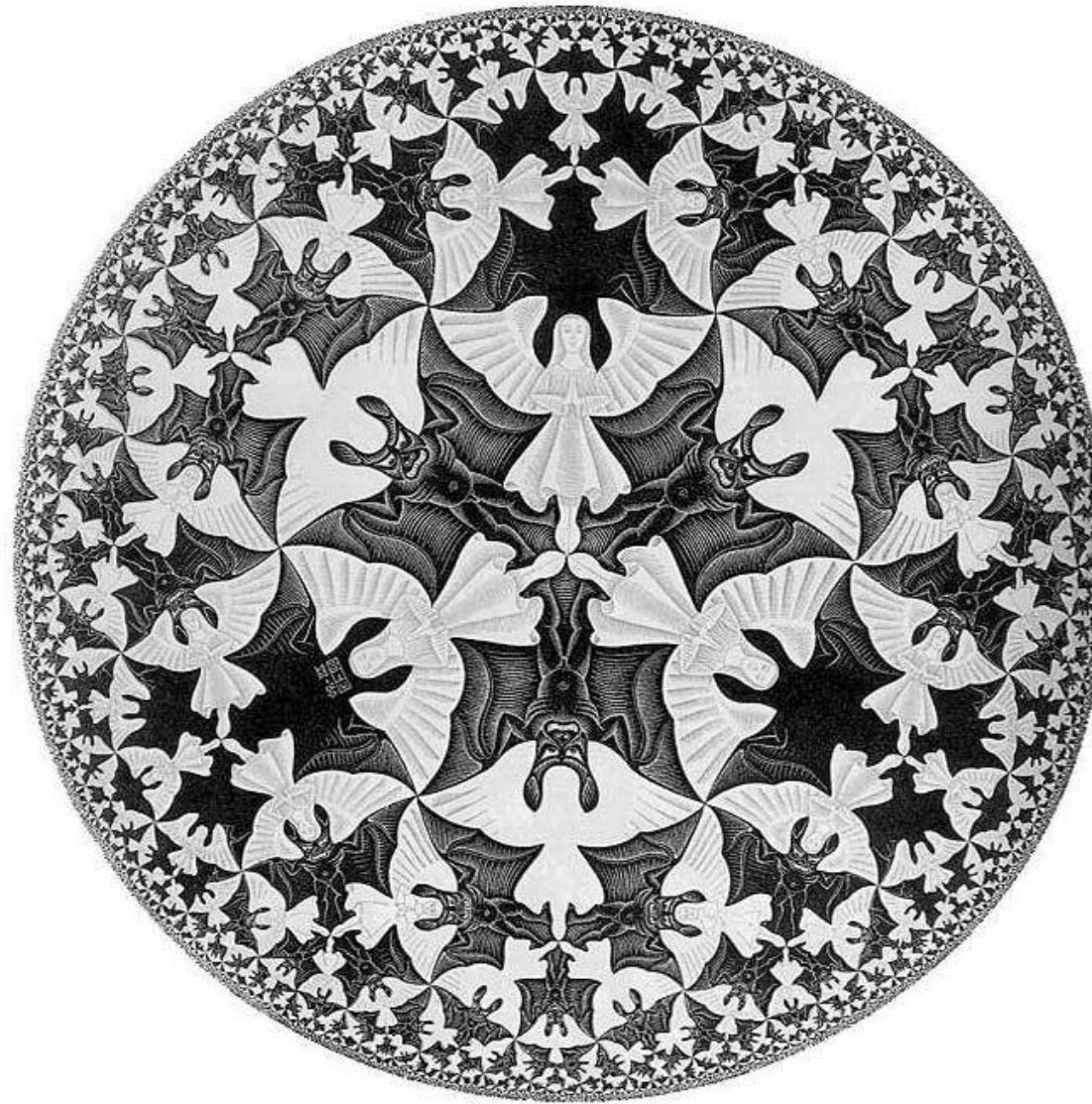




Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

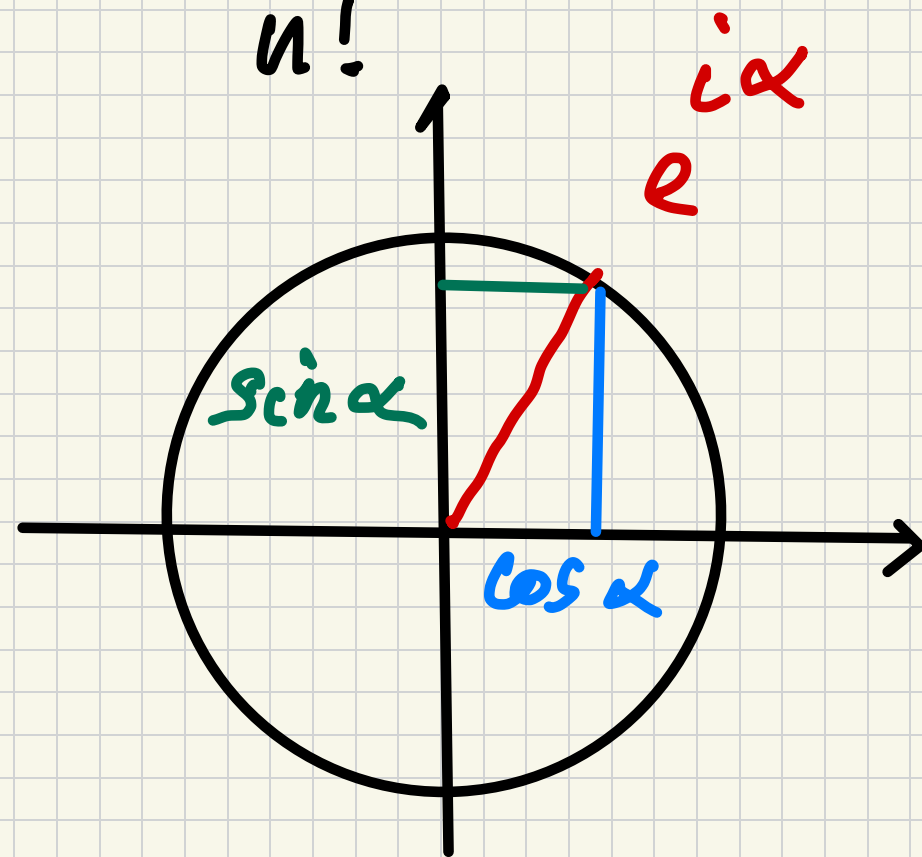
Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Philippe Chabloz

Rappel de la 1^{ère} semaine

Def:
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

α en radians



Propriété :

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Formules de De Moivre

Les formules suivantes apparaissent dans l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler qui les a démontrées, pour tout entier naturel n , en 1748. Mais elles apparaissent de manière implicite chez Abraham de Moivre à plusieurs reprises à partir de 1707, dans ses travaux sur les racines n -ièmes de nombres complexes.

$$\begin{aligned}\sin(nx) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \underbrace{\sin \frac{k\pi}{2}}_{\substack{0 \text{ si } k=0 \\ 1 \quad k=1 \\ 0 \quad k=2 \\ -1 \quad k=3 \\ \vdots}} \\ \cos(nx) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \underbrace{\cos \frac{k\pi}{2}}_{1/0/-1/0}\end{aligned}$$

La version avec l'exponentielle complexe est beaucoup plus simple et se déduit immédiatement:

Euler pour e^{ix}

$$\underbrace{(\cos x + i \sin x)^n}_{\text{Euler } e^{ixn}} = \underbrace{(e^{ix})^n}_{\text{Euler } e^{ixn}} = e^{ixn} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Série de Taylor pour sinus et cosinus

La série de Taylor au point a d'une fonction indéfiniment dérivable f en ce point est une série entière $\sum c_n(x-a)^n$ construite à partir de f et de ses dérivées successives en a . Une fonction f est dite *analytique* en a quand cette série coïncide avec f au voisinage de a .

On peut définir les fonctions trigonométriques à l'aide de séries entières :

x radians



Brook Taylor
1685 - 1731

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Nous avons déjà rencontré une autre série de Taylor. En effet, nous avons montré que pour la fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Série de Taylor du cosinus

Formule d'Euler pour $i\alpha$:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Formule d'Euler pour $-i\alpha$:

$$e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha) = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

(I) $e^{i\alpha}$
(II) $e^{-i\alpha}$

En additionnant les 2 lignes et en divisant par 2 on obtient

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

De même en soustrayant la 2^{ème} ligne à la 1^{ère} puis en divisant par $2i$ on obtient:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

En utilisant la série de l'exponentielle dans la formule du **cosinus** ci-dessus on obtient

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot [e^{ix} + e^{-ix}] = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right] = 1 + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^6 x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad (\text{I})$$

$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha) \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) + (\text{II}) : e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$(\text{I}) - (\text{II}) : e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{1}{2} \left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{1 + \cancel{i\alpha} + \frac{(i\alpha)^2}{2} + \cancel{\frac{(i\alpha)^3}{3!}} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \cancel{\frac{(i\alpha)^5}{5!}} + \dots}_{e^{-i\alpha}} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{1 + \cancel{(-i\alpha)} + \frac{(-i\alpha)^2}{2} + \cancel{\frac{(-i\alpha)^3}{3!}} + \frac{(-i\alpha)^4}{4!} + \cancel{\frac{(-i\alpha)^5}{5!}} + \dots}_{e^{i\alpha}} \right) \\
 &= \underbrace{1}_{\text{red}} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{2}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\alpha^4}{4!}}_{\text{pink}} - \underbrace{\frac{\alpha^6}{6!}}_{\text{pink}} + \dots
 \end{aligned}$$

$$x^2 + (-x)^2 = 2x^2$$

$$x^3 + (-x)^3 =$$

0

$$(x^3 - x^3)$$

Série de Taylor du sinus

En utilisant la série de l'exponentielle dans la formule du **sinus** ci-dessus on obtient

$$\sin x = \frac{1}{2i} \cdot [e^{ix} - e^{-ix}] = \frac{1}{2i} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right] = x + \frac{i^3 x^3}{i 3!} + \frac{i^5 x^5}{i 5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{6} + \frac{(0,2)^5}{120} - \frac{(0,2)^7}{7!}$$

$\frac{1}{57} \cdot \frac{1}{7!} \approx 9$
 $\approx 10^{-9}$

Graphes des fonctions trigonométriques : sinus et cosinus

Nous nous servons d'un système d'axes orthonormés dans lequel nous portons en abscisse les mesures en radians (éventuellement en degrés) des angles.

$\mathbb{R} - 2\pi$

$$\sin(x), \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1]$$

- ❖ On peut constater que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Autres propriétés :

- ❖ Les fonctions sinus et cosinus prennent des valeurs entre -1 et 1 :

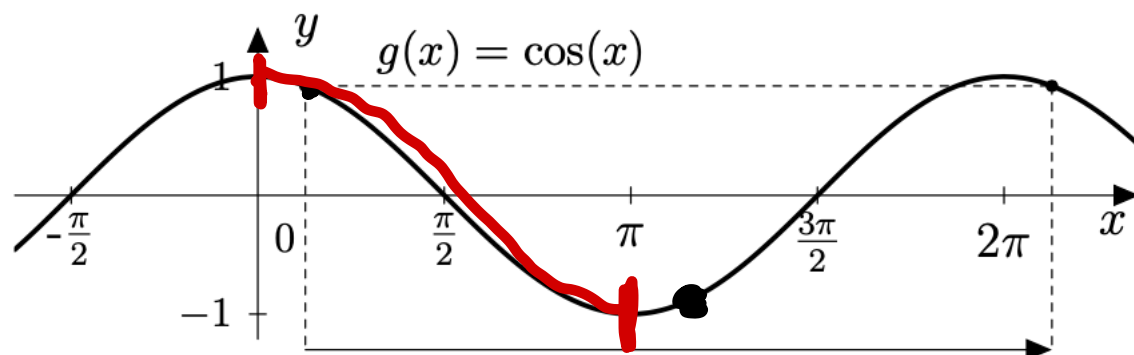
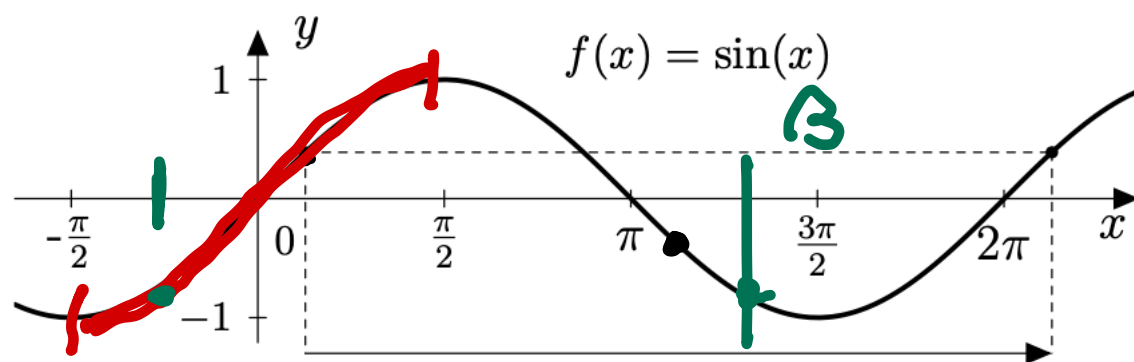
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

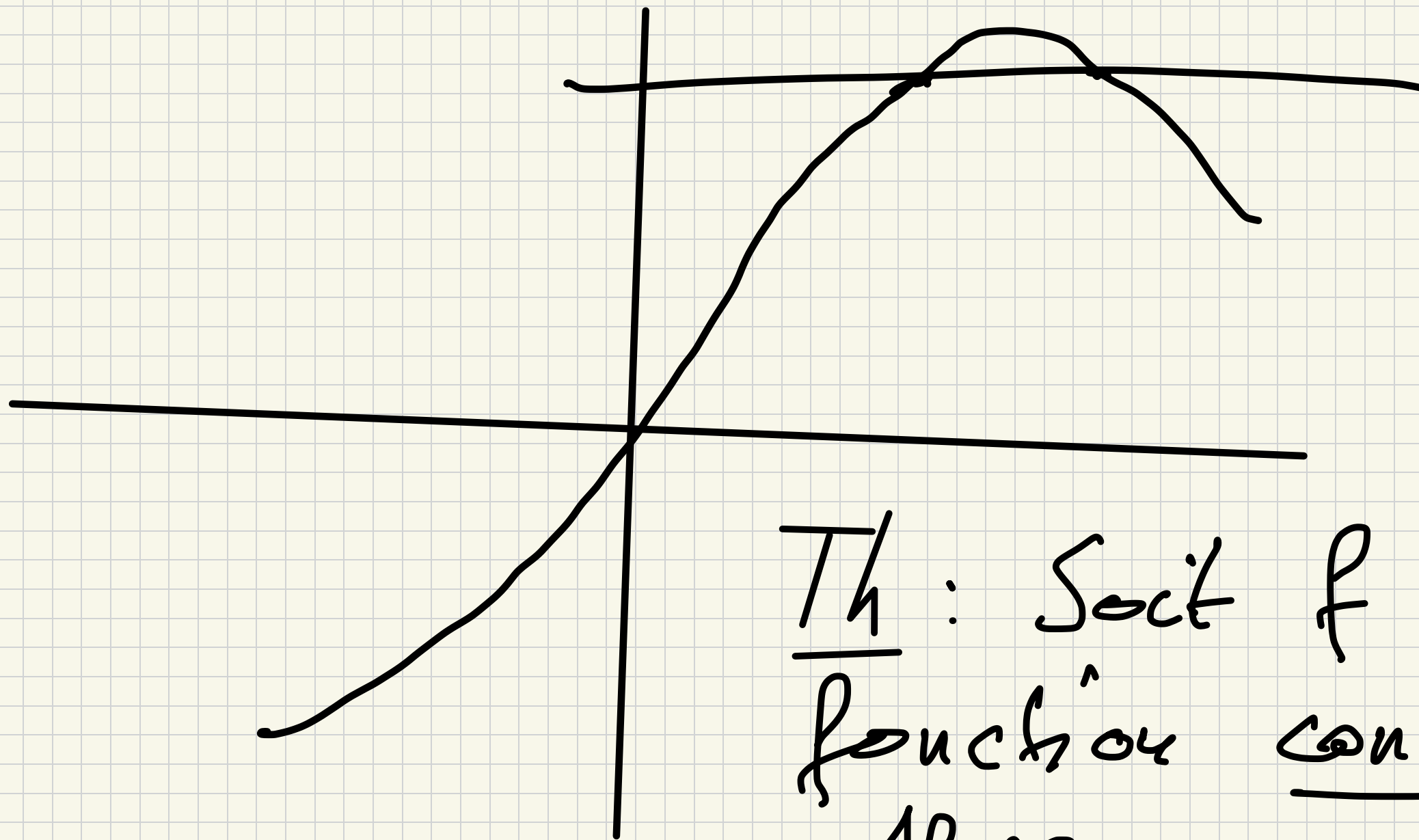
- ❖ Le sinus est une fonction **impaire** car

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

- ❖ Le cosinus est une fonction **paire** car

$$\cos(-x) = \cos(x)$$





Th: Soit f une
 fonction continue
 Alors

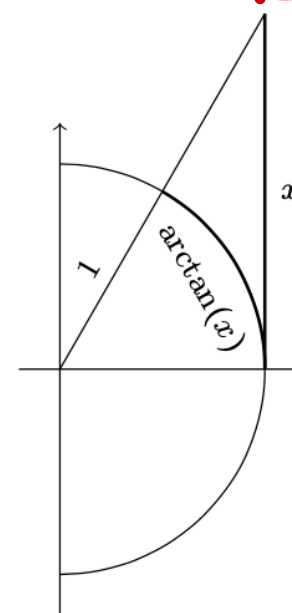
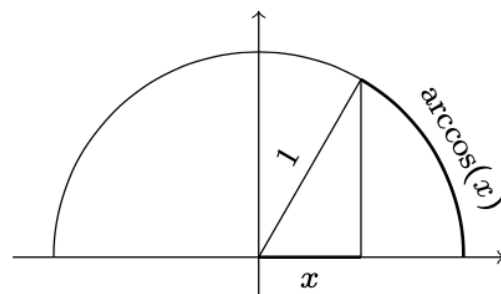
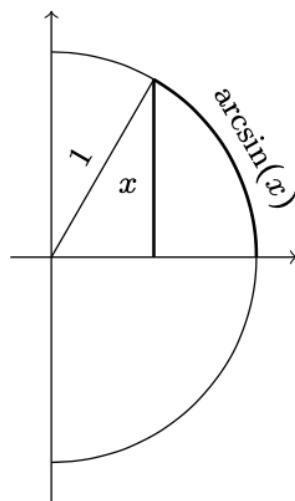
f est injective $(\Leftrightarrow)$ f est
 strictement
 monotone

Les fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente sont appelées **arcsin**, **arccos** et **arctan**.

Pour définir ces fonctions réciproques, on doit restreindre chaque fonction trigonométrique à un intervalle sur lequel elle est bijjective.

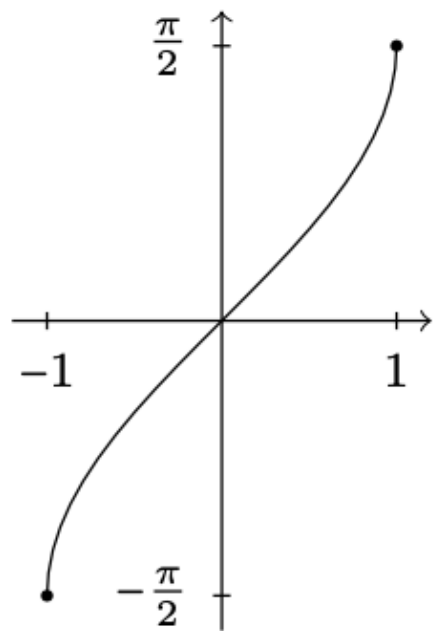
- ❖ l'arcsin d'un nombre réel compris entre -1 et 1 est l'unique mesure d'angle en radians entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le **sinus** vaut ce nombre.
- ❖ l'arccos d'un nombre réel compris entre -1 et 1 est l'unique mesure d'angle en radians entre 0 et π dont le **cosinus** vaut ce nombre.
- ❖ l'arctan d'un nombre réel compris est l'unique mesure d'angle en radians entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut ce nombre.



Graphiques des fonctions trigonométriques réciproques

(I) (IV)

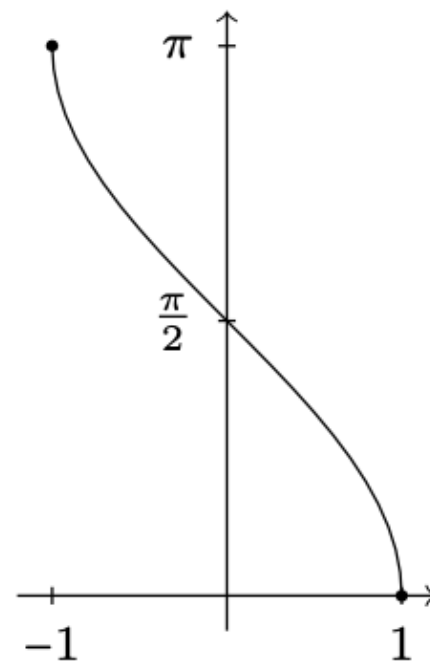
$$\arcsin: [-1, 1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$\arcsin(x)$

I II

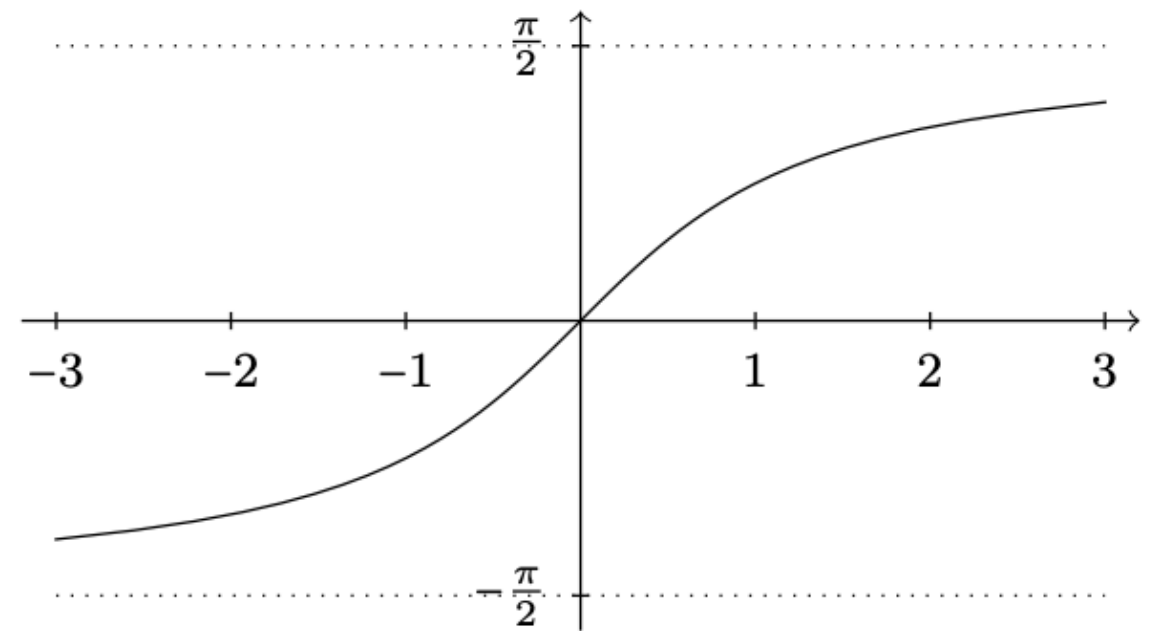
$$\arccos: [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$$



$\arccos(x)$

I II

$$\arctan: \mathbb{R} \mapsto \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



$\arctan(x)$

très vrai !!

$\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ MAIS $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$



$$\arcsin(\sin \underline{\alpha}) \neq \alpha$$

$$\sin \alpha \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \alpha + 2\pi \cdot k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Trigonométrie dans un triangle quelconque

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Théorème de l'aire

$$\text{Aire}\Delta = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$$

$$\text{Aire}\Delta = \frac{1}{2} ac \sin(\beta)$$

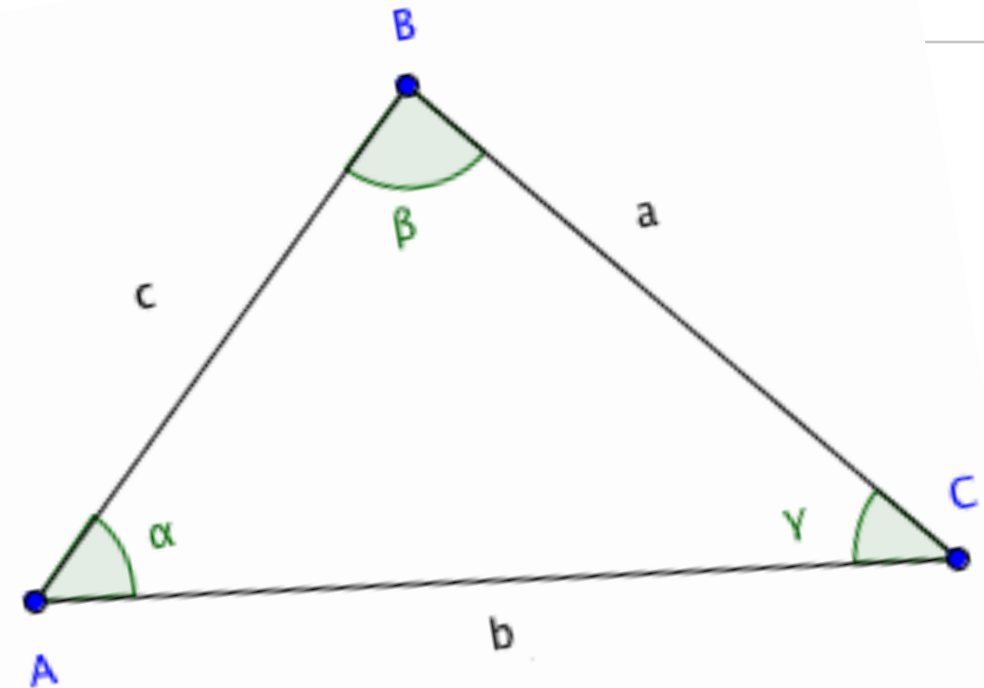
$$\text{Aire}\Delta = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$$

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$



- ❖ Un triangle est complètement déterminé dans les cas suivants :
 1. On en connaît **un côté et deux angles** (théorème du sinus).
 2. On en connaît **deux côtés et un angle opposé à l'un d'entre eux** (théorème du sinus).
 3. On en connaît **deux côtés et l'angle compris** entre ces deux côtés (théorème du cosinus).
 4. On en connaît **trois côtés** (théorème du cosinus).
- ❖ On peut calculer l'aire sans connaître la hauteur (théorème de l'aire).

Exercice

À l'origine, la tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de haut. Maintenant, elle penche d'un angle θ par rapport à la perpendiculaire, comme le montre la figure ci-dessous. Lorsque le sommet de la tour est observé à partir d'un point distant de 45 m du centre de sa base, l'angle d'élévation est de 53.3° .

$$\theta = 90 - \beta$$

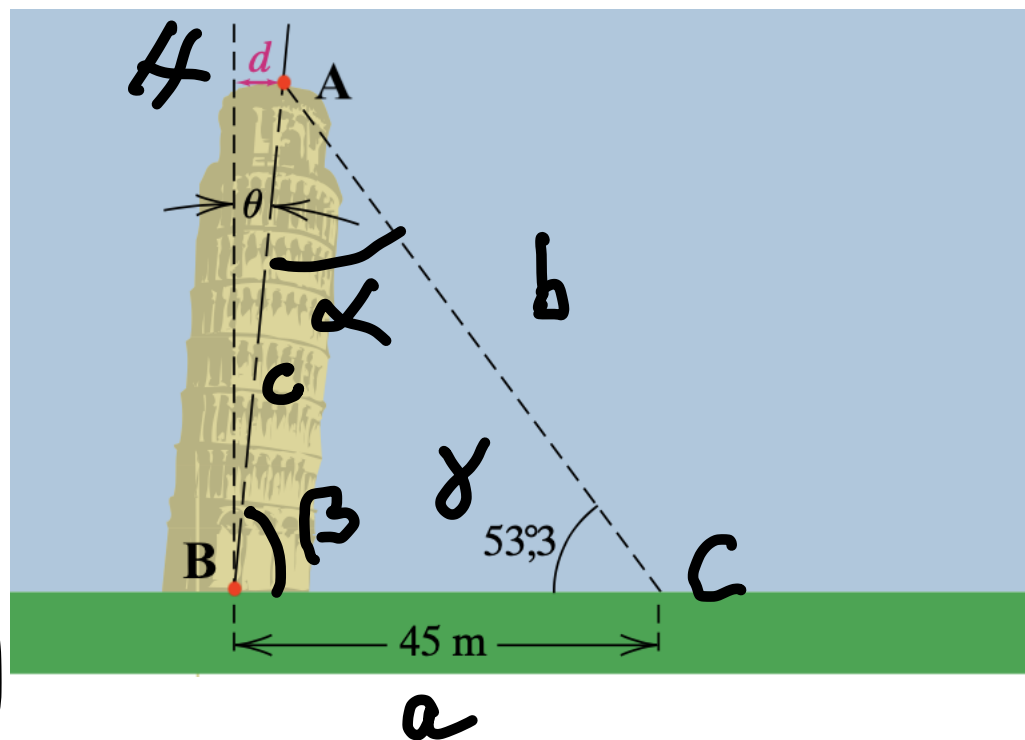
$$c = 54.$$

- Calculer l'angle θ .
- Calculer la hauteur de la tour inclinée.
- Calculer la distance d qui exprime de combien le centre du sommet de la tour s'est éloigné de la perpendiculaire.

Th. Sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{45}{\sin(\alpha)} = \frac{54}{\sin(53.3^\circ)}$$



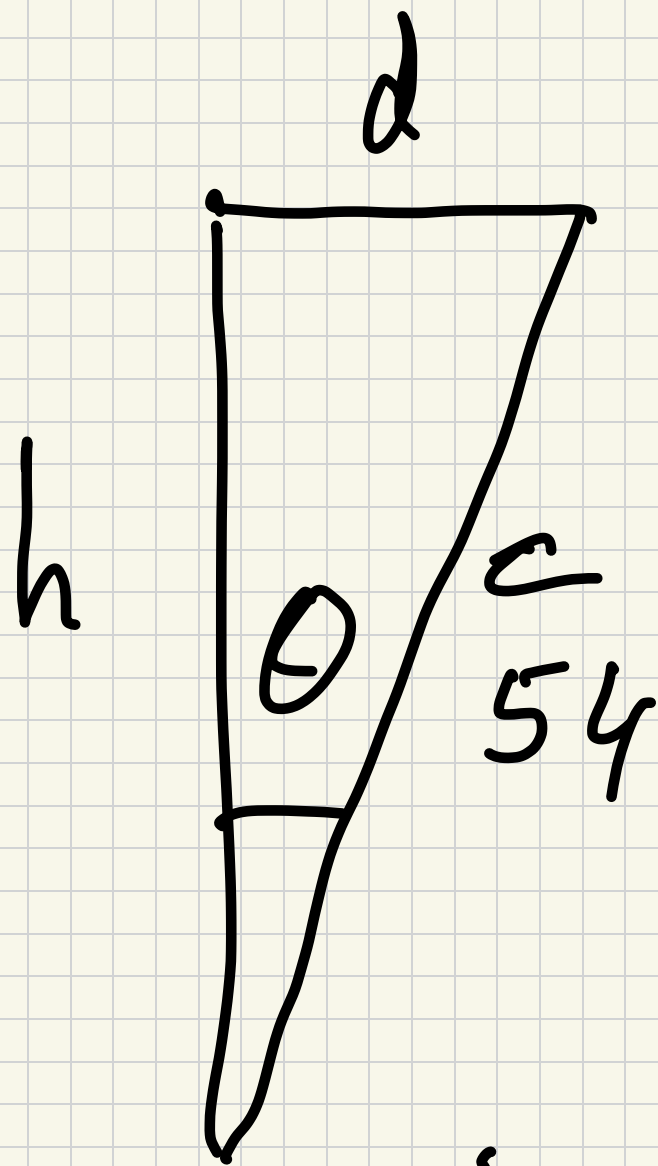
$$\sin(\alpha) = 0.6681$$

$$\alpha = 41.9^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$= 84.77^\circ$$

$$\theta = 5.22^\circ$$



$$\theta = 5,22^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{d}{54}$$

$$\Rightarrow d = 54 \cdot \sin \theta$$
$$= \underline{\underline{4,91 \text{ m.}}}$$

$$\cos \theta = \frac{h}{54}$$

$$\Rightarrow h = 54 \cdot \cos(5,22^\circ)$$
$$= \underline{\underline{53,77 \text{ m.}}}$$

Cercle et hyperbole

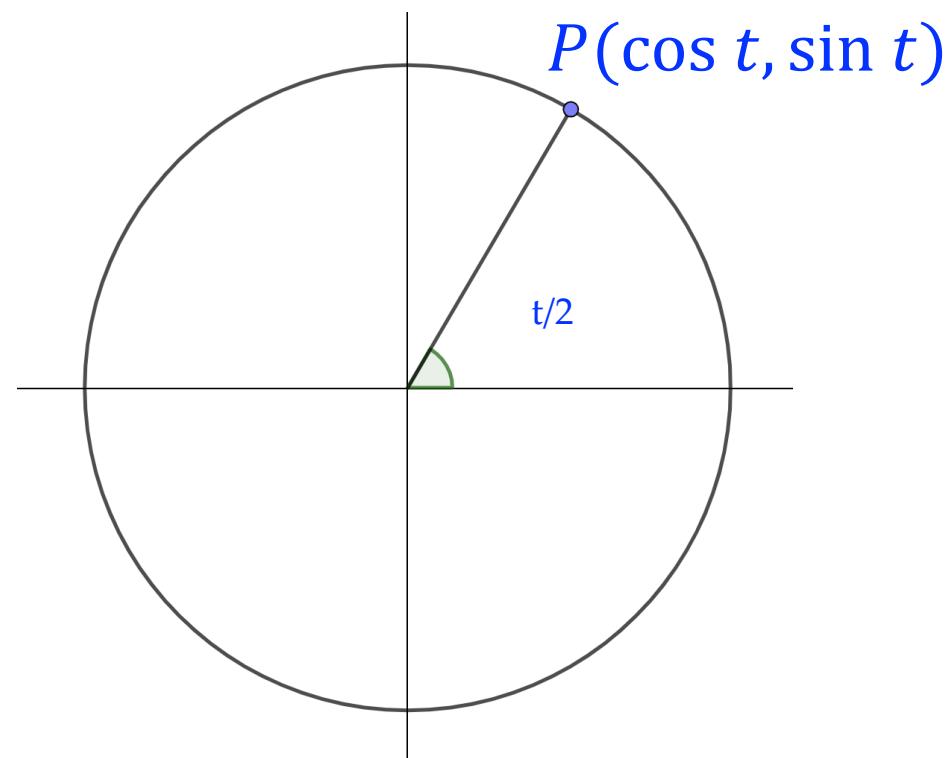
$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$. Alors

$$P(\cos t, \sin t)$$

est un point sur le cercle C détermine une surface égale à $t/2$.

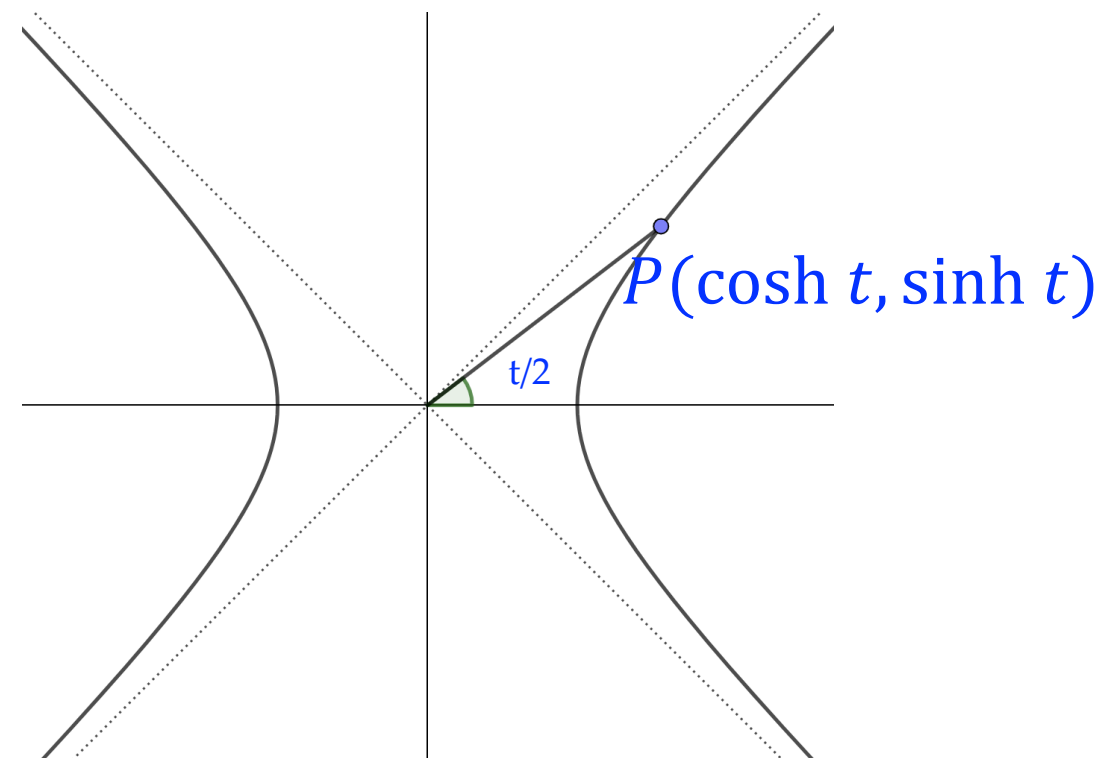


Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$

une hyperbole centrée en $(0,0)$. Alors

$$P(\cosh t, \sinh t)$$

est un point sur l'hyperbole H qui détermine une surface égale à $t/2$.



Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont analogues aux fonctions trigonométriques, mais le paramètre x ne peut pas être interprété comme un angle. Ce sont les fonctions :

❖ Sinus hyperbolique :

Défini comme étant la partie impaire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

❖ Cosinus hyperbolique

Défini comme étant la partie paire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

❖ Tangente hyperbolique

Défini comme le rapport entre les sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, c'est-à-dire par :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \approx \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Propriétés des fonctions hyperboliques

- ❖ Les sinus et cosinus hyperboliques vérifient l'identité suivante :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

- ❖ La fonction sinh est impaire et $\sinh(0) = 0$.
- ❖ La fonction cosh est paire et admet 1 pour minimum en $x = 0$.
- ❖ La fonction cosinus hyperbolique est convexe. Elle intervient dans la définition de la *chaînette*, laquelle correspond à la forme que prend un câble suspendu à ses extrémités et soumis à son propre poids.
- ❖ Les fonctions hyperboliques satisfont à des relations, très ressemblantes aux identités trigonométriques.

(voir exercices !)

