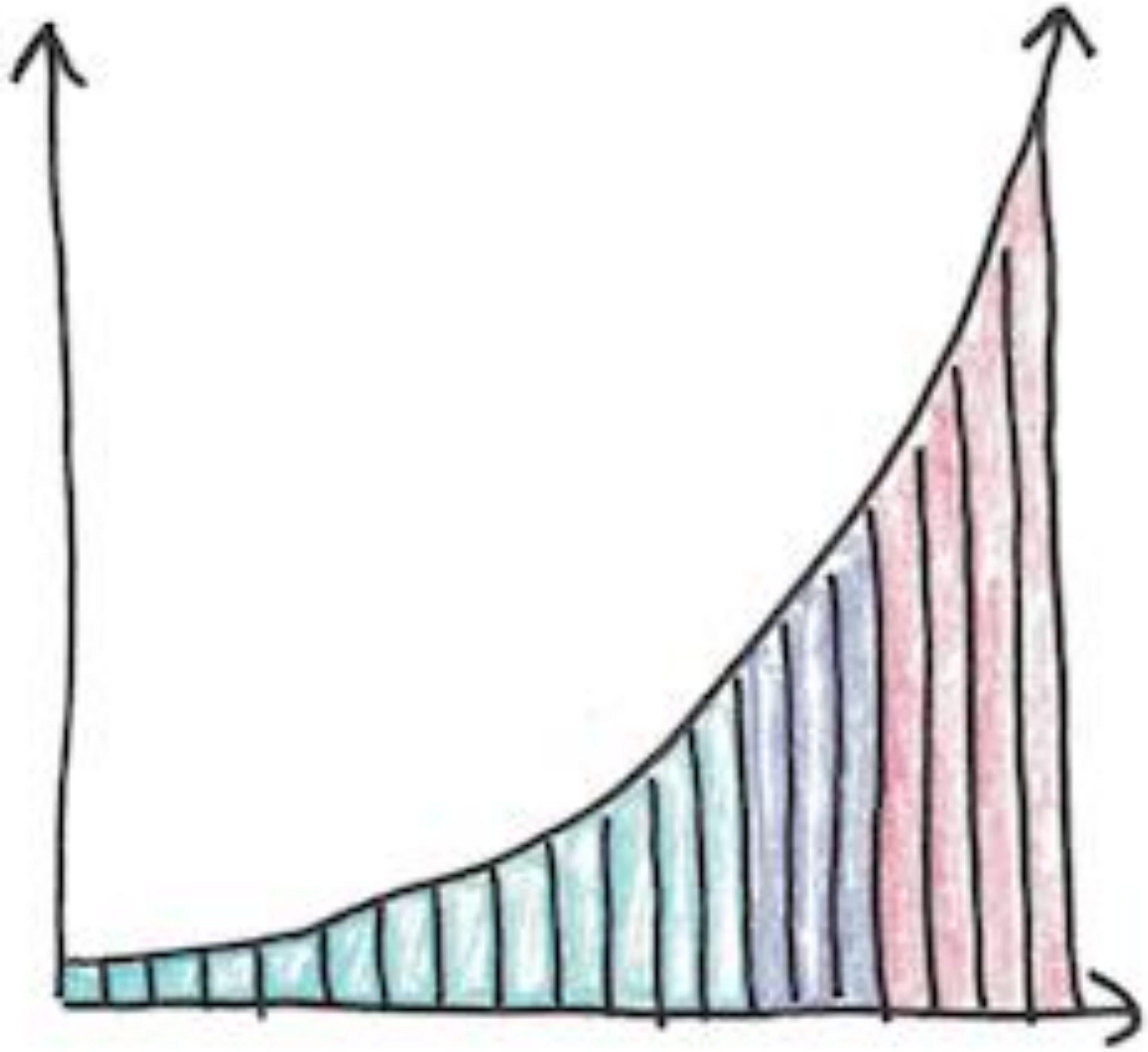


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions exponentielles

Philippe Chabloz

Triangle de Pascal

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$

$$\binom{10}{6} = \binom{9}{6} + \binom{9}{5}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{120}{117} = \frac{120!}{117!\cdot 3!}$$

$$= \frac{120\cdot 119\cdot 118}{\cancel{6}}$$

Propriété dite oralement.

Si p est premier alors

$\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \neq 0$, $k \neq p$.

Puissances à exposants naturels

Une puissance d'un nombre non-nul est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

où n est un entier strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$) et a un nombre réel non nul ($a \in \mathbb{R}^*$).

- Un argument de comptage permet d'obtenir la formule suivante :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ facteurs}} = a^{n+m}$$

qui est valable pour $n, m \in \mathbb{N}^*$.

- « *Pourquoi un nombre à la puissance zéro est égal à 1 ?* » Si l'on souhait que la formule précédente reste vraie pour $n = 0$, alors on doit avoir que

$$a^0 \cdot a^m = a^{m+0} = a^m \, .$$

Ainsi

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Exercice

Un auteur arabe, Al Sephadi, raconte que Sissa ayant inventé le jeu d'échecs fut convoqué par son maître, roi de Perse: "*Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! je t'offre ce que tu désires !*". Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva: "*Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! je t'offre ce que tu désires ! Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ? Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! Je t'offre ce que tu désires !*". Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger : *"j'accepte ton présent. Tu feras déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier.*". "*Et c'est tout ? Te moquerais-tu de moi ?*". "*Pas du tout Sire. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la 2e case, 4 sur la troisième et ainsi de suite*". Le roi s'énerva pour de bon: "*Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t'en! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus !*". Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé: "*Sire, c'est une catastrophe ! Nous ne pouvons pas livrer le blé ! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit: il n'y a pas assez de blé dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant*".

En effet :

a) Rien que sur la dernière case il faudrait ………………… grains de blé.

b) Ce qui au total donnerait le nombre faramineux de ………………………… grains.

Puissances à exposants entiers

- ***Comment définir a^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$?***

Si on utilise la propriété des puissances : la multiplication entre puissances est définie comme une somme des exposants, on obtient

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$$

d'où la formule :

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

Nous avons donc défini a^n pour tous $n \in \mathbb{Z}$.

- ***Qu'en est-il de $(a^m)^n$?***

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ facteurs} = \underbrace{(\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ facteurs}) \ldots (\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ facteurs})}_{n\ facteurs} = a^{m \cdot n}$$

Ainsi

$$\boxed{(a^m)^n = a^{n \cdot m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{R}^*}$$

Elever une puissance à une puissance

- En général

$$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$$

Par exemple : $(2^2)^3 = 64$ et $2^{(2^3)} = 256$

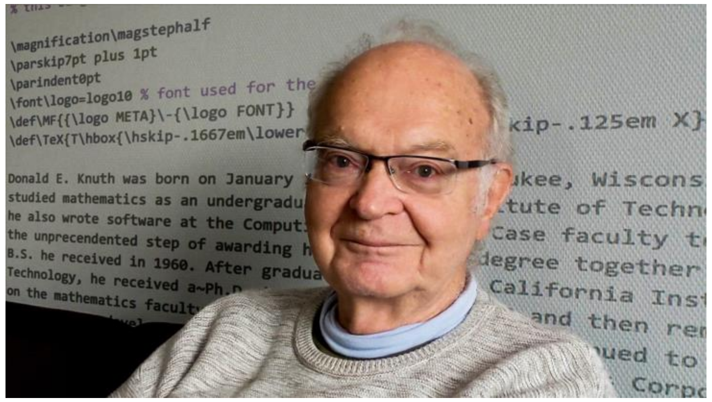
Convention :

$$\boxed{a^{b^c} \text{ signifie } a^{(b^c)}}$$

- En 1976, le mathématicien **Donal Knuth** a inventé une notation pour désigner les opérations qui sont une répétition des puissances :

$$a \uparrow b = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b \text{ facteurs}} = a^{a^{a^{\cdots}}}$$



Donal Knuth

Puissances à exposants rationnels

Que vaut $6^{\frac{12}{10}}$ *ou* $25^{\frac{1}{5}}$ *?*

$(-3)^{1/2} = \sqrt{-3}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$!!

- En utilisant les définitions précédentes, on voit que

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Donc $a^{\frac{1}{n}}$ est un nombre qui élevé à la puissance n donne a. Pour éviter les nombres complexes on impose que si n est pair alors a un réel positif. Alors :

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

$a \geqslant 0$

- De même

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

- En général, on a la formule qui définit les puissances à exposant rationnel :

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}^*$$

$a \geqslant 0$

$$6^{\frac{12}{10}} = \sqrt[10]{6^{12}}$$

$\forall r \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$

$\exists q \in \mathbb{Q}$

$$25^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{25}$$

tel que $|q-r| < \varepsilon$

$\frac{22}{7}$

$\pi = \underbrace{3,1415}$

$$3^{\pi} = ?$$

$3 \qquad \frac{31}{10} \qquad \frac{314}{100}$

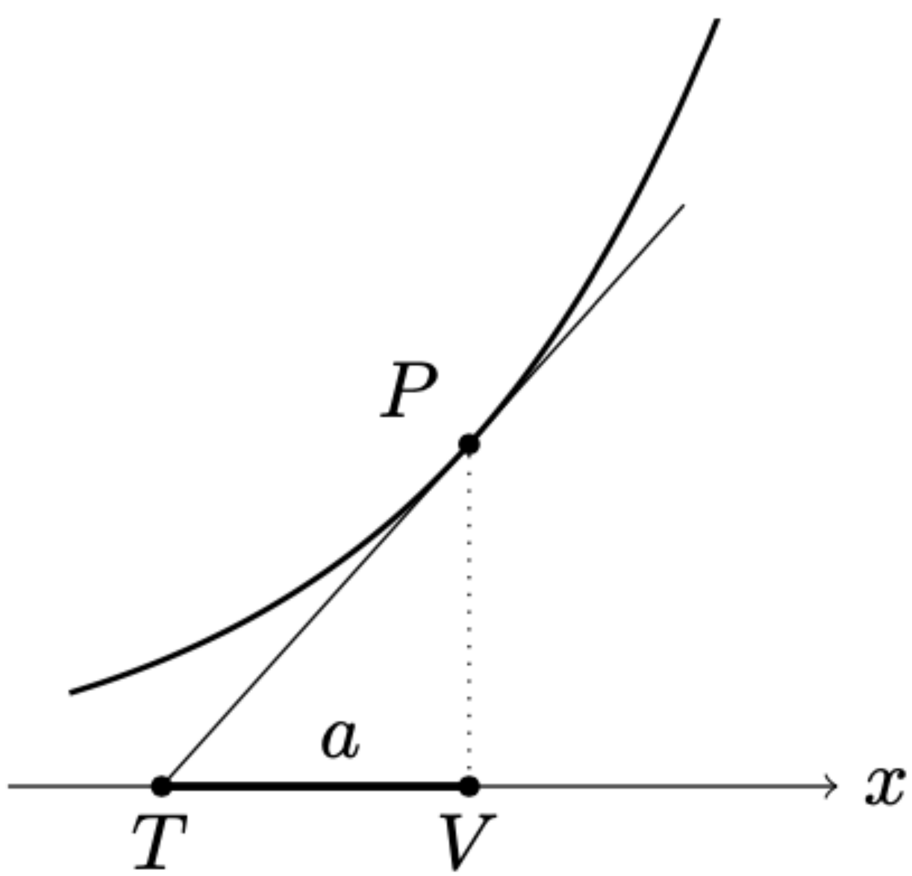
$$\sqrt[10000]{3^{31415}} = 3^{\frac{31415}{10000}}$$

bien défini

Vers l'exponentielle

Au début du XVIIe siècle, *Florimond de Beaune* pose à *Descartes* le problème suivant:

Trouver une courbe $f(x)$ telle que la distance entre V et T, les points où la verticale et la tangente par un point P de la courbe coupent l'axe des x, ait une valeur constante donnée a.



Florimond de Beaune
1601 - 1652

L'idée de Leibniz

- Soit le point $P(x, y)$ sur cette courbe. Augmentons x d'une petite quantité Δx, et considérons un point $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sur la courbe et aussi sur la droite, alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{a} \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{\Delta x}{a} y$$

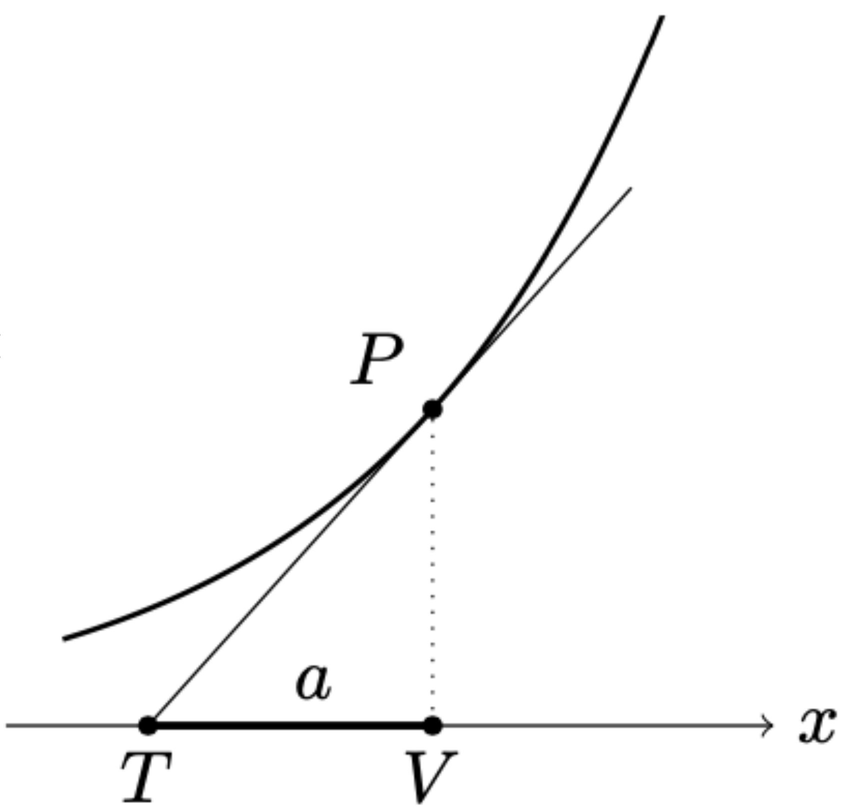
- Ainsi $P_1(x + \Delta x, (1 + \frac{\Delta x}{a})y)$.

- On continue ce processus pour obtenir une succession :

$$P_n(x + n\Delta x, (1 + \frac{\Delta x}{a})^n y)$$

- Leibniz obtient donc une suite de nombres :

$$y, (1 + \frac{\Delta x}{a})y, (1 + \frac{\Delta x}{a})^2 y, (1 + \frac{\Delta x}{a})^3 y, \ldots$$



- Euler rencontre cette suite dans des problèmes de croissance d'une population et de calcul d'intérêt composé.

Exercice (intérêt composé)

Supposons que 1000.- soient investis à un taux d'intérêt de 9% capitalisé (payé) mensuellement. Calculer le nouveau montant du capital après 5 ans, après 10 ans et après 15 ans.

$C_0 = 1000$

$r = 9\% = 0{,}09$

$C_0\left(1 + \frac{r}{12}\right)$ après 1 mois

$C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)\left(1+\frac{r}{12}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^2$

$C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12\cdot 1}$ après 12 mois = 1 an

$$\boxed{C = C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12\cdot t}}$$

$t =$ nbre année

Intérêt composé

Supposons que la somme de 1000.- soit investie à un taux d'intérêt composé de 9%. Calculer le nouveau montant du capital après **une** année si l'intérêt a été capitalisé *trimestriellement, mensuellement, par semaine, par jour, chaque heure et chaque minute.*

Si nous prenons $C_0 = 1000$, $t = 1$ et $i = 0.09$ dans la formule de l'intérêt composé, alors

$$\Rightarrow \boxed{C_n = 1000(1 + \frac{0.09}{n})^n} \qquad 1^{\infty}$$

Période d'intérêt	Valeur de n	Capital après une année
Trimestre	4	1093.08
Mois	12	1093.81
Semaine	52	1094.09
Jour	365	1094.16
Heure	8760	1094.17
Minute	525600	1094.17
annuel	1	1090.–

Nombre d'Euler

Si n tend vers l'infini la valeur de l'expression $(1+\frac{1}{n})^n$ tend vers un nombre irrationnel noté e.

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.71828$$

n	Valeur approchée de $(1+\frac{1}{n})^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10'000	2.71814593
100'000	2.71826824
1'000'000	2.71828169
10'000'000	2.71828169

Une limite de la forme

$$"1^{\infty}"$$

est indéterminée !! Cela ne fait PAS 1 mais peut faire e comme au slide précédent.

Nombre d’Euler

Euler a eu l’idée suivante : pour calculer la quantité

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

lorsque n croît indéfiniment (n tend vers $+\infty$) :

Développons à l’aide du binôme de Newton !

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Leonard Euler
1707 - 1783

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n}}_{=\underline{\underline{1}}} + \underbrace{\binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2}_{\frac{\cancel{n}(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^{\cancel{2}}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2!}$$

$$+ \underbrace{\binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3}}_{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\; n^3}} = \frac{1}{3!} \underset{=1}{\frac{n}{n}} \; \underset{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}{\frac{n-1}{n}} \cdot \underset{\xrightarrow{n\to\infty} 1}{\frac{n-2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3!}$$

En conclusion on a deux définitions de e :

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}}$$

$0! = 1$

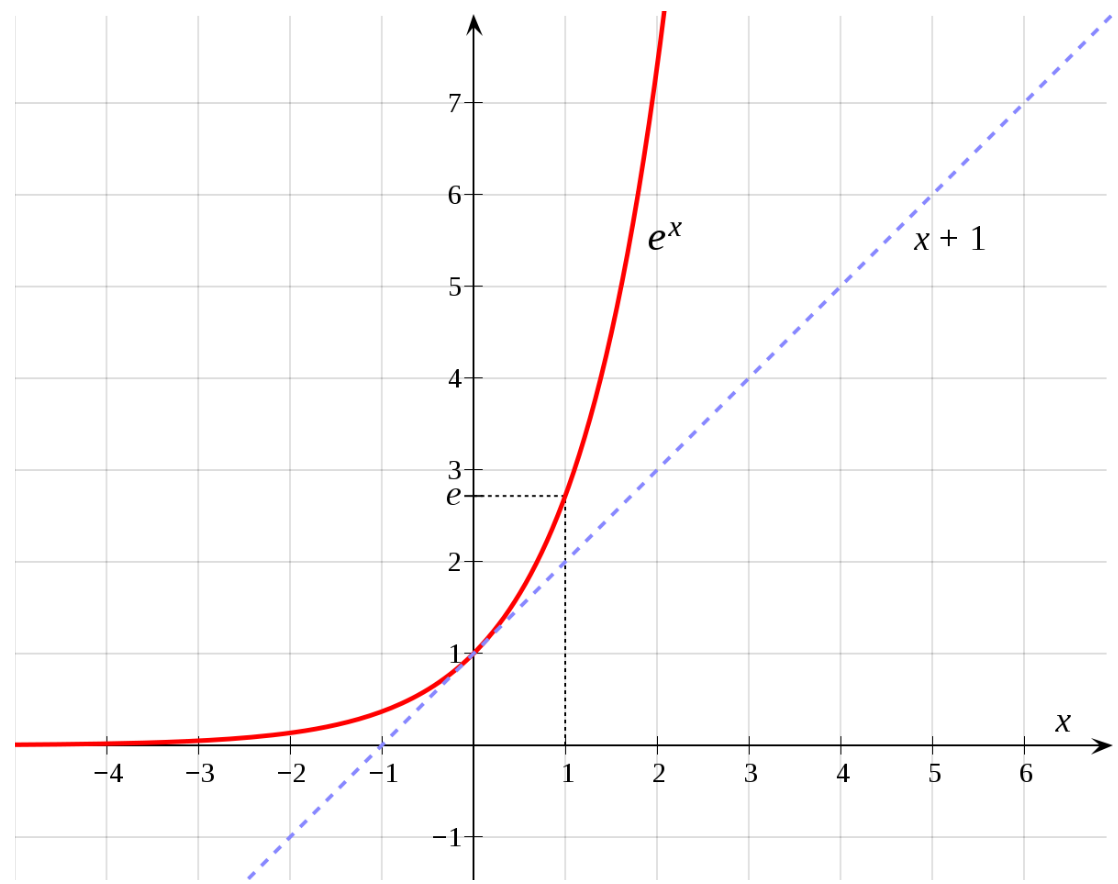
La seconde converge beaucoup plus vite vers e

n	Valeur de $(1 + \frac{1}{n})^n$	Valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$
1	2	2
2	2.25	2.5
3	2.37037037	2.66666667
4	2.44140625	2.70833333
5	2.48832	2.71666667
6	2.52162637	2.71805556
10	2.59374246	2.7182818
13	2.62060089	2.718281828

La fonction exponentielle

En utilisant la même technique que celle exposée ci-dessus, Euler a généralisé cet argument en démontrant que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$



e^{π}

$e^{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}$ est bien défini !!

Cette fonction répond à la question posée par *Florimond de Beaune* car si $P(c, e^c)$ est un point sur le graphe, alors la tangente à P à une pente égale à e^c (voir la *série d'exercice* 2).

$$e^q = ?$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad q \in \mathbb{Q}$$

$$e^q = \lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^q$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{q}{qn}\right)^{nq} \qquad nq = m$$

$$= \boxed{\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{q}{m}\right)^m = e^q}$$

$$e^2 = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \qquad \text{"} 1^\infty \text{"}$$

$$e^{-1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{"} 1^\infty \text{"}$$

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\underset{\text{formule binôme}}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*}_{+}$$
$$x \mapsto e^x$$

bijective

est une fonction derivable (et donc continue) ayant les propriétés suivantes :

1. La fonction *exp* est strictement monotone croissante avec un taux de croissance donnée par $exp(x)$ qui devient de plus en plus élevé.
2. $exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$. Pour tout $y > 0$ il existe donc exactement une valeur $x \in \mathbb{R}$ telle que $e^x = y$.
3. On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
4. On a $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. On a $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

L'exponentielle complexe

- On peut étendre l'exponentielle réelle à tous les nombre complexes en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

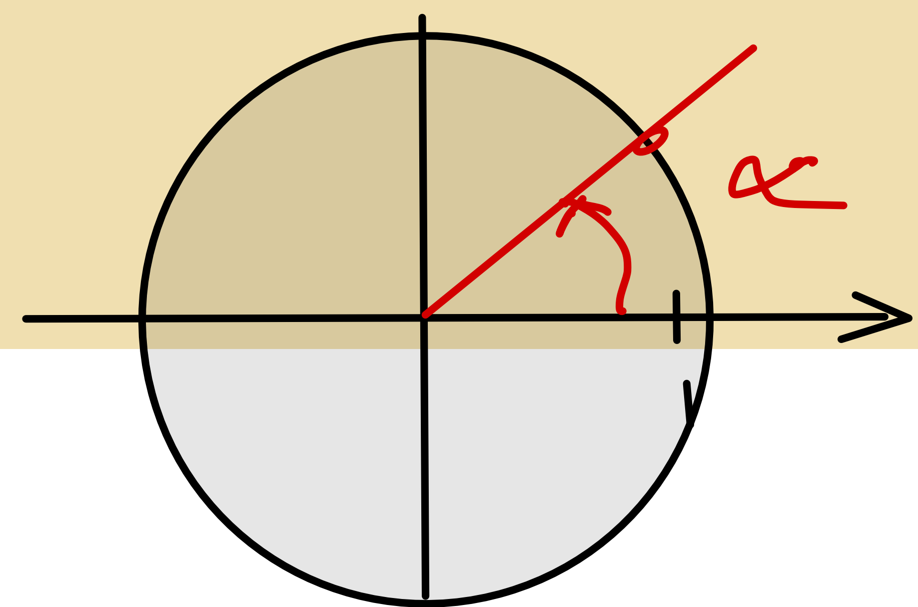
$z \in \mathbb{C}$

Cette fonction a les propriétés suivantes ($z = a + bi$)

- $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$
- $|e^z| = e^a$
- $|e^{ib}| = e^0 = 1$ l'axe imaginaire est envoyé sur le cercle trigonométrique (de rayon 1).
- $\boxed{e^{ib} = \cos b + \mathrm{i} \cdot \sin b}$

On en déduit la fameuse formule d'Euler:

$$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$$



$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

$$e^{i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$$

$$= 1 + i - \frac{1}{2} - \frac{i}{6} + \frac{1}{4!} - \dots$$

$$e^{i\pi} = \underline{\underline{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}$$

Puissances à exposants irrationnels

Que vaut 3^{π} *ou* 5^{ϕ} *?*

On sait calculer a^x $\forall a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{Q}$. Cependant, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, comment définir a^x ?

1. **Approximation**

   Nous définissons une séquence de nombres rationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$, alors

$$a^x = \lim_{n \to +\infty} a^{x_n} \qquad\qquad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

2. **Fonction exponentielle**

   Pour tout nombre réel $a > 0$ on pose

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Remarque : l'exponentiation à une puissance réelle d'un nombre réel négatif est plus difficile à définir de manière cohérente, car elle peut être *non réelle* et *avoir plusieurs valeurs*. On peut choisir une de ces valeurs, appelée valeur principale, mais il n'y a pas de choix de la valeur principale pour laquelle l'identité

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

est vraie. Par conséquent, l'exponentiation avec une base qui n'est pas un nombre réel positif est généralement considérée comme une fonction multivaluée.

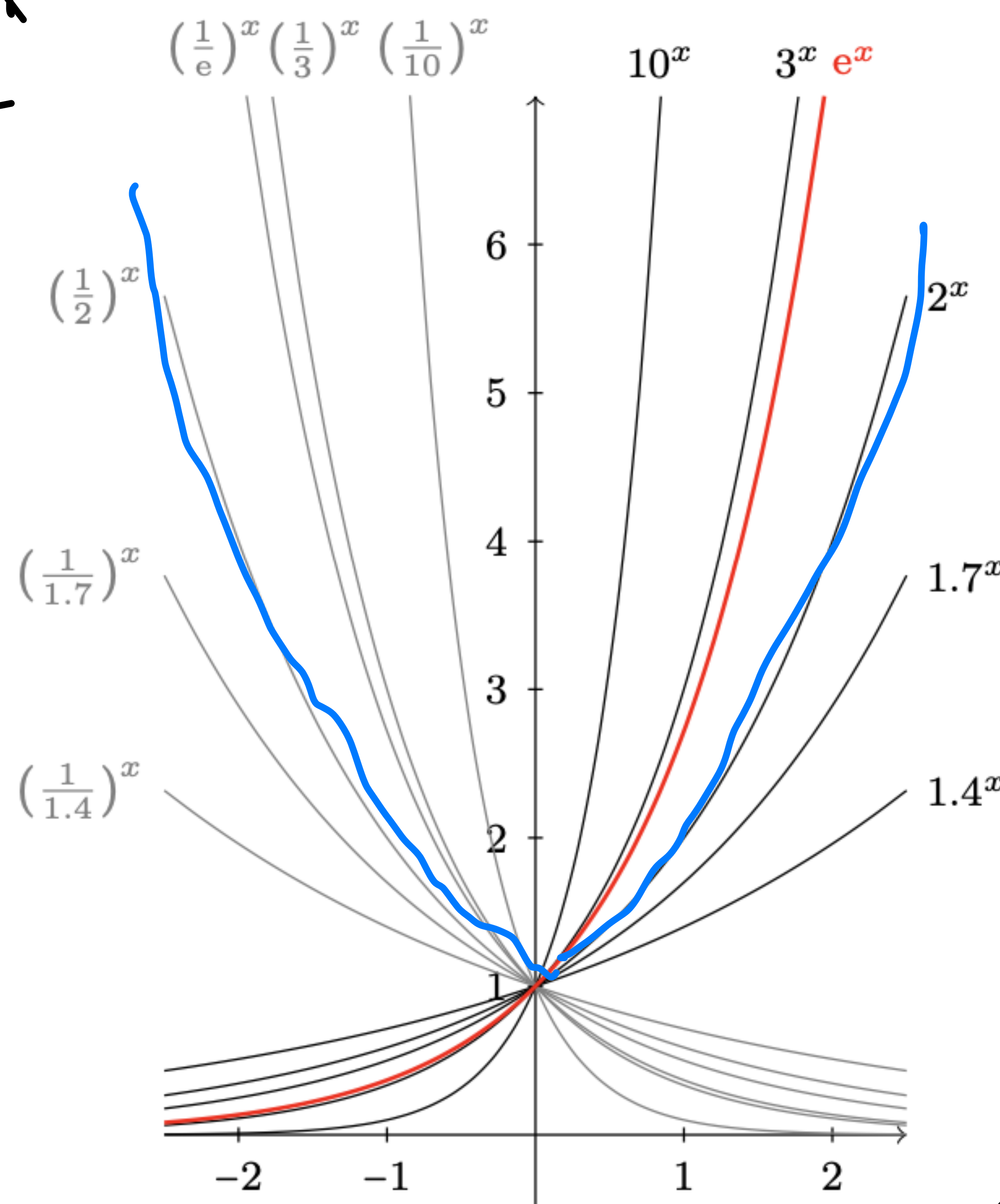
Représentation graphique des fonctions exponentielles

$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$a \neq 1$

$a > 0$

bijective



$$\boxed{\begin{array}{c} y = a^x \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{array}}$$

$a > 1$: strict. croissante

$a < 1$: strictement décroissante

Expressions indéterminées

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{"} 1^\infty \text{"}$$

$$\lim \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3 \qquad \text{"} 1^\infty \text{"}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x+5x^2}{4x+2x^3} = \frac{3}{4} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3+5x}{4+2x^2}$$

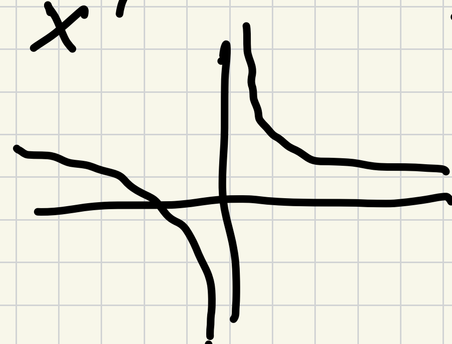
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x^3}{2x + 2x^2 + 5x^4} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{x + 3x^2}^{\to 0}}{\underbrace{2 + 2x + 5x^3}_{\to 2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x + 2x^3}{2x^3 + 4x^4} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5 + \underbrace{2x^2}_{\to\, 0}}{\underbrace{2x^2}_{\to\, 0} + \underbrace{4x^2}_{\to\, 0}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{7x^2 + 2x^4}{3x^3 + x^4} \underset{1/x^2}{=} \lim_{x \to 0} \frac{7 + 2x^2}{3x + x^2} \longrightarrow \pm\infty$$



Exercice

On plie une feuille de papier de 0.1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Après combien de plis, serait- il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse : 2 m, 20 m, 1 km, la distance Terre-Lune ?

$$E_n = 2^n \cdot 0{,}1 \text{ mm} = 380'000 \text{ km}$$

$$= 3{,}8 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$= 3{,}8 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$= 3{,}8 \cdot 10^{11} \text{ mm}$$

$\underline{n = 41 \text{ pliages}}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$