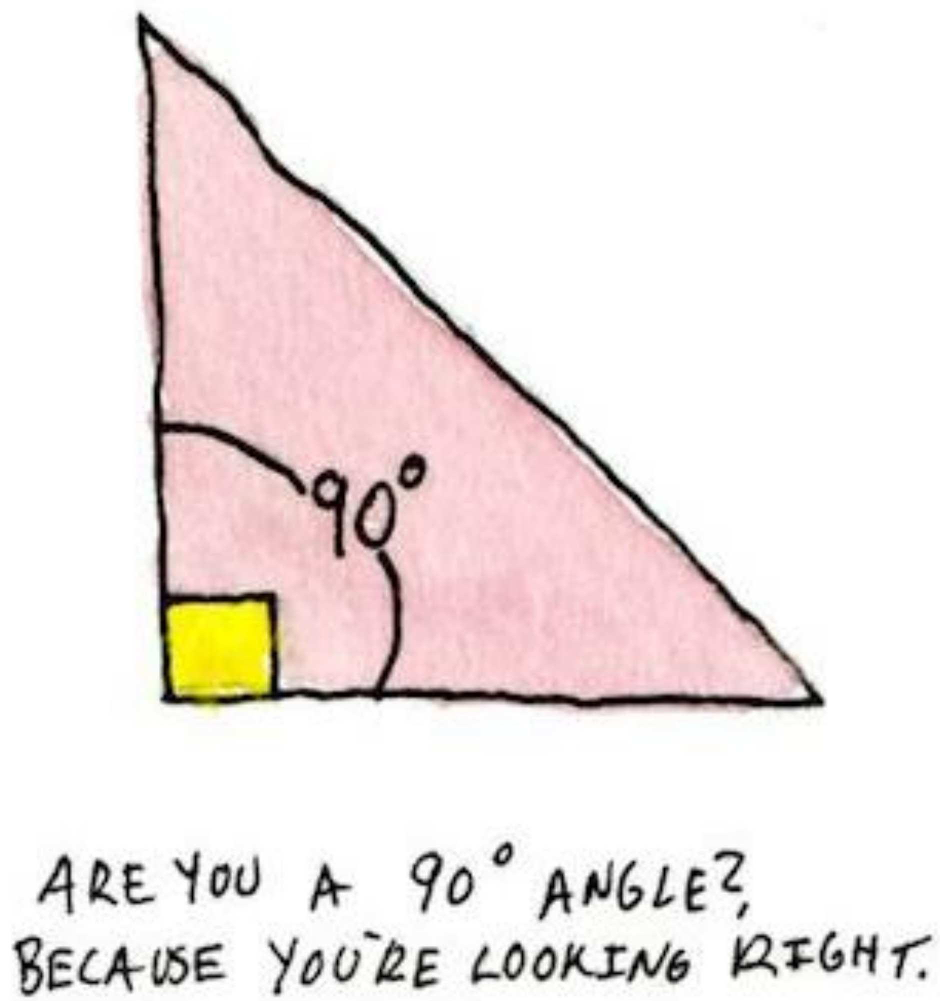


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

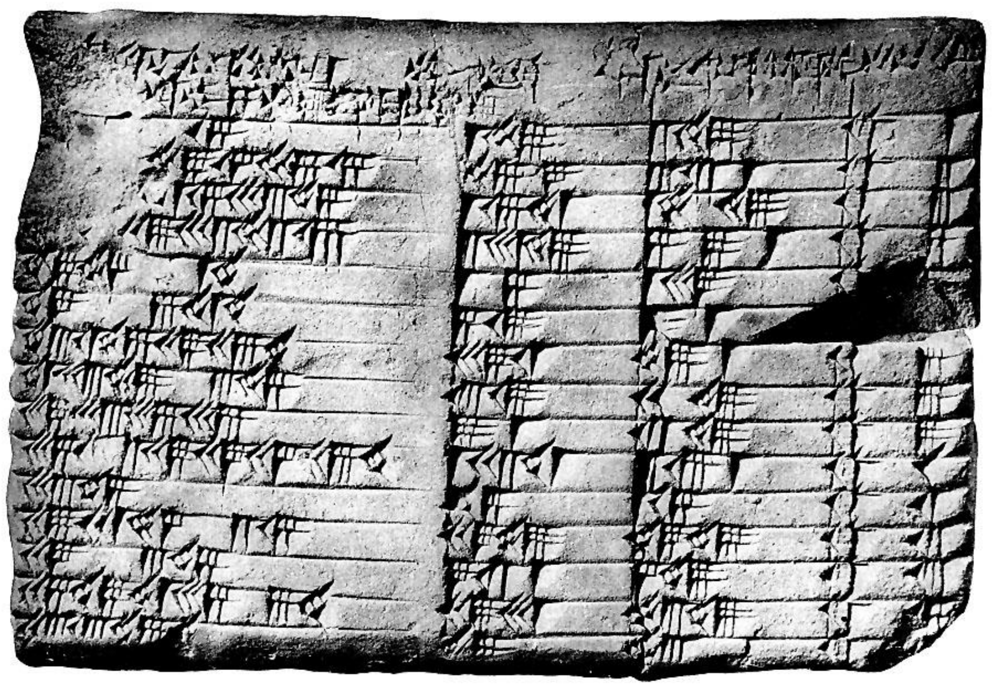
Fonctions trigonométriques

Philippe Chabloz

Un peu d’histoire

Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs : *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

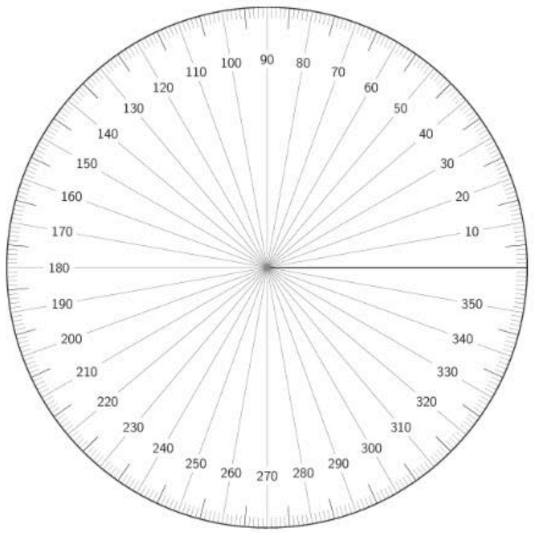
- Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d’Égypte antique, il y a plus de 4000 ans.
- Les Babyloniens ont basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60.
- Redécouverte et développée par les mathématiciens Grecs.

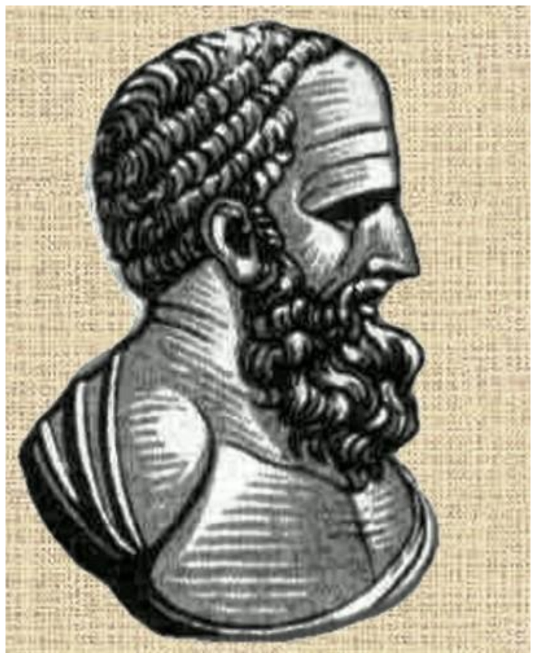


Plimpton 322

Pourquoi 360° ?

- Diviser un cercle en 360 parties, permettant ainsi de définir le **degré**, est une excellente idée qu'a eue un illustre Babylonien il y a environ 4000 ans : *Hipparque de Nicée*.
- Le nombre 360 admet un grand nombre de diviseurs (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 et 360), et les Babyloniens comptaient en base 60.
- *Ptolémée* affine le système en faisant intervenir les deux décimales suivantes en base soixante : les **minutes** (dénotée par ') et les **secondes** (dénotée par ''). Par exemple, un angle de 27°12' correspond à 27,2°.
- 1° est un petit angle, mais un angle encore facilement mesurable à l'oeil : le diamètre angulaire de la Lune et du Soleil sont proches de 0,5° (donc 30').



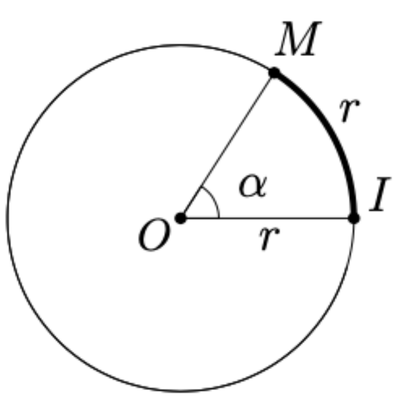


Hipparque
2e siècle avant J-C

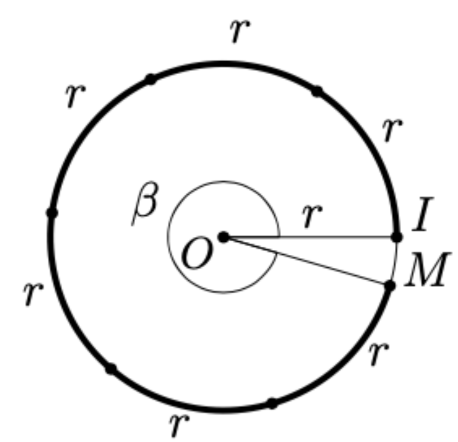
Le radian

Un radian est la mesure d'un angle au centre interceptant un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle.

[Une première animation]



$\alpha = 1$ radian



$\beta = 6$ radians

Le *périmètre* d'un cercle de rayon r vaut $2\pi \cdot r$. Il s'en suit que la mesure en radians *«d'un tour complet»* (360°) vaut 2π.

Relation entre degrés et radians

- En notant par α_{rad} et α_{deg} les mesures d'un angle orienté en radians et en degrés respectivement, nous obtenons la relation :

$$\frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\alpha_{deg}}{360}$$

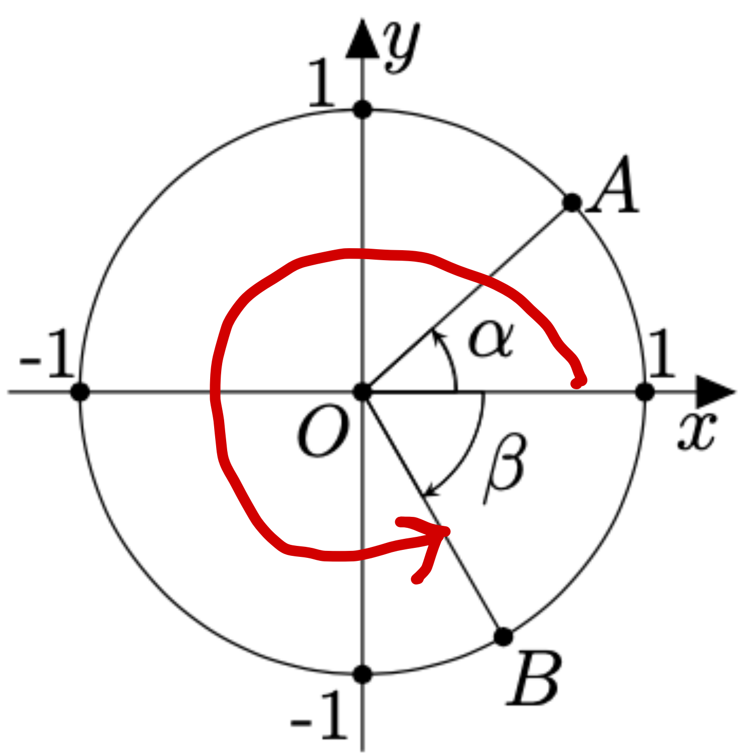
- Ainsi :

$$360° = 2\pi rad$$

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Degrés} \arrow[r, shift left, "\cdot \frac{\pi}{180}"] & \textbf{Radians} \arrow[l, shift left, "\cdot \frac{180}{\pi}"]
\end{tikzcd}$$

Le cercle trigonométrique

- Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 muni d'un système d'axes perpendiculaires Ox et Oy dont l'origine est le centre O du cercle. Les **angles orientés** y sont toujours représentés depuis la partie positive de l'axe horizontal Ox.
- On associe à chaque angle un point sur le cercle trigonométrique.
- Cependant, cette association *n'est pas injective* : des angles différents peuvent mener au même point si leur différence est un multiple de 2π.

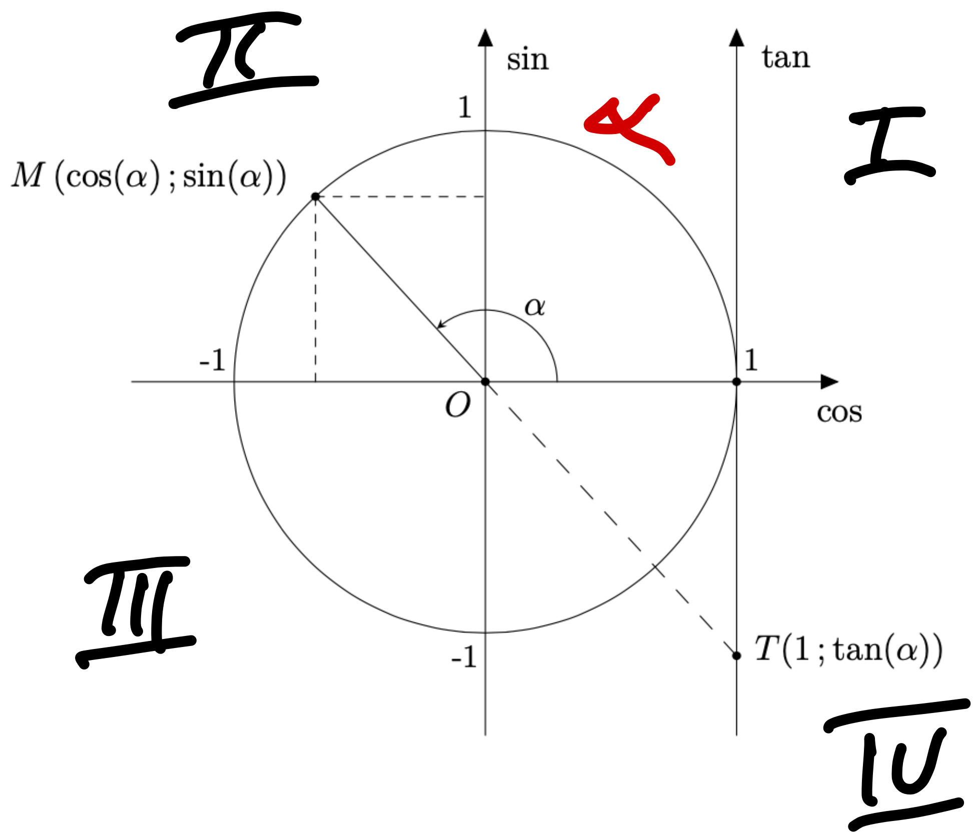


Par exemple :

- Le point A est associé à l'angle $\alpha = 52°$
- L'angle $\beta = -\pi/3$ est associé au point B

$\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ est aussi associé à B.

Les fonctions trigonométriques



Une deuxième animation

- Le cosinus de α, noté $cos(\alpha)$, est l'abscisse de M.
- Le sinus de α, noté $sin(\alpha)$, est l'ordonnée de M.
- La tangente de α, noté $tan(\alpha)$, est l'ordonnée de T , où T est le point d'intersection de la droite OM avec la tangente au cercle au point (1 ; 0).

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

- $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$
- $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et. $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- $\sin(\pi) = 0$ et $\cos(\pi) = -1$
- $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ et $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$

⚠ $\tan(\alpha)$ n'existe pas

pour

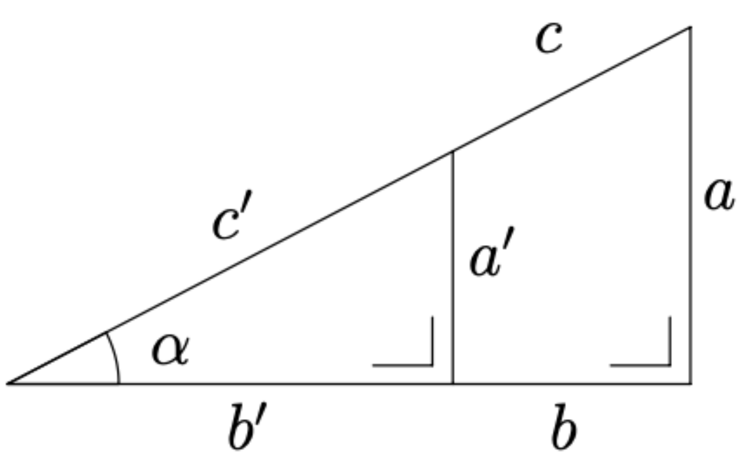
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, les rapports de deux côtés ne dépendent que de l'angle α.

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$



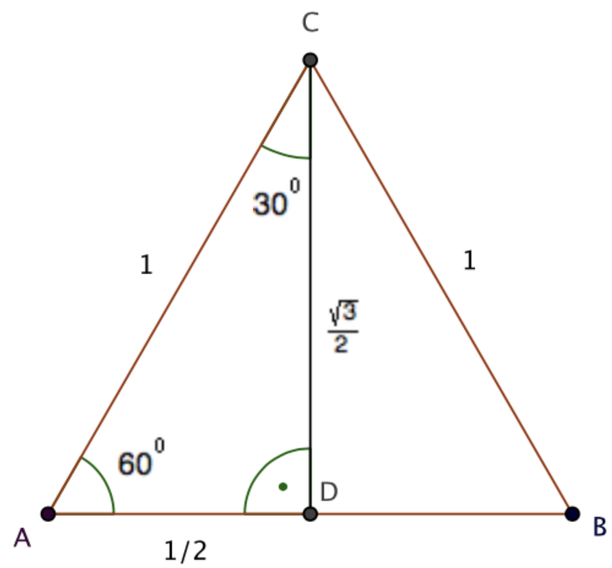
Par conséquent, on définit les **rapports trigonométriques** suivants :

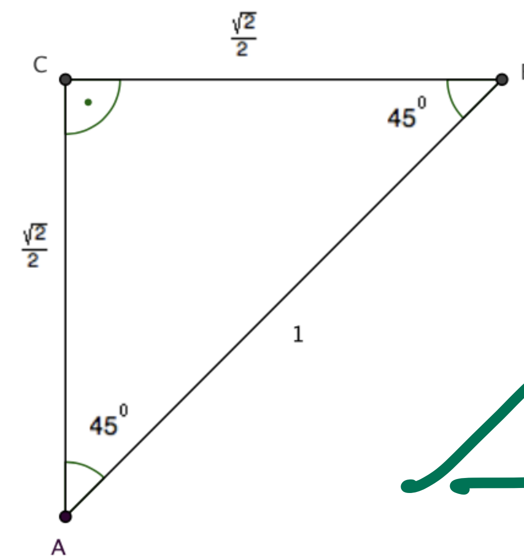
$$sin(\alpha) = \frac{côté\ opposé}{hypothénuse} = \frac{a}{c}$$

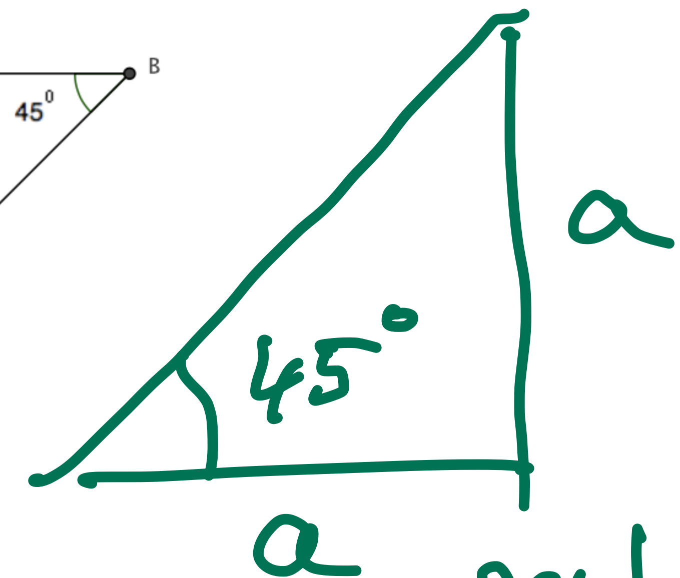
$$cos(\alpha) = \frac{côté\ adjacent}{hypothénuse} = \frac{b}{c}$$

$$tan(\alpha) = \frac{côté\ opposé}{côte\ adjacent} = \frac{a}{b}$$

Triangles équilatéral et isocèle







pente = 100%

$$\cos(60°) = \frac{1}{2} \qquad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(30°) = \frac{1}{2}$$

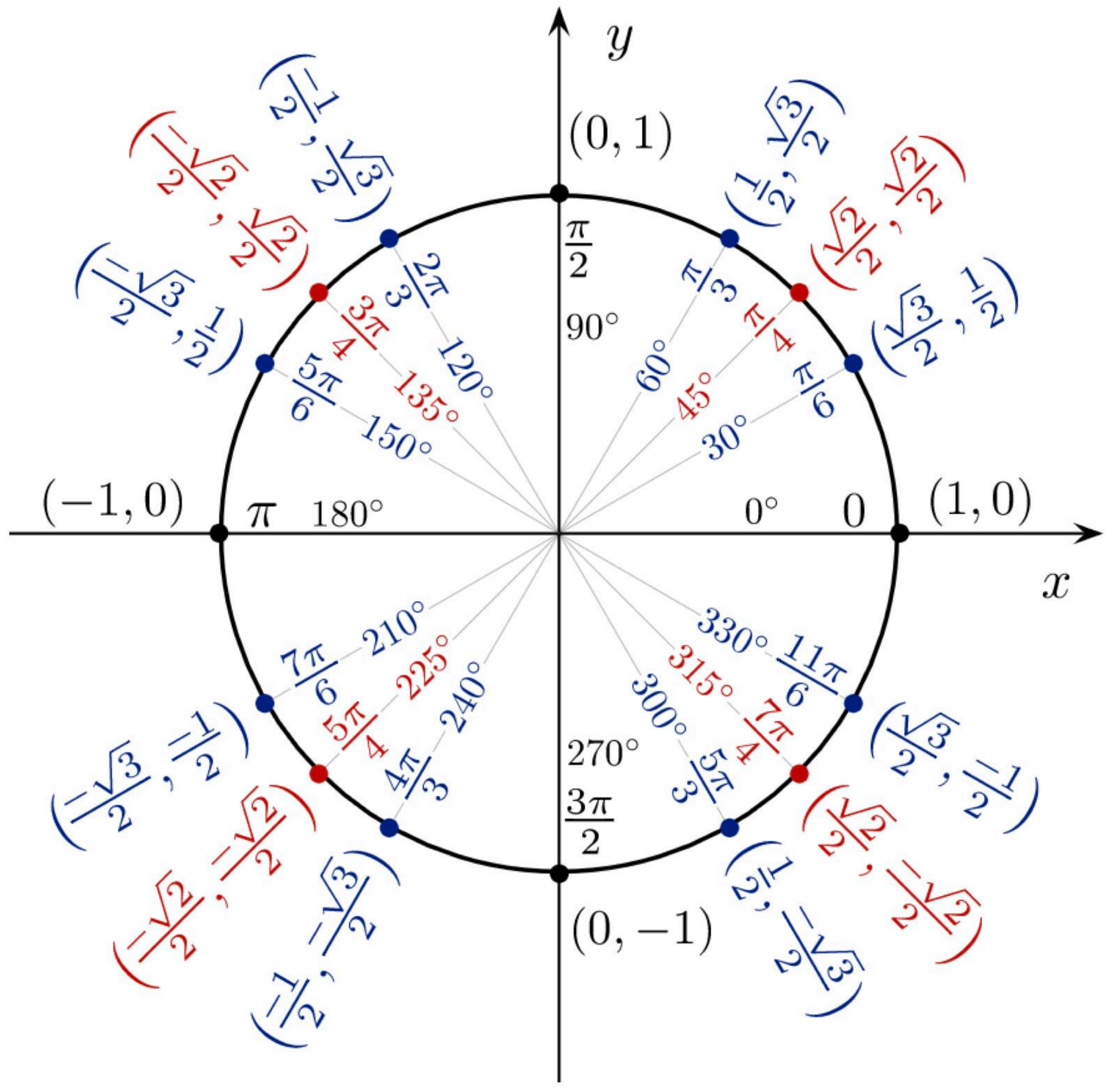
$$\tan(60°) = \sqrt{3} \qquad \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(45°) = 1$$

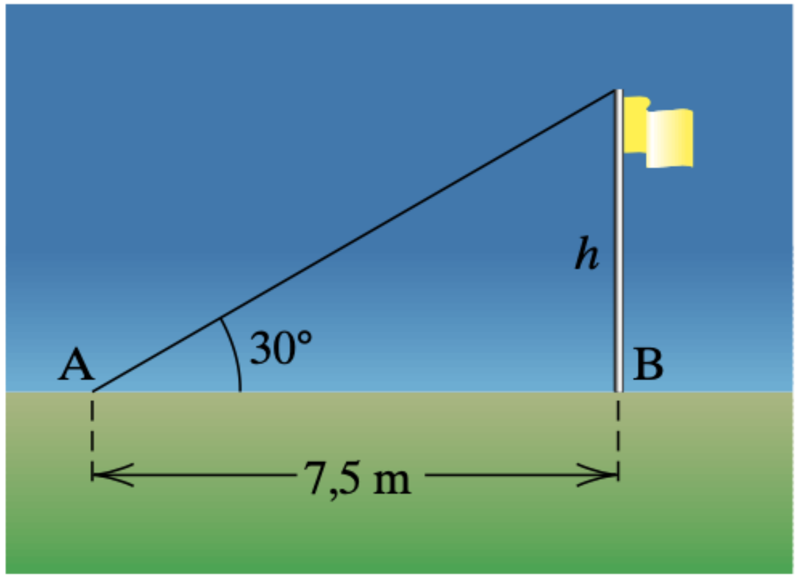
Angles remarquables



Exercice

Un géomètre observe qu'en un point A, placé au niveau du sol à une distance de 7,5 m de la base B d'un mât, l'angle entre le sol et le sommet du mât est 30°. Calculer la hauteur h du mât arrondie au dixième de centimètre.

Le mât est vertical !!



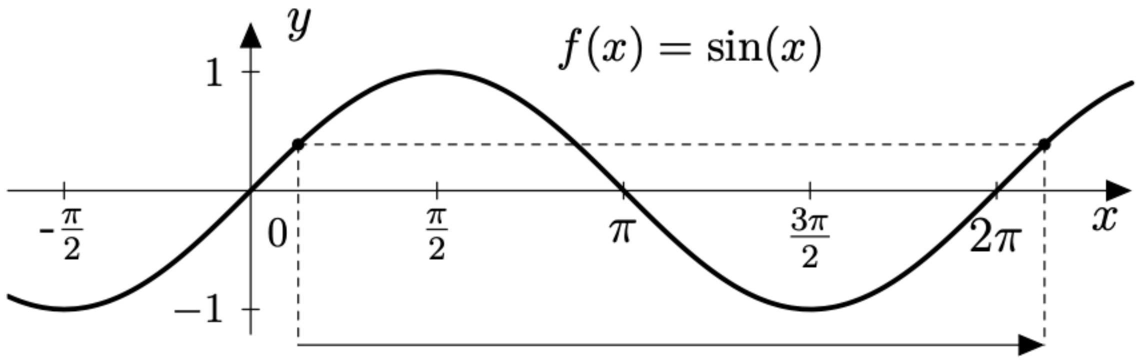
$$\tan(30°) = \frac{h}{7{,}5} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{7{,}5}{\sqrt{3}}$$

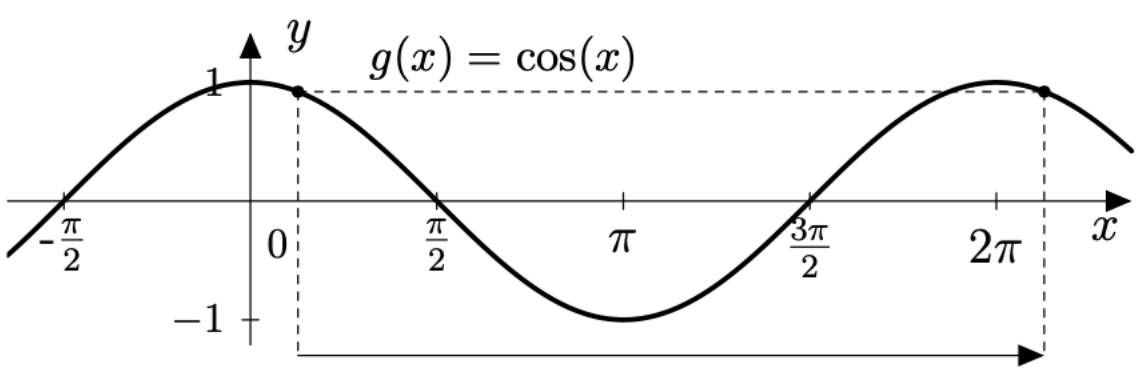
$$= \underline{\underline{4{,}330}} \text{ m.}$$

Graphes de fonctions trigonométriques

Graphes des fonctions trigonométriques : sinus et cosinus

Nous nous servons d'un système d'axes orthonormés dans lequel nous portons en abscisse les mesures en radians (éventuellement en degrés) des angles.





- On peut constater que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Autres propriétés :

- Les fonctions sinus et cosinus prennent des valeurs entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

- Le sinus est une fonction **impaire** car

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- Le cosinus est une fonction **paire** car

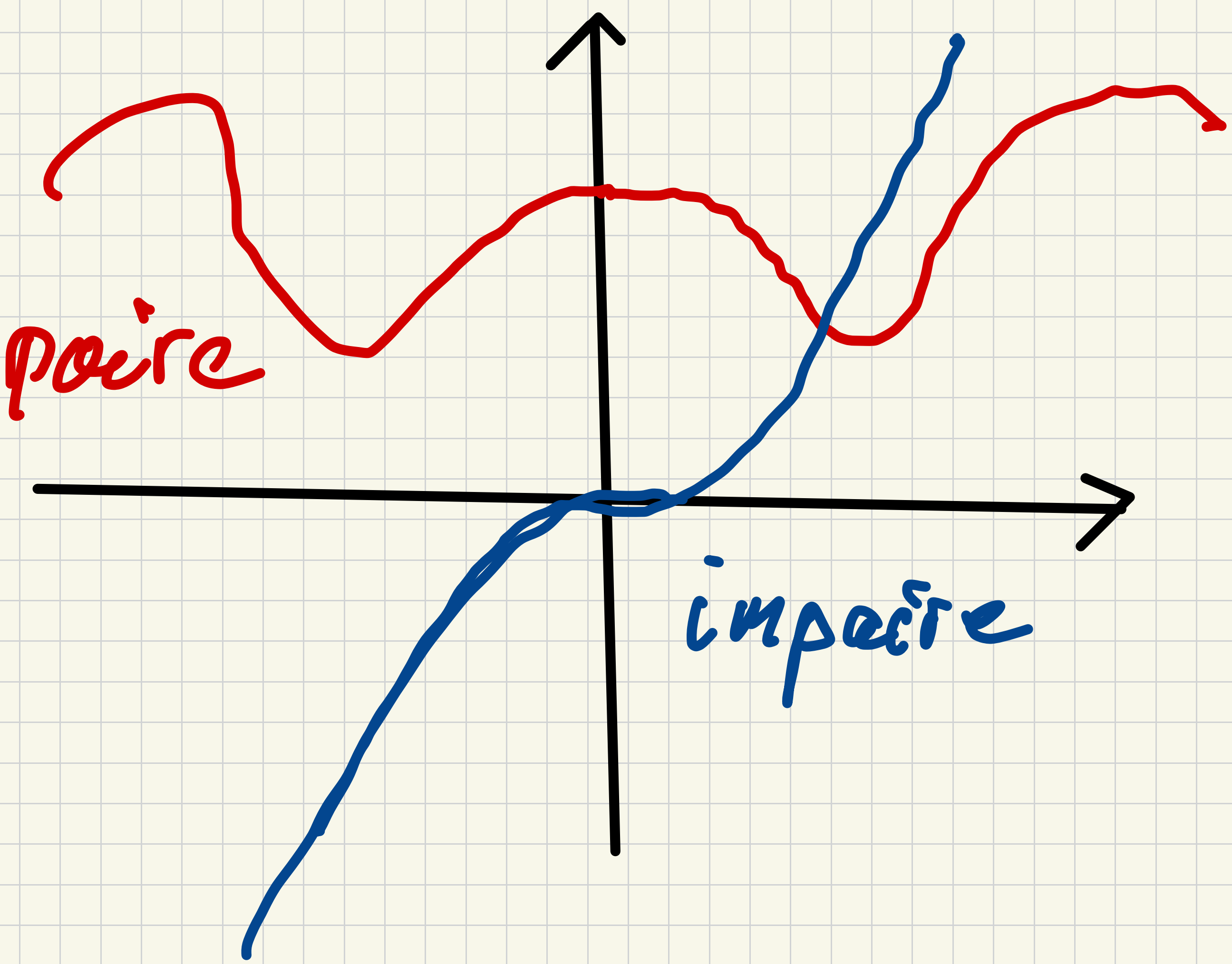
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

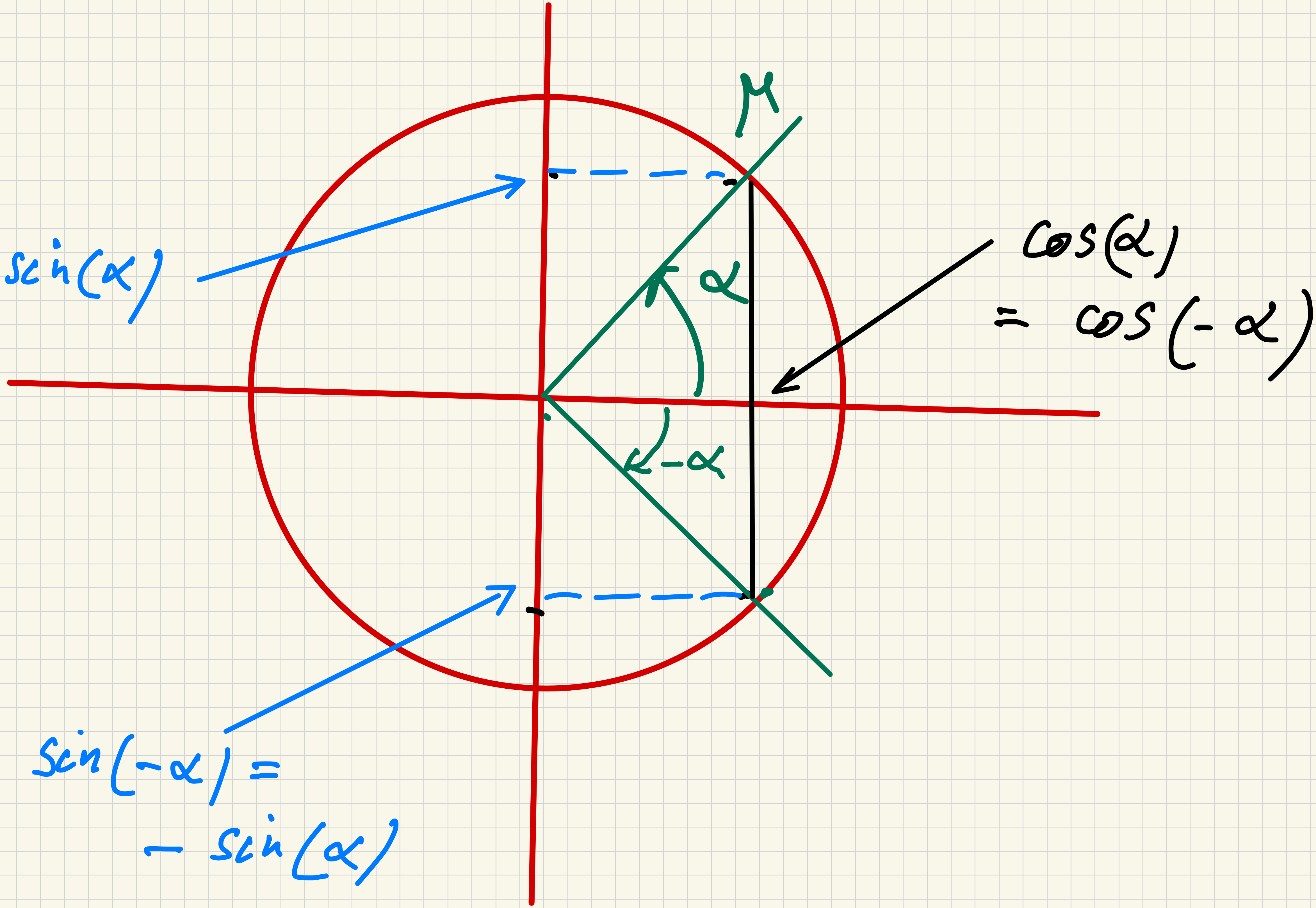
Une fonction f est dite

- **paire** si $f(x) = f(-x)$
- **impaire** si $f(-x) = -f(x)$

$$\Downarrow$$

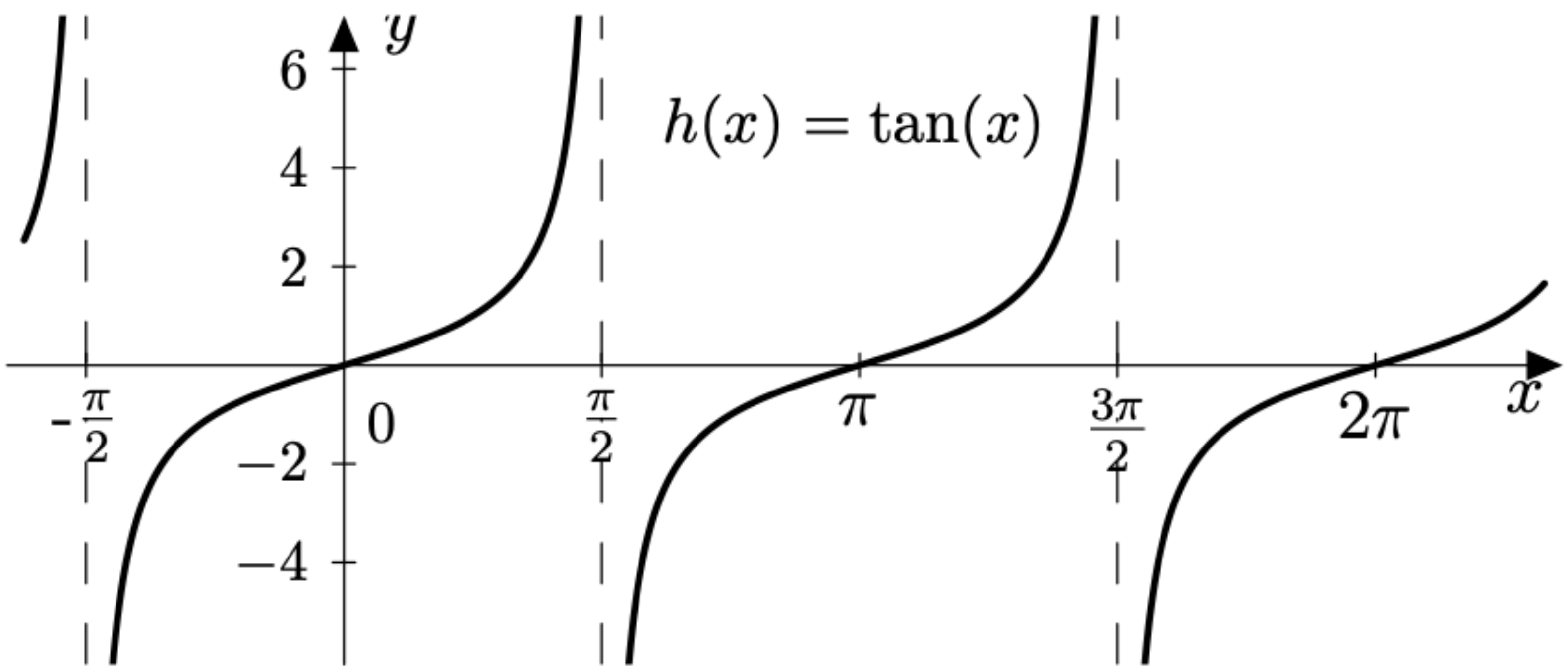
$$f(0) = 0$$





M
α
−α
sin(α)
cos(α)
= cos(−α)
sin(−α) =
− sin(α)

Graphes des fonctions trigonométriques : tangente



Définition :

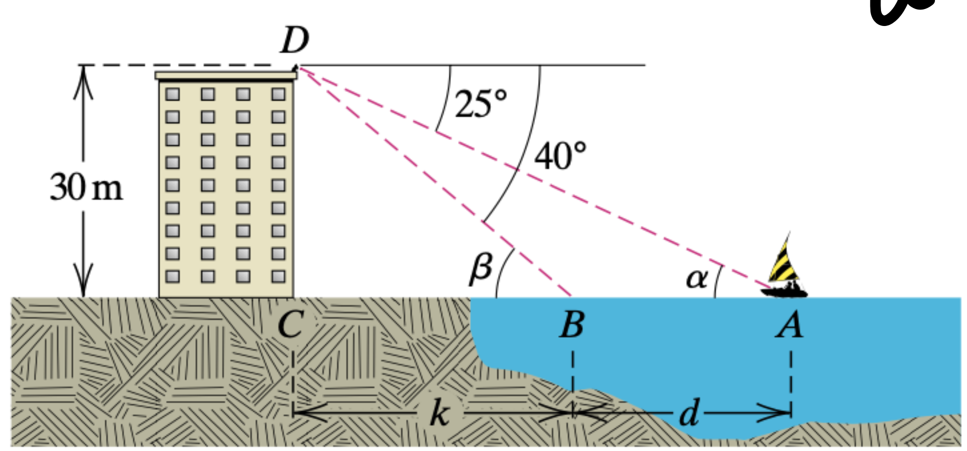
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- La fonction tangente est définie pour des angles différents de $\pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Elle est **périodique** de période π : $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Elle est nulle si l'angle vaut $0 + k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$
- Elle est une fonction **impaire** car $\tan(-x) = -\tan(x)$

Exercice

Au sommet d'un bâtiment dominant l'océan, un observateur regarde un bateau faisant route en direction du bâtiment. Si l'observateur se situe 30 m au-dessus du niveau de l'océan et si l'angle de dépression du bateau varie de 25° à 40° pendant la période d'observation, quelle est la distance parcourue par le bateau ?

$$d = k + d - d$$
$$= 64{,}33 - 35{,}75$$
$$= \underline{\underline{28{,}6\ m.}}$$



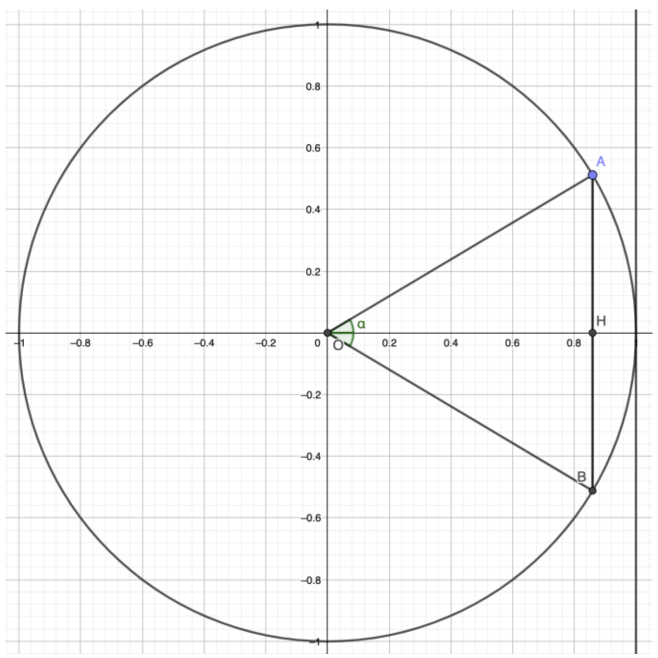
Triangle ACD : $\tan \alpha = \dfrac{30}{k+d} \Rightarrow k+d$

$64{,}33\,m. = \dfrac{30}{\tan(25°)} =$

$\beta = 40°$

$\triangle$ BCD : $\tan(40°) = \dfrac{30}{k} \Rightarrow k = \dfrac{30}{\tan(40°)} = 35{,}75$

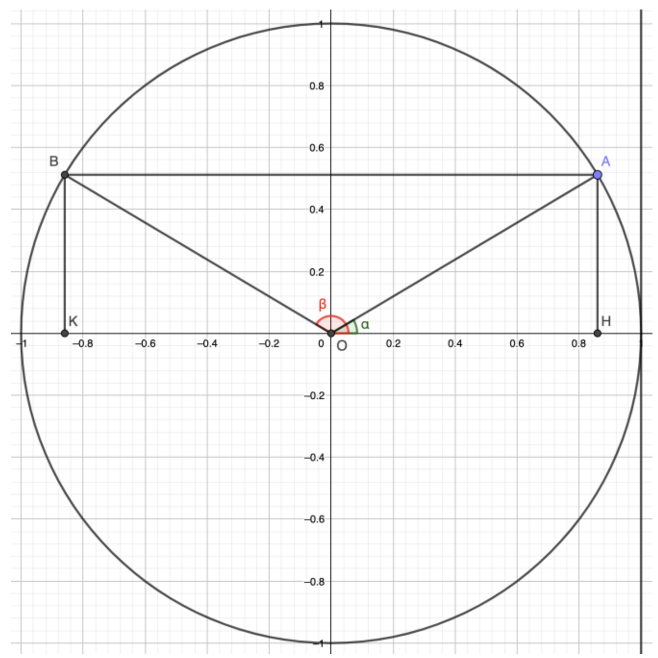
Angles opposés



1. $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$
2. $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
3. $\tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$

Angles supplémentaires

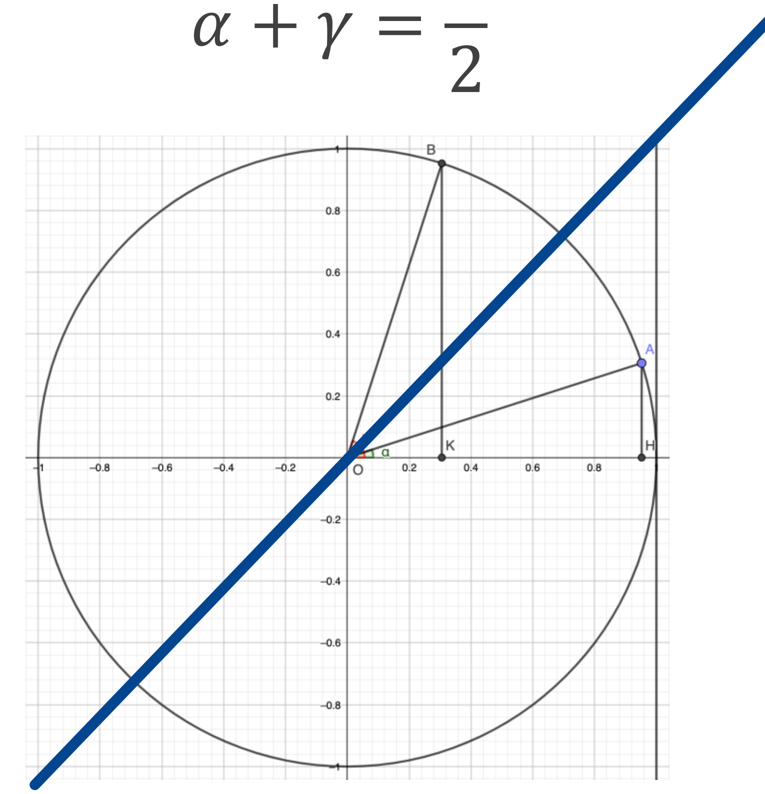
$$\alpha + \beta = \pi$$



1. $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$
3. $\tan(\alpha) = -\tan(\beta)$

Angles complémentaires

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$$



1. $\sin(\alpha) = \cos(\gamma)$
2. $\cos(\alpha) = \sin(\gamma)$
3. $\tan(\alpha) = \cancel{\cot(\gamma)}$

$$= \frac{1}{\tan(\gamma)}$$

Exercice

Simplifier l'expression suivante :

$$A = \underbrace{\sin(\pi - x)}_{\text{Suppl de } x} + \cos(\pi + x) + \underbrace{\cos(\pi/2 - x)}_{\text{Compl de } x} + \sin(\pi/2 + x) = 2\sin(x)$$

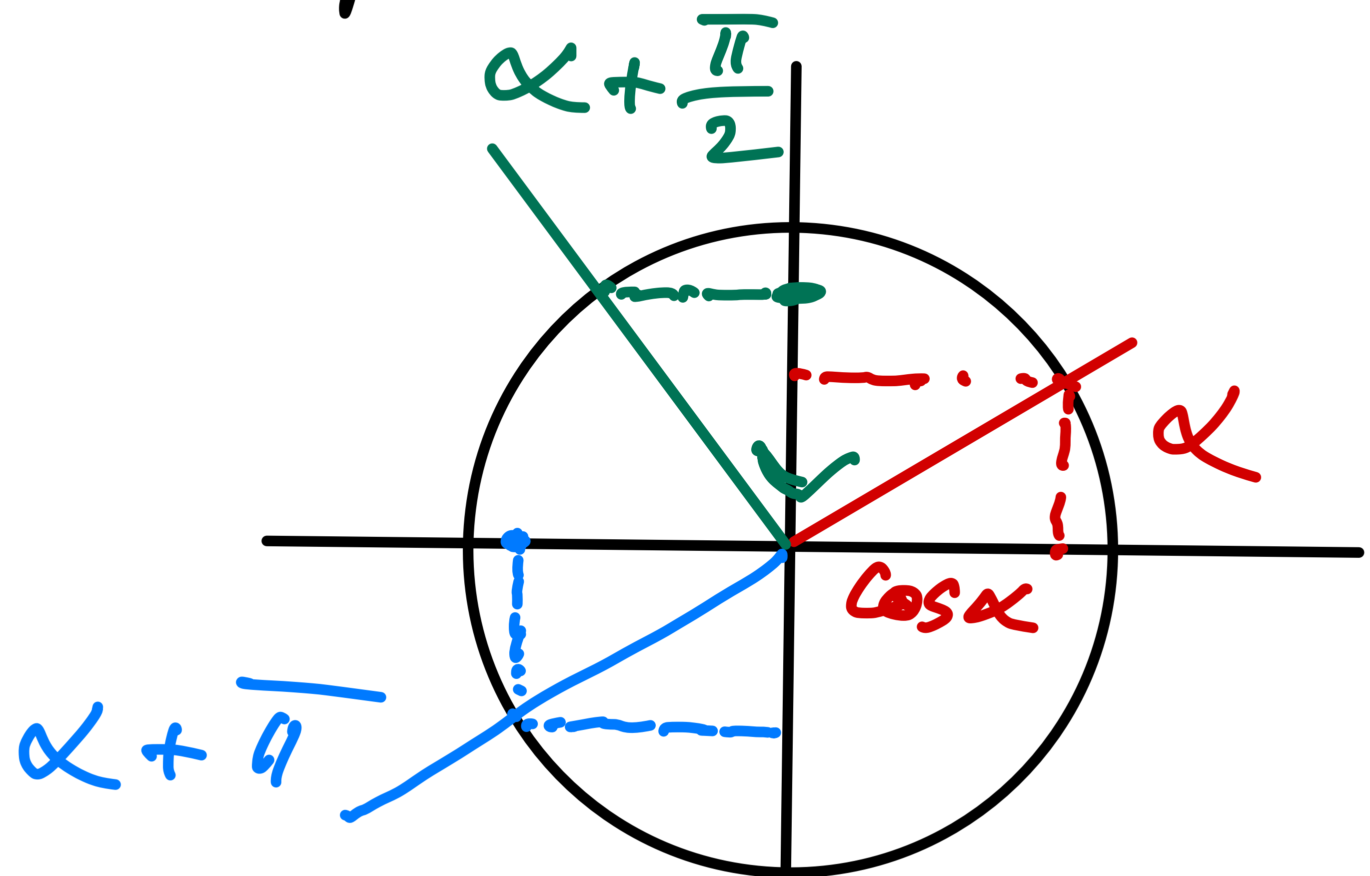
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

Somme $= 2\sin(x)$

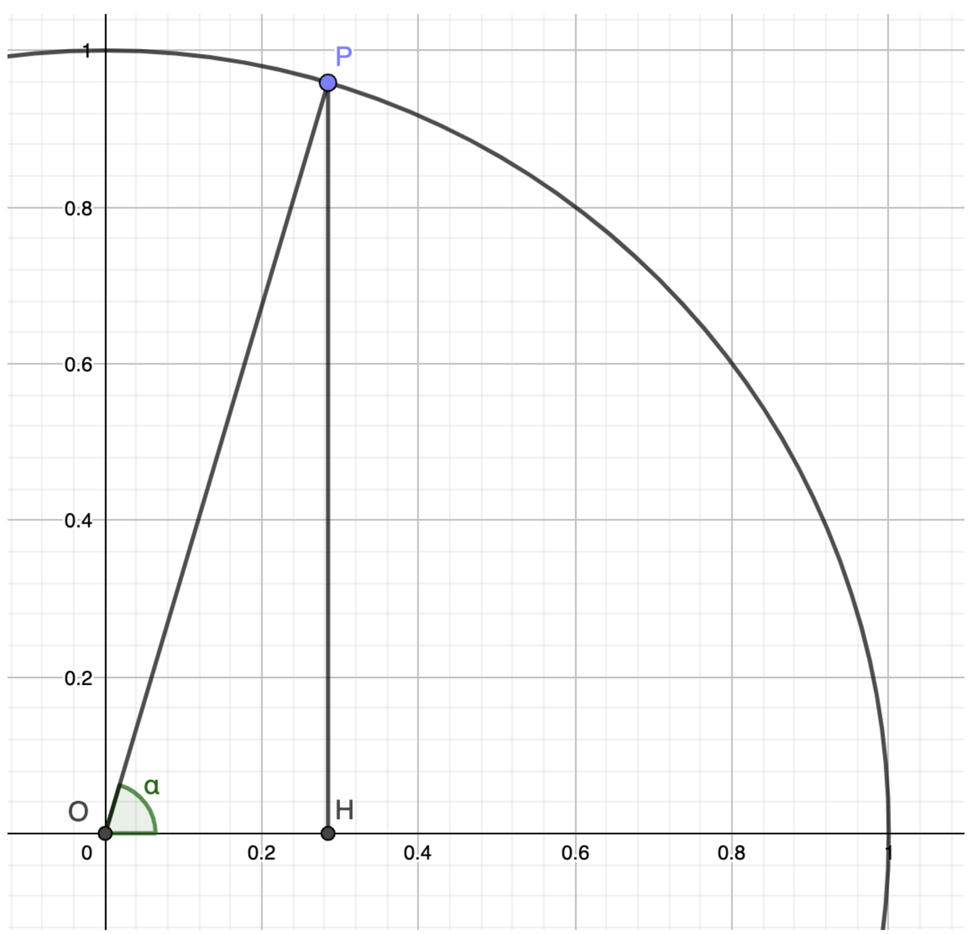


$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$

EPFL

Théorème de Pythagore (formulation trigonométrique)



Soit $\alpha \in]0°, 90°[$ et P le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Alors $\| \overrightarrow{OP} \| = 1$ et

$$\| \overrightarrow{OP} \|^2 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

Ainsi

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Cette formule peut être étendue à tous les angles $\alpha \in [0°, 360°]$.

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$$

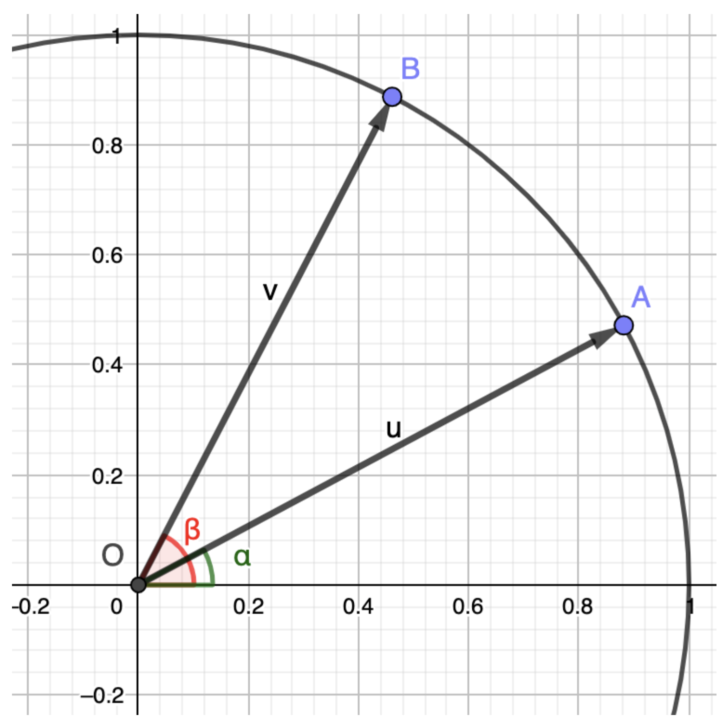
Exercice

Considérons deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Relativement au cercle trigonométrique, on a

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

a. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b. En déduire une formule pour calculer $\cos(\beta - \alpha)$.



Formules d'addition et de soustraction

Une utilisation judicieuse du produit scalaire et des relations trigonométriques établies précédemment permet d'établir les quatre formules d'addition et de soustraction suivantes :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$$

Rappel : $$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$= e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right]$$

Exercice

a. À partir des formules d'addition et de soustraction, considérer le cas particulier $\alpha = \beta$. Déduire ainsi les **formules d'angle double** pour $\sin(2\alpha)$ et $\cos(2\alpha)$.

b. En remplaçant α par $\alpha/2$ dans les deux formules d'angle double dériver les deux **formules de demi-angle** pour $\sin(\alpha/2)$ et $\cos(\alpha/2)$.

$$\cos(2\alpha) = \underbrace{\cos^2(\alpha)} - \sin^2(\alpha)$$

$$= 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) =$$

$$\underline{\underline{1 - 2\sin^2(\alpha)}}$$

$$= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2\alpha) = \underline{\underline{2\cos^2\alpha - 1}}$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

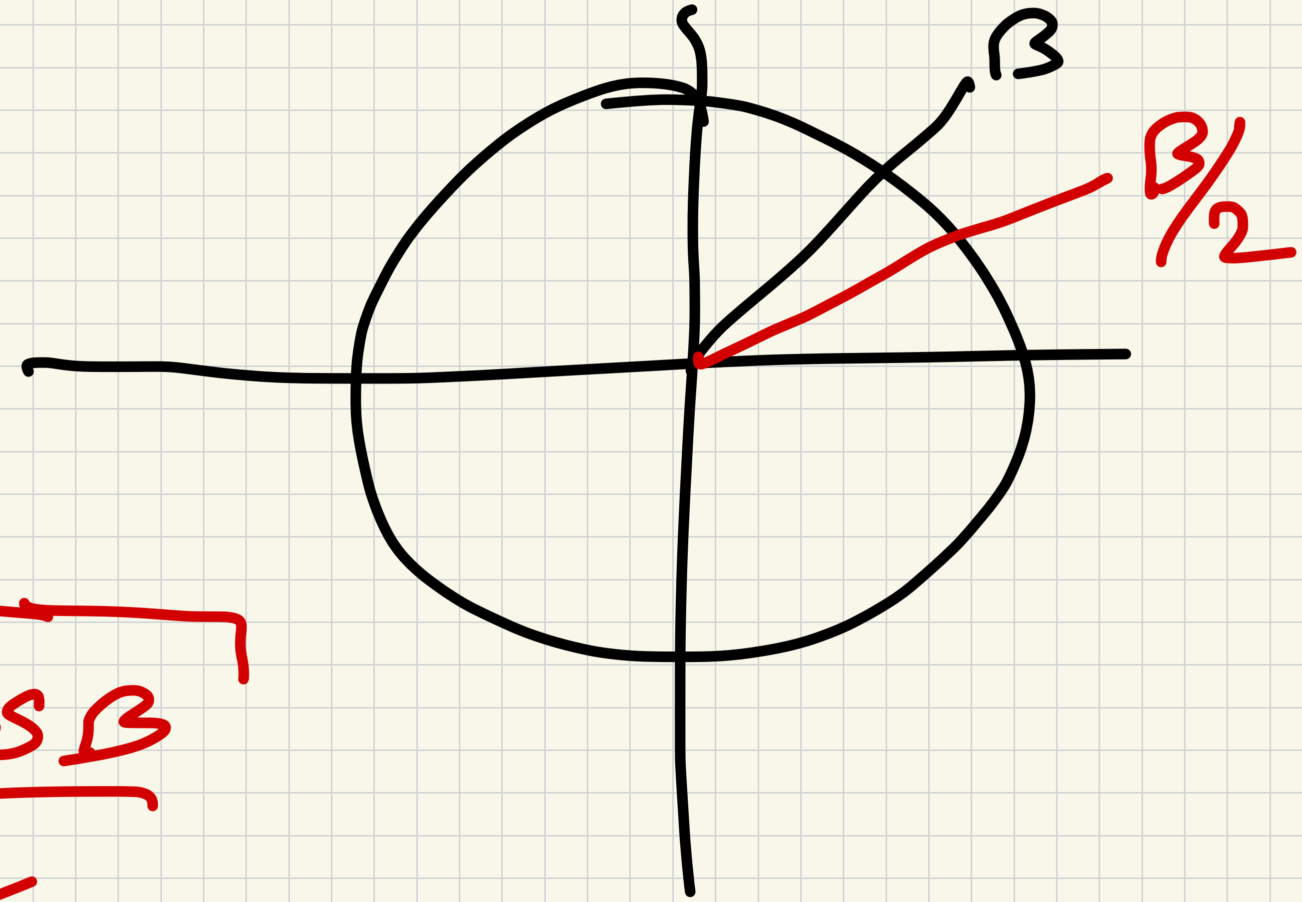
$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

$$\cos(\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1$$

$$\frac{1 + \cos(\beta)}{2} = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}}$$

$\beta = \frac{\pi}{4}$



$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$

$$= +\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

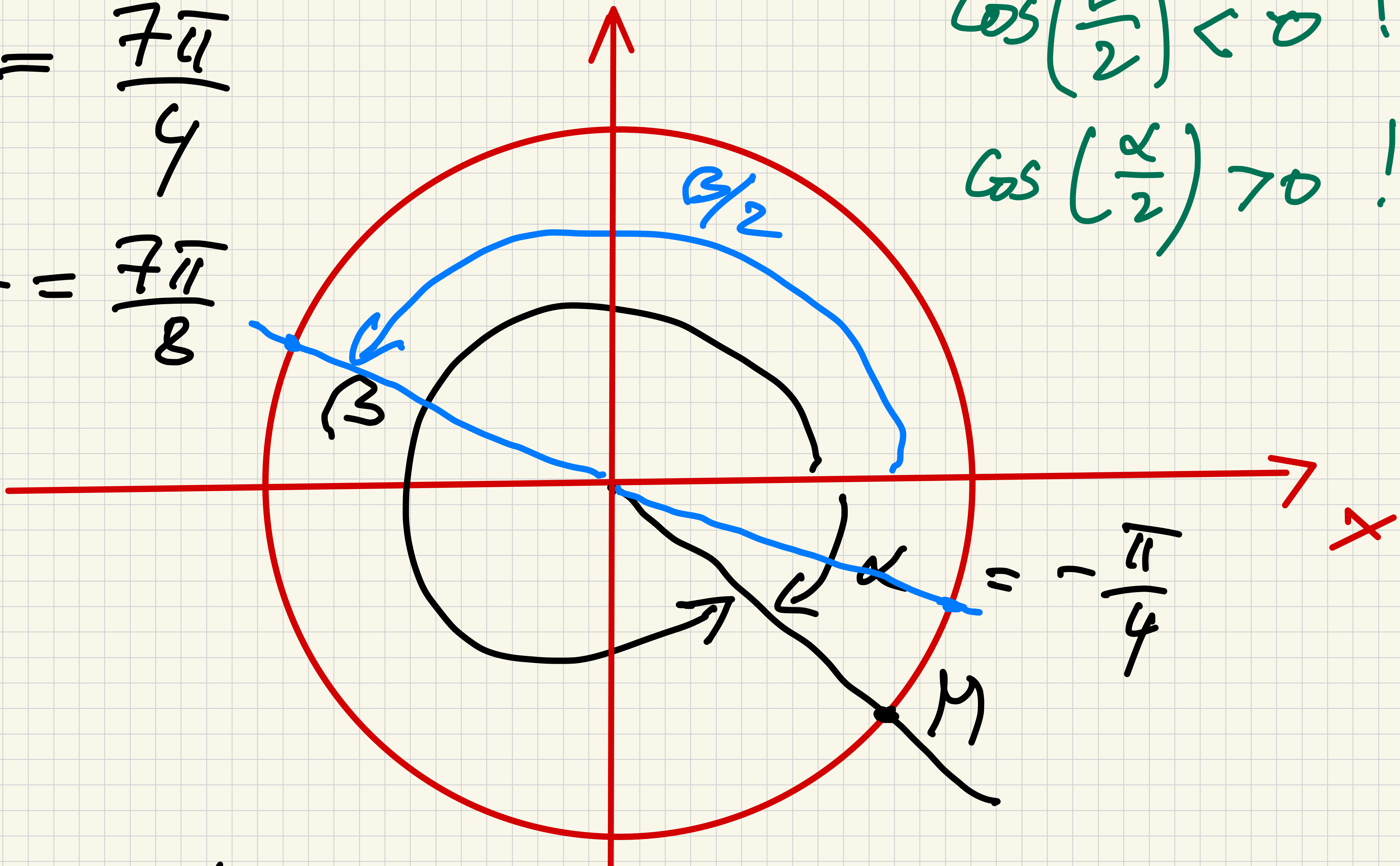
Exemple simple $\Rightarrow$ le signe $+$ vient du fait que $\beta/2$ est dans le quadrant I

$\beta = \frac{7\pi}{4}$

$\frac{\beta}{2} = \frac{7\pi}{8}$

$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) < 0$!!

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$!!



Le point M peut être représenté par

- l'angle $-\pi/4 = \alpha \implies \alpha/2 = -\pi/8$
- l'angle $7\pi/8 = \beta \implies \beta/2 = 7\pi/8$