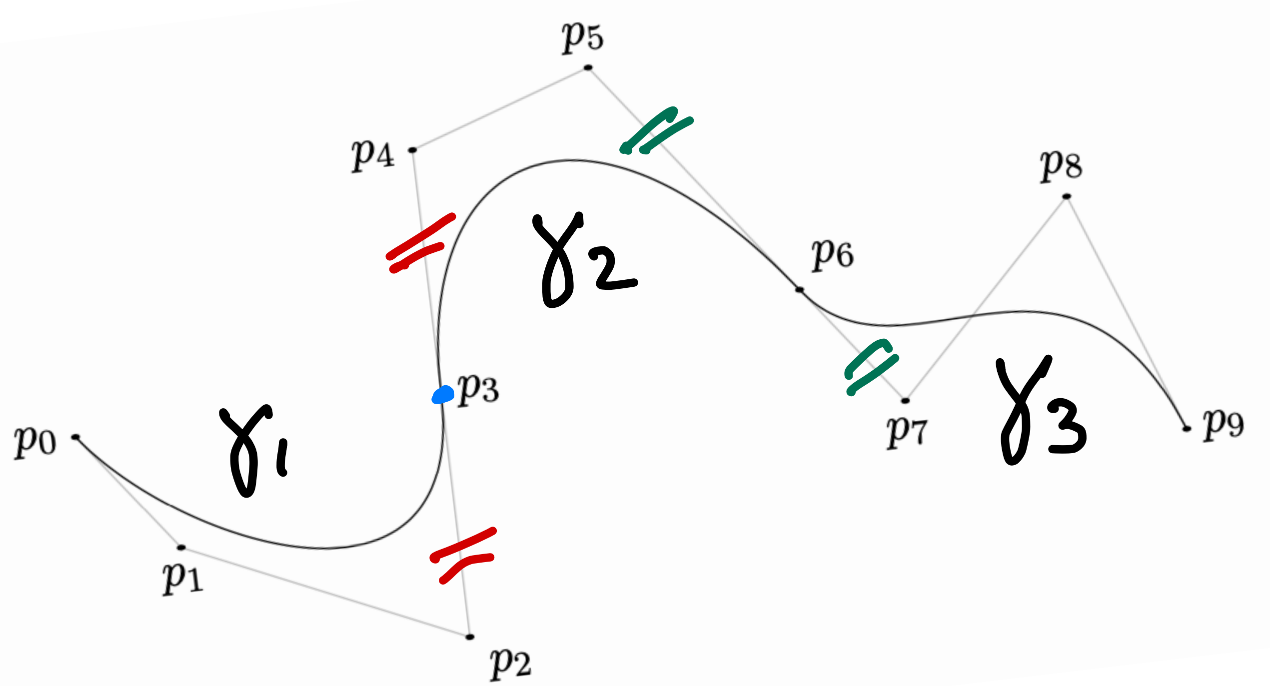
$$+ (3t^2 - 3t^3) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -3t^3 + 6t^2 + 3t + 1 \\ -4t^3 - 3t^2 + 6t + 1 \end{cases}$$

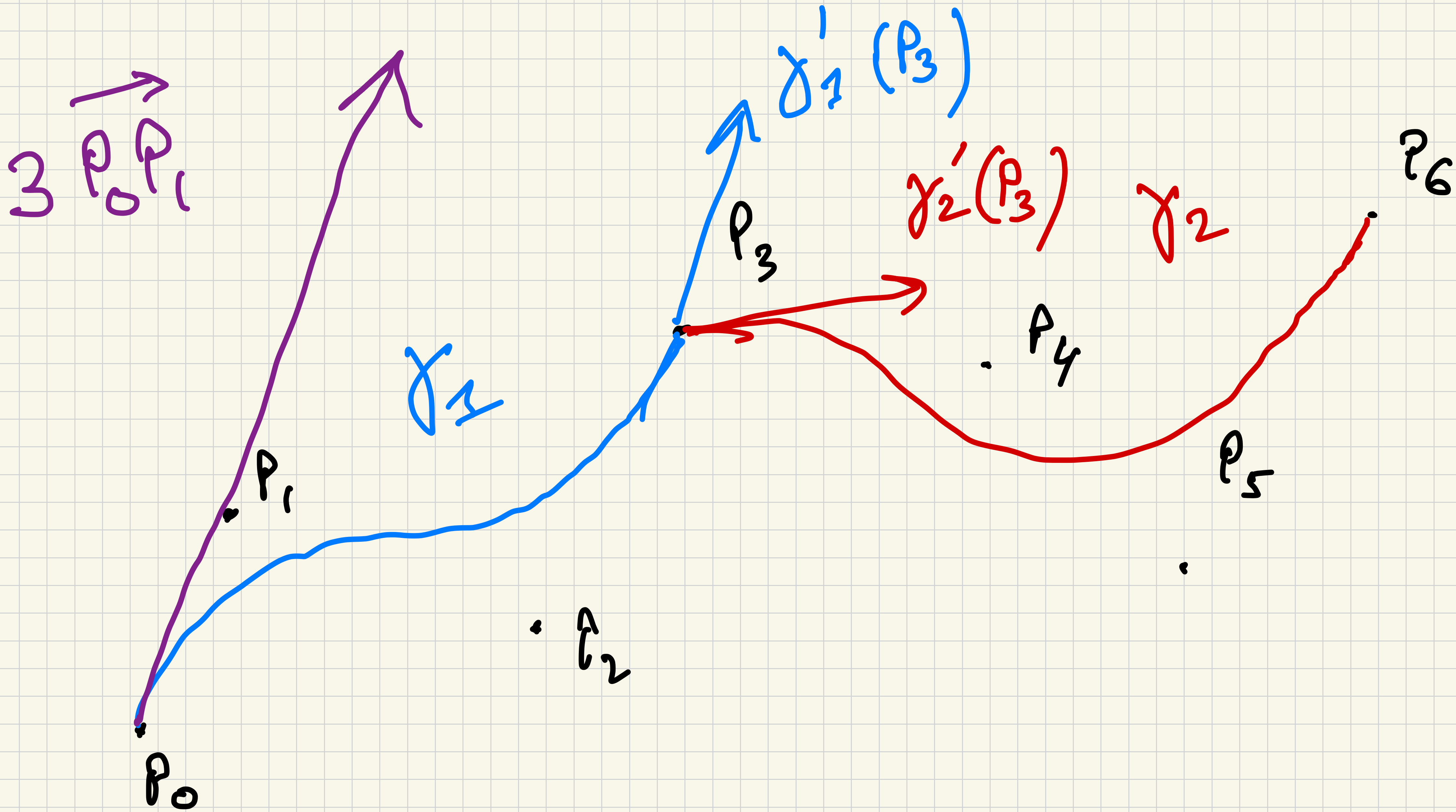
Recollements de courbes de Bézier

- Les courbes de Béziers sont conçues pour être collées les unes aux autres.
- Si on veut recoller n **courbes de Bézier cubiques**, on aura $3n + 1$ points de contrôle : $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{3n})$.
- Les points $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_6 \dots, \mathbf{P}_{3n})$ par lesquels passe effectivement la courbe sont aussi appelés les **points d'ancrage** de la courbe, les autres points $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \dots, \mathbf{P}_{3n-2}, \mathbf{P}_{3n-1})$ seront alors les **points de direction**.

Exemple avec n=3

- La courbe de Bézier cubique γ_1 a les points d'ancrage p_0 et p_3 et les points de direction p_1 et p_2.
- La courbe de Bézier cubique γ_2 a les points d'ancrage p_3 et p_6 et les points de direction p_4 et p_5.
- La courbe de Bézier cubique γ_3 a les points d'ancrage p_6 et p_9 et les points de direction p_7 et p_8.





$3\,\overrightarrow{P_0P_1}$
$\gamma_1'(P_3)$
$\gamma_2'(P_3)$
γ_1
γ_2
P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6

Courbes de Bézier cubiques

La courbe de Bézier cubique pour les 4 points de contrôles $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

Le vecteur tangent devient

$$\gamma'(t) = -3(1-t)^2\mathbf{P}_0 + 3[(1-t)^2 - 2t(1-t)]\mathbf{P}_1 + 3[2t(1-t) - t^2]\mathbf{P}_2 + 3t^2\mathbf{P}_3 \qquad t \in [0,1]$$

et au début et à la fin de la courbe on a

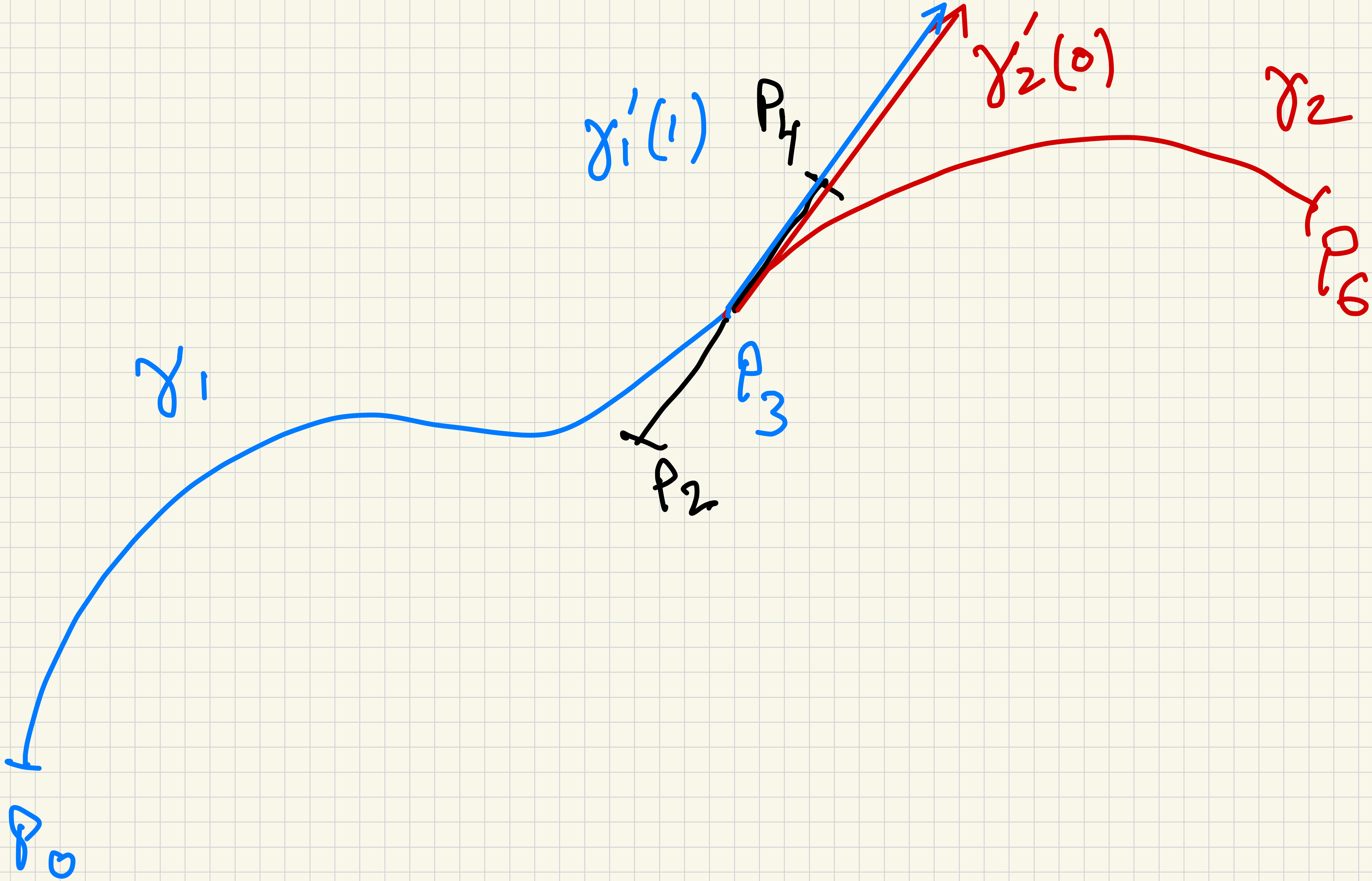
$$\boxed{\gamma'(0) = -3\mathbf{P}_0 + 3\mathbf{P}_1 = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma'(1) = -3\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_3 = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)}$$

Si on veut recoller 2 courbes de Bézier cubiques γ_1 et γ_2 déterminées par 7 points de contrôles:
$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ pour γ_1 (γ_1 passe par $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_3$ mais pas nécessairement par $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$!!)
$(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$ pour γ_2 (γ_2 passe par $\mathbf{P}_3$ et $\mathbf{P}_6$ mais pas nécessairement par $\mathbf{P}_4$ et $\mathbf{P}_5$!!)

Alors pour que le recollement soit lisse, on impose que le vecteur tangent $\gamma_1{}'(1)$ soit égal au vecteur tangent $\gamma_2'(0)$.
Ceci impose que $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3$

Autrement dit, pour que la courbe totale (réunion des courbes γ_1 et γ_2) soit lisse, il faut choisir $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_4$ de telle sorte que $\mathbf{P}_3$ soit le milieu du segment $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4$ donc

Continuité des vecteurs tangents (I) : $\boxed{\mathbf{P}_4 = 2\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2}$



$\gamma_1'(1)$
p_4
$\gamma_2'(0)$
γ_2
p_6
γ_1
p_3
p_2
p_0

Courbes de Bézier cubiques

La courbe de Bézier cubique pour les 4 points de contrôles $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

En dérivant deux fois $\gamma(t)$ on peut montrer que

$$\gamma''(0) = 6\mathbf{P}_0 - 12\mathbf{P}_1 + 6\mathbf{P}_2 \qquad\qquad \gamma''(1) = 6\mathbf{P}_1 - 12\mathbf{P}_2 + 6\mathbf{P}_3$$

On veut recoller 2 courbes de Bézier cubiques γ_1 et γ_2 déterminées par 7 points de contrôles:
$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ pour γ_1
$(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$ pour γ_2

Pour que le **recollement est la même courbure au point $\boldsymbol{P_3}$**, on impose que le vecteur $\gamma_1''(1)$ soit égal au vecteur $\gamma_2''(0)$.

Ceci impose que $\mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 - 2\mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5$ et donc

Continuité de la courbure (II): $\boxed{\mathbf{P}_5 = 2\mathbf{P}_4 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1}$

En mettant ensemble les conditions (I) et (II), on constate que, pour des points donnés $\boldsymbol{P_0, P_3, P_6, P_9}, \dots$,dès que les points de directions $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ sont fixés les autres points de directions sont imposés par

libres

(I)	$\mathbf{P}_4 = 2\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$	et	(II)	$\mathbf{P}_5 = 2\mathbf{P}_4 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1$
puis (I)	$\mathbf{P}_7 = 2\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_5$	et	(II)	$\mathbf{P}_8 = 2\mathbf{P}_7 - 2\mathbf{P}_5 + \mathbf{P}_4$

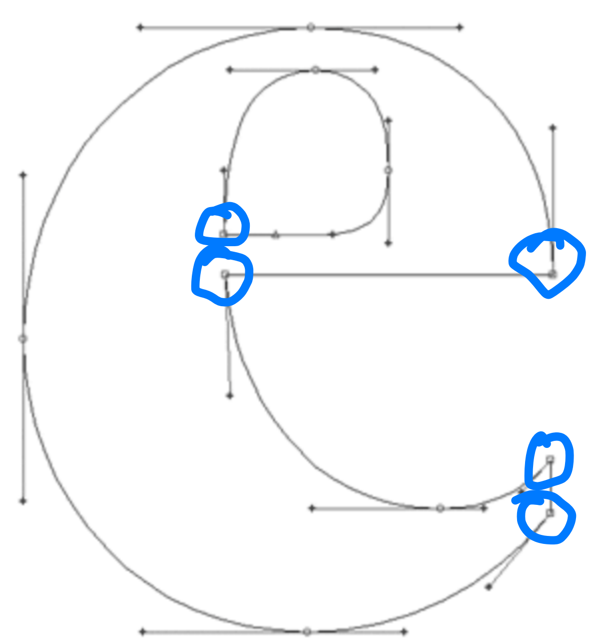
On obtient les formules suivantes $\mathbf{P}_{3k+1} = 2\mathbf{P}_{3k} - \mathbf{P}_{3k-1}$ et $\mathbf{P}_{3k+2} = 2\mathbf{P}_{3k+1} - 2\mathbf{P}_{3k-1} + \mathbf{P}_{3k-2}$

Généralisation

Les courbes de Bézier possèdent un certain nombre de défauts :

- Si on déplace un point de contrôle, toute la courbe en sera modifiée.
- La courbe *ne passe pas* nécessairement par tous les points de contrôle, ce qui peut rendre son contrôle délicat.
- Le cercle ne peut pas être reproduit exactement en recollant des morceaux de courbes de Bézier.

Pour toutes ces raisons, ces courbes ont subi de nombreuses généralisations : *courbes de Bézier rationnelles*, *B-splines*, *Nurbs*, *etc…*



Exemple

On veut faire passer une courbe de Bézier cubique par les points d'ancrage $P_0(0,0)$, $P_3(3,4)$ $P_6(7,1)$ et $P_9(10,3)$ Choisir les points de direction P_1 P_2 P_4 P_5 P_7 et P_8 de façon à que le recollement des 3 courbes soit le plus lisse possible (dérivées secondes continues) courbure continue

Puis calculer les 2 courbes de Béziers γ_1 et γ_2 pour les points P_0 à P_6 (on ne calculera pas la 3ème courbe) et vérifier que l'on a bien en P_3

$$\gamma_1'(1) = \gamma_2'(0) \qquad \text{et} \qquad \gamma_1''(1) = \gamma_2''(0)$$

(I) $P_4 = 2P_3 - P_2$ (II) $P_5 = 2P_4 - 2P_2 + P_1$

$P_1(1,1)$ $P_2(2,2)$ choix libre

$$\text{(I)} \Rightarrow P_4 = 2P_3 - P_2 = 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow P_5 = 2\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$$

(I) $P_7 = 2P_6 - P_5$

$$= 2\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(II) $P_8 = 2P_7 - 2P_5 + P_4$

$$= 2\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

$$= \begin{pmatrix} 3t \\ t^3 + 3t \end{pmatrix}$$

Vecteur tangent à γ_1 en P_3

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3t^2 + 3 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1'(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= 3\,\overrightarrow{P_2P_3} \quad ? \qquad \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix} \qquad \gamma_1''(1) = \gamma_1''(P_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

γ_2 $\quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6$

$$\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = P_3 \checkmark$$

$$\gamma_2(s) = \begin{pmatrix} s^3 + 3s + 3 \\ -12s^3 + 3s^2 + 6s + 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = P_6 \checkmark$$

$$\gamma_2'(s) = \begin{pmatrix} 3s^2 + 3 \\ -36s^2 + 6s + 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \gamma_1'(1)}$$

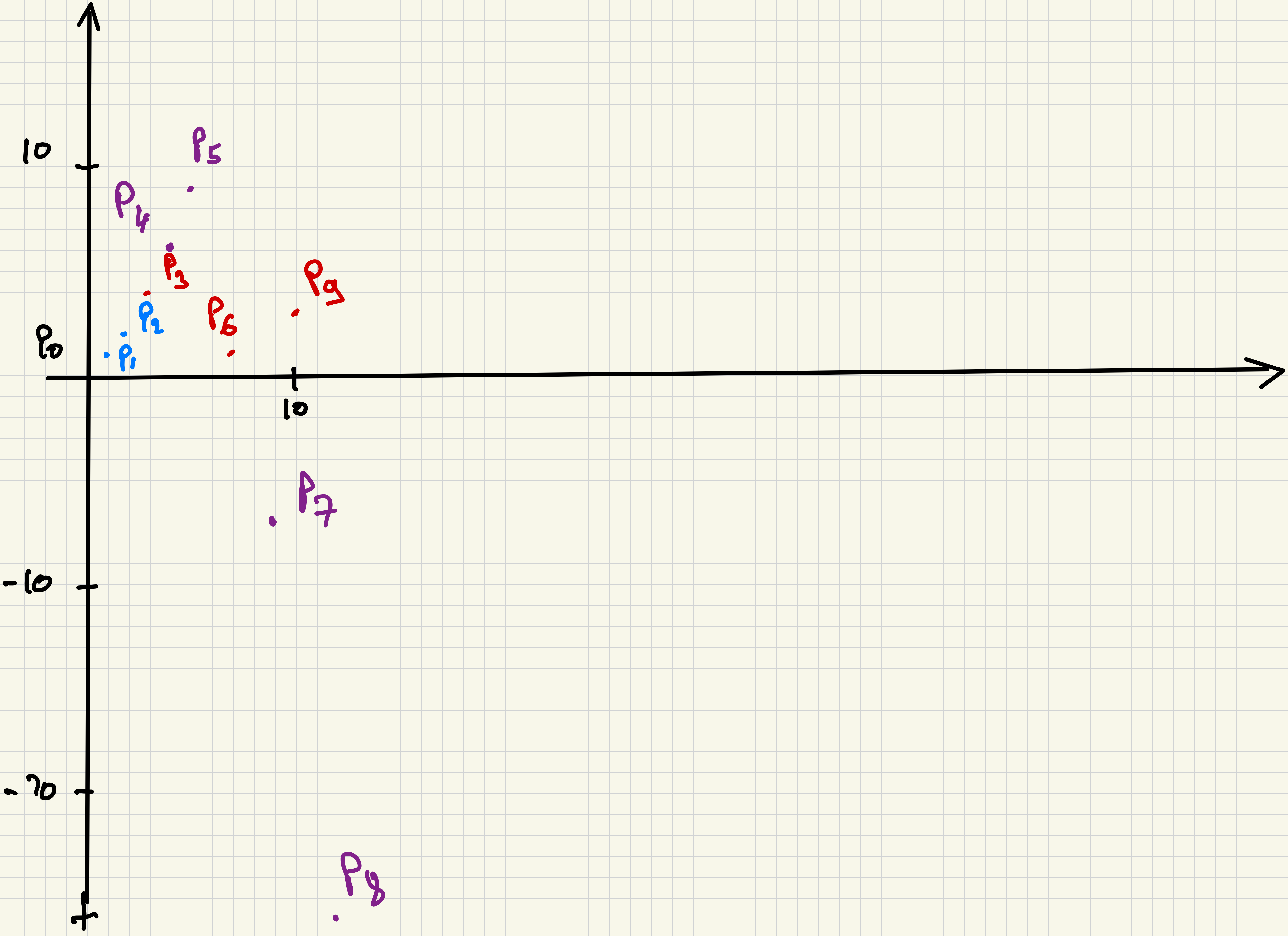
$$\gamma_2''(s) = \begin{pmatrix} 6s \\ -72s + 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_2''(0) = \gamma_2''(P_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \gamma_1''(P_3) = \gamma_1''(1) \end{aligned}}$$

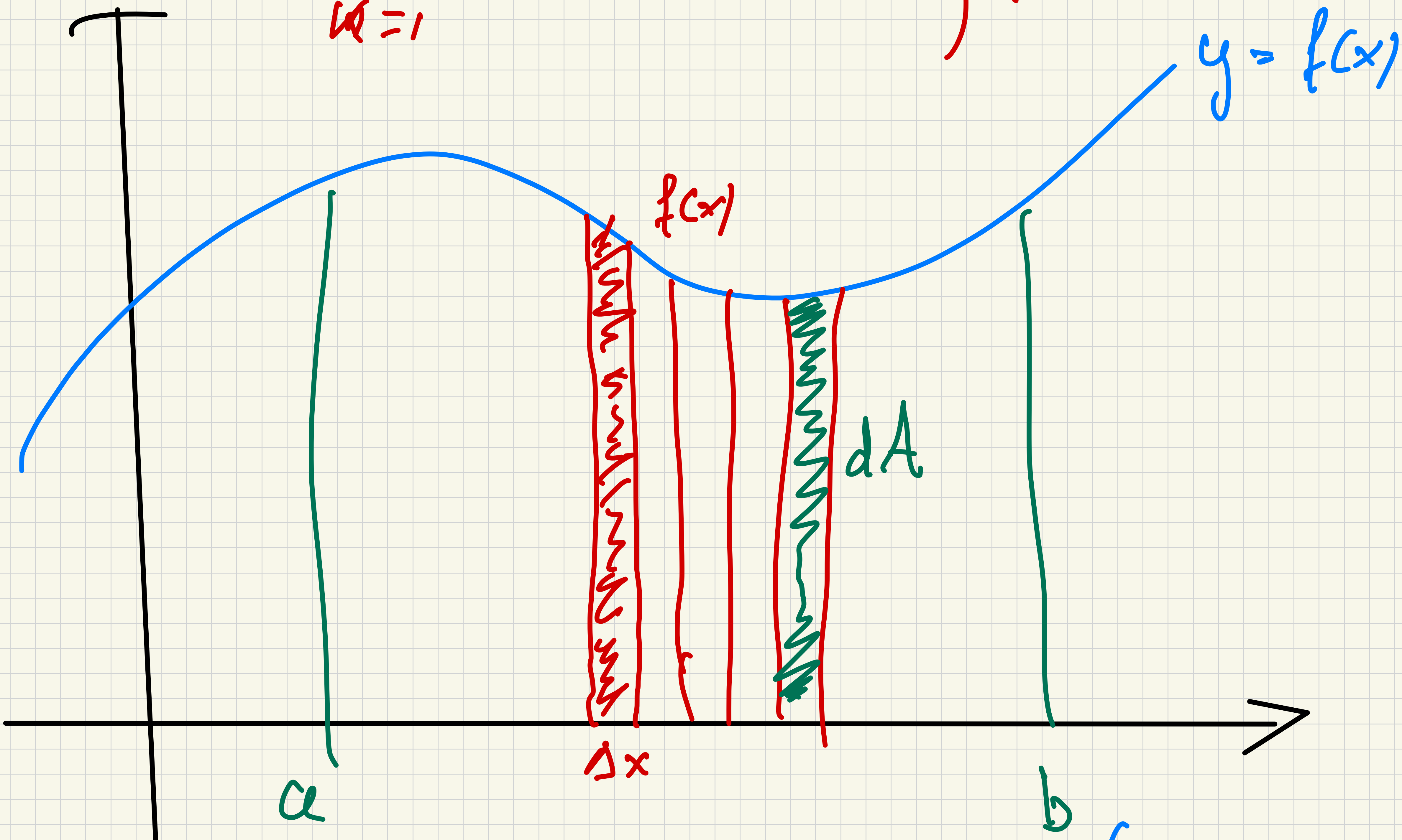
On a bien

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_1'(1) &= \gamma_2'(0) \\ \gamma_1''(1) &= \gamma_2''(0) \end{aligned}}$$ et

Le recollement en P_3 est C^2 (les dérivées secondes sont continues)


10
-10
-20
10
P0
P1
P2
P3
P4
P5
P6
P7
P8
P9

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x \to \int f(x)\,dx$$



$$dA = f(x)\,dx \qquad A = \int f(x)\,dx$$

$$L = \int_{t=0}^{t=1} \underbrace{v(t)\,dt}_{dl}$$

$$dt = \Delta t = \underline{\underline{1\,\text{sec}}}$$

$$P_{\text{criss}} = \frac{E}{t}$$

$$E = \int_{t=0}^{1} \underbrace{P(t)}\cdot dt$$

$$\boxed{E = P \cdot T}$$