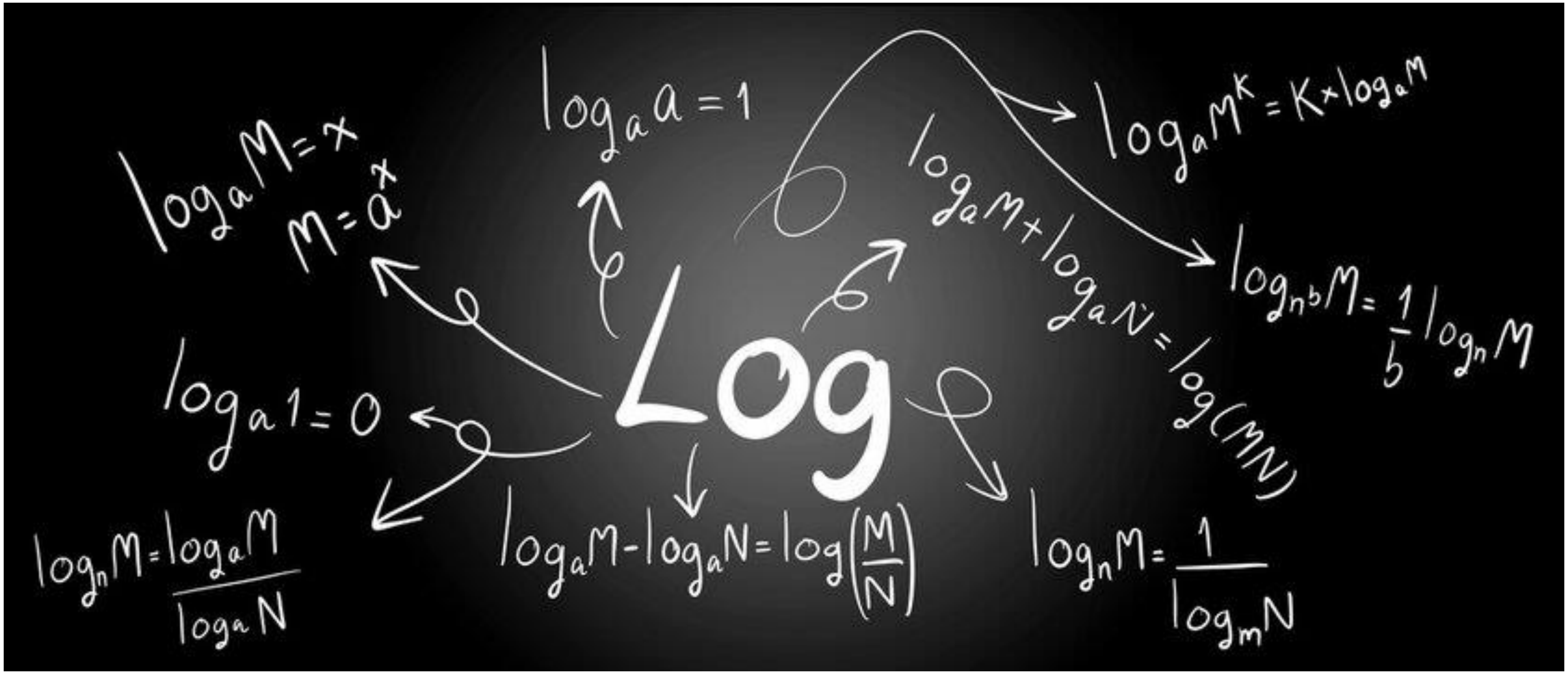
EPFL



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions logarithmes

Philippe Chabloz

Et donc, c'est quoi un logarithme ?

- *Au niveau le plus élémentaire,* le logarithme (en base 10) peut être considéré comme une fonction qui compte le nombre de zéros de son argument. Ainsi

$$\log_{10}(1) = 0$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

$$\log_{10}(100) = 2$$

$$\log_{10}(1000) = 3$$

- En généralisant pour chaque $n \in \mathbb{Z}$:

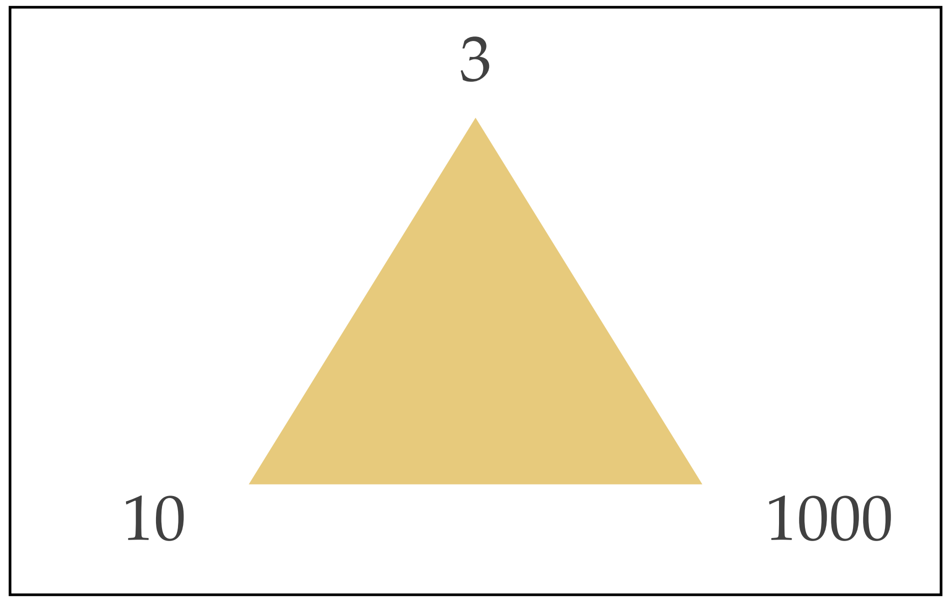
$$\log_{10}(10^n) = n$$

Donc, par exemple

$$\log_{10}(0{,}01) = -2$$

Puissances, racines et logarithmes

$10^x = f(x)$

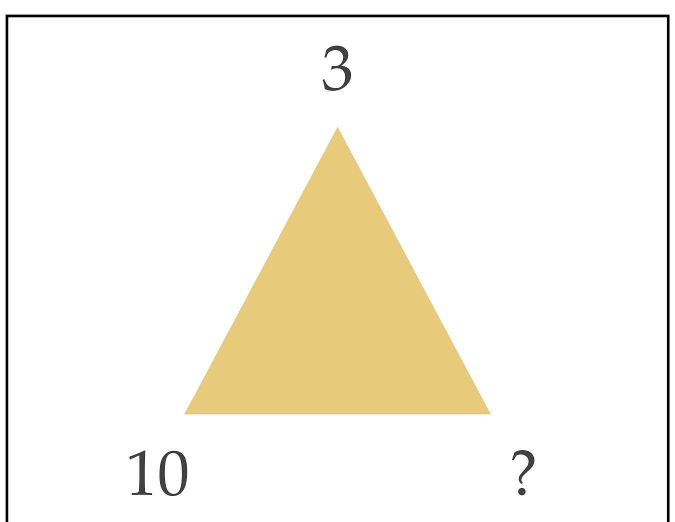


$10^3 = 1000$

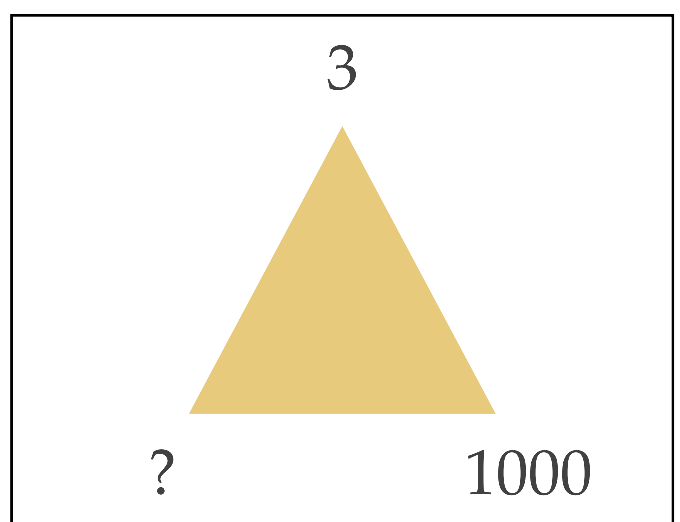
$\left(\sqrt[3]{1000} = 10\right)$

Trois notations pour une seule relation :

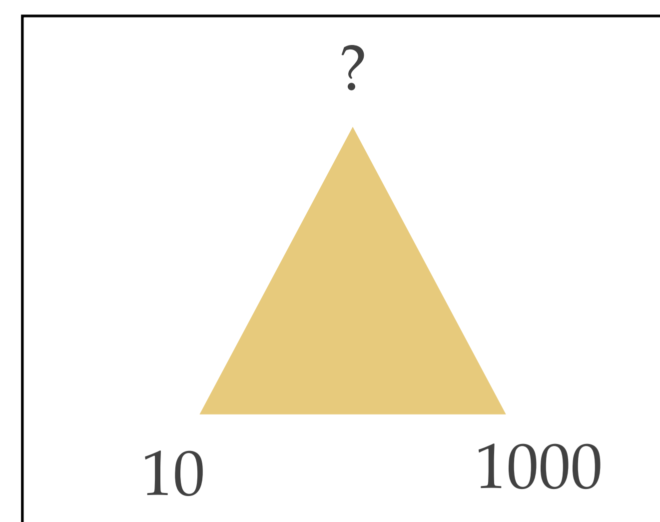
$10^3 = 1000$



$\sqrt[3]{1000} = 10$



$\log_{10}(1000) = 3$



Et donc, c'est quoi un logarithme ?

- De même un logarithme en base 2 peut être considéré comme la puissance à laquelle j'élève 2 pour obtenir le nombre dont je prends le logarithme. Ainsi

$$\log_2(1) = 0 \qquad 2^0 = 1$$

$$\log_2(2) = 1 \qquad 2^1 = 2$$

$$\log_2(4) = 2 \qquad 2^2 = 4$$

$$\log_2(8) = 3 \qquad 2^3 = 8$$

- En généralisant pour chaque $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_2(2^n) = n$$

Donc, par exemple

$$\log_2(1025) \approx 10 \qquad \text{puisque} \qquad 2^{10} = 1024$$

Un peu d'histoire

- Sémantique : ***logos*** = *rapport* et ***arithmeticos*** = *nombre*.
- Vers la fin du XVIe siècle, les développements de l'astronomie poussent les mathématiciens à chercher des méthodes de simplifications des calculs et en particulier le remplacement des multiplications par des sommes.
- En 1614, John Napier publie son traité «*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*». Il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondance entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre.
- Pierre-Simon de Laplace, mathématicien et astronome français, disait à propos des logarithmes :

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.

Pierre-Simon de Laplace
1749 - 1827

Un peu d'histoire

Nous sommes au XIXe siècle et nous souhaitons effectuer rapidement l'opération

$$232 \cdot 1412$$

…*sans effectuer la multiplication*. Nous disposons pour cela des tables de logarithmes !

1. Repérer 232 dans la table de logarithmes. Lire le log qui lui correspond. La valeur indiquée dans la table est
$$\log(232) \approx 2.3654880$$
2. Faire de même pour 1412 : on lit que
$$\log(1412) \approx 3.1498347$$
3. Additionner les deux valeurs obtenues :
$$3.1498347 + 2.3654880 = 5.5153227$$
4. Rechercher le nombre dont 5.5153227 est le logarithme en utilisant la table de logarithmes *dans l'autre sens :*
$$5.5153227 \approx \log(327584)$$
5. En déduire la valeur de la multiplication :
$$232 \times 1412 \approx 327584$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{232} \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "\cdot"] & \boxed{2.3654880} \arrow[d, "+"] \\
\boxed{1412} \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "="] & \boxed{3.1498347} \arrow[d, "="] \\
\boxed{327584} & \boxed{5.5153227} \arrow[l, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

EPFL

Conditions d'existence d'un logarithme

- Le logarithme ne *mange jamais négatif* : par exemple

$$\log_{10}(-10) \text{ n'a pas de sens !!!}$$

- En fait, le logarithme d'un nombre négatif... est un *nombre complexe*. Donc, pour l'instant, nous dirons que, par exemple :

$$\log_{10}(-10) \;\text{ n'est pas défini (dans l'ensemble } \mathbb{R}).$$

- Tous les nombres négatifs, ainsi que 0, 1 et présentent un «*problème potentiel*» en tant que base d'une fonction puissance. **Pour cette raison, nous n'autorisons que les nombres strictement positifs autres que 1 comme base du logarithme**. Donc, par exemple,

$$\log_{-10}(10) \;\text{ n'est pas défini (dans l'ensemble } \mathbb{R}).$$

Pour écrire en toute sécurité $\underline{\log_b(a)}$ il faut que :

$$b > 0 \text{ et } b \neq 1$$
$$\underline{a > 0}$$

$\log_b(x) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$b \neq 1$

$b > 0$

$\log_2(32) = 5 \iff 2^5 = 32$

Définition de $\log_b(a)$

Soit $a > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$, alors le **logarithme en base b de a** est défini par

$$\underline{\underline{\log_b(a) = p}} \qquad \text{si et seulement si} \qquad \underline{\underline{b^p = a}}$$

C'est la fct inverse de la fct $y \longmapsto b^x$

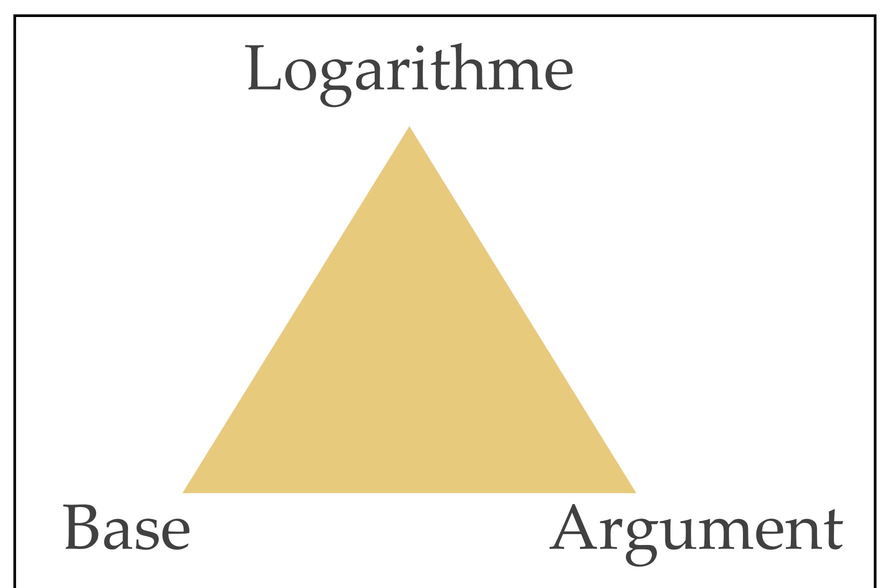
- Le nombre p, donc le logarithme, correspond à l'exposant.
- Nous dirons que :

Le logarithme est l'exposant auquel doit être élevée la base pour obtenir l'argument.

Logarithme = p

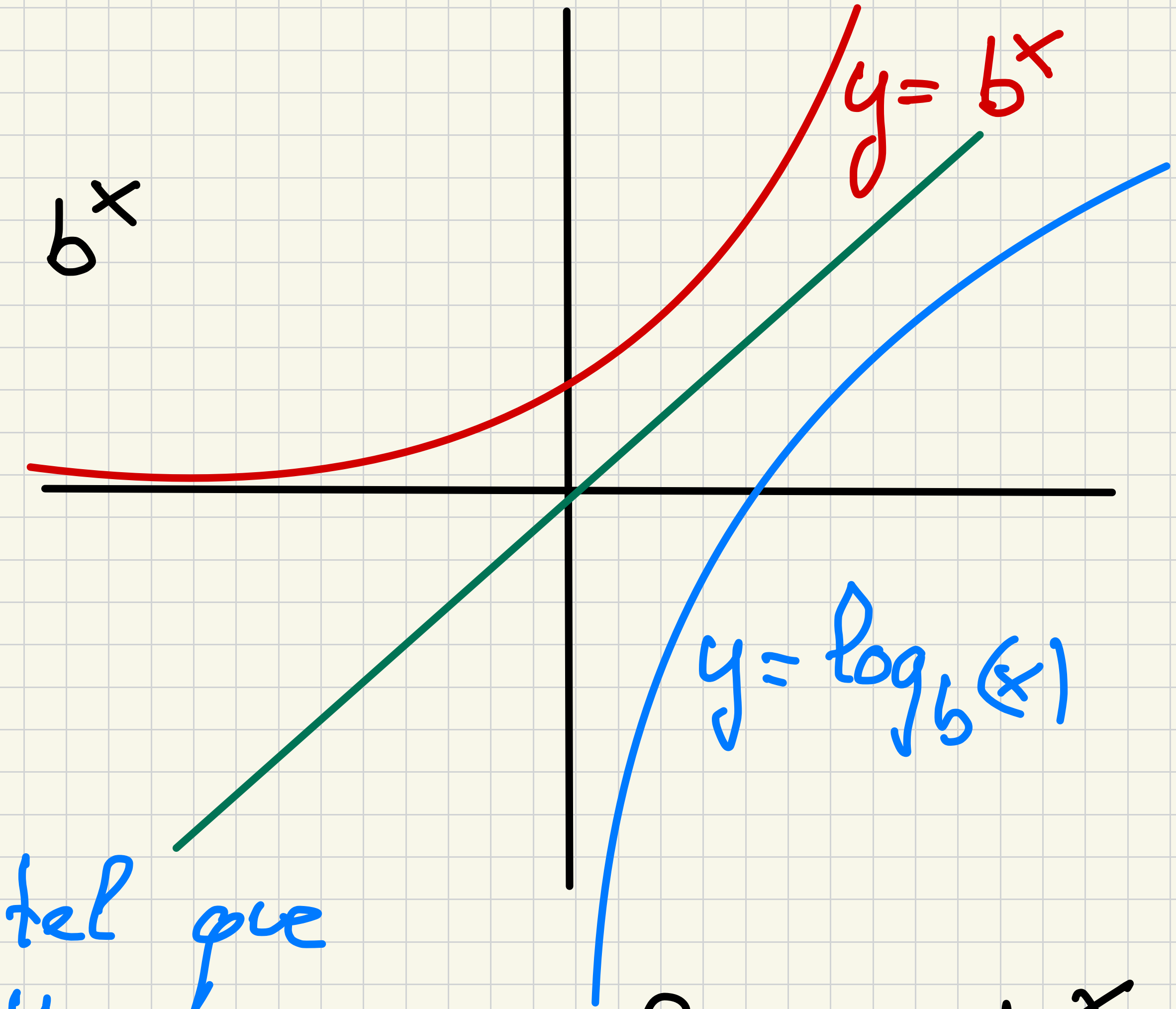
Base = b

Argument = a



$$b^{(\,)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto y = b^x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b > 0 \\ b \neq 1 \end{array}}$$



$$\log_b : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y \quad \text{tel que} \quad b^y = x$$

$f(x) = b^x$

$g(x) = \log_b(x$

- $\boxed{\log_b(b) = 1}$
- $b^0 = 1 \Rightarrow \boxed{\log_b(1) = 0}$
- $\underline{b^{x+y}} = \underbrace{b^x \cdot b^y} \Rightarrow \boxed{\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)}$
- $b^{x-y} = b^x \cdot b^{-y} = \dfrac{b^x}{b^y} \Rightarrow \boxed{\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)}$

$\bullet \quad \log_b(x^y) = z \iff b^z = x^y$

définition du $\log_b$

$x = b^{\log_b(x)}$

$$= \left(b^{\log_b(x)}\right)^y$$

$$= b^{y \log_b(x)}$$

$$\Rightarrow z = y \log_b(x)$$

$$\boxed{\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$e^{\ln(x)} = x \quad x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\ln(e^x) = x$

Base d'un logarithme

Observation : l'exponentielle échange somme contre produit. Indiquons par $\exp(x) = e^x$, alors

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Tandis que le logarithme échange produits contre somme :

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b).$$

Définition : Soit $l\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction logarithme, un nombre $b > 0$ est appelé base de la fonction logarithme si

$$l(b) = 1$$

On dira que l est le logarithme en base b, et on utilisera la notation :

$$l(x) = \log_b(x)$$

Bases particulières :

1. *Ingénierie* : $b = 10$ (logarithme décimal)
2. *Informatique* : $b = 2$ (logarithme binaire)
3. *Mathématique* : $b = e$ (logarithme népérien ou naturel)

Si $b = e$ nous utilisons la notation suivante : $\boxed{\ln(x) = \log_e(x)}$

5 propriétés du logarithme

	Version logarithme	Version exponentielle	
Produit	$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$	$x, y > 0$
Quotient	$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$x, y > 0$
Puissance	$\log_b(x^y) = y\log_b(x)$	$(b^x)^y = b^{yx}$	$x > 0$
Changement de base	$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$		
	$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$	$x = a$	

Changement de base

$$\overbrace{\log_b(x)}^{y} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

$$y = \log_b(x) \Leftrightarrow b^y = x$$

<u>Dém.</u>

$$x = b^y \quad \Big| \ \log_a$$

$$\log_a(x) = \log_a(b^y) = y \cdot \log_a(b)$$

$$y = \boxed{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \log_b(x)}$$

$$\boxed{\log_a(b) \cdot \log_b(x) = \log_a(x)}$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

$a = e$

$b = 10$

$$\log_{10}(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(10)}$$

$$= \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \approx 2{,}3$$

$$\boxed{\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}}$$

$\ln(2) \approx 0{,}7$

Logarithme naturel

La fonction ln(x) est la fonction réciproque de la fonction exp(x).

Donc on a pour tout y>0

$$e^{\ln(y)} = y$$

et pour tout x réel:

$$\ln(e^x) = x$$

Pour tout $a > 0$, a $\neq 1$ on a

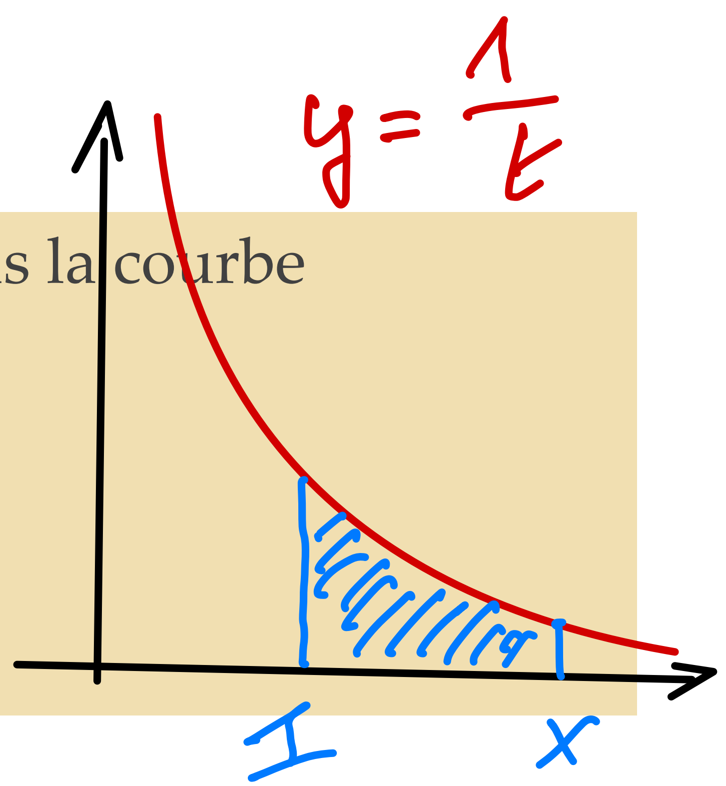
$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\,\ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln(a))^n}{n\,!}$$

Remarque: on peut aussi définit la fonction ln(x) comme l'aire sous la courbe

$$y = \frac{1}{t}$$

entre 1 et x:

$$\boldsymbol{\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt}$$



Identités algébriques

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x} - 1$$

$$= x^3 - 1$$

$$(x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = x^{n+1} - 1$$

Série géométrique

A partir de l'identité

$$(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1) = x^{n+1} - 1$$

On en déduit que si $x \neq 1$

$$(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$x^{n+1} \to 0$ $\quad n \to +\infty$

En faisant tendre n vers l'infini et en supposant que $\boxed{|x| < 1,}$ alors x^{n+1} tend vers 0 et on obtient que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

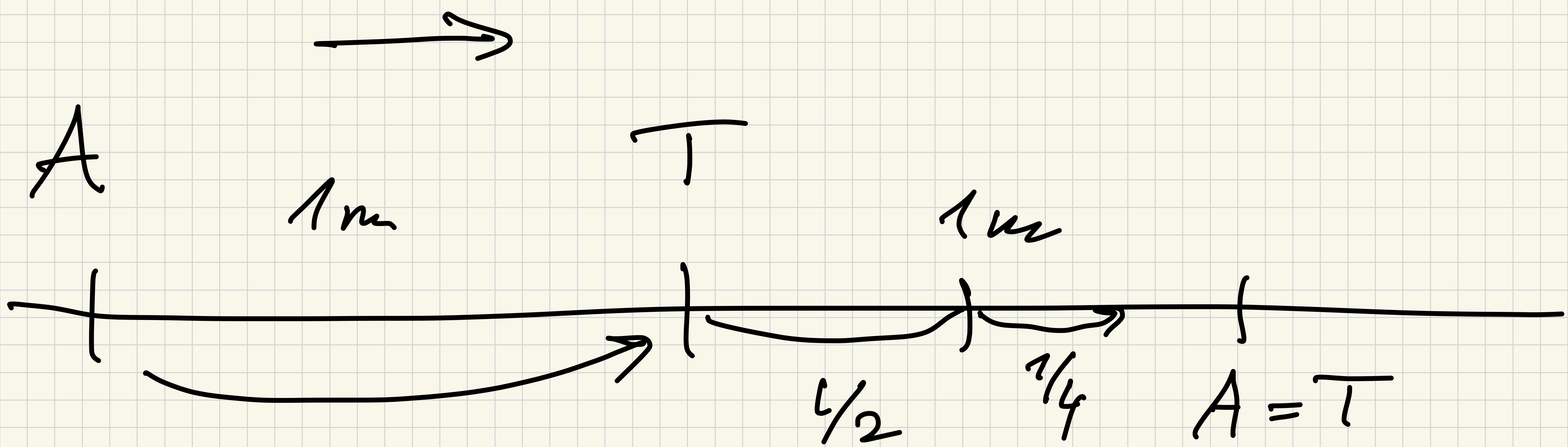
Série géométrique de raison x

Exemple (paradoxe de Zénon) :

$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - {}^{1}/_{2}} = 2.$$

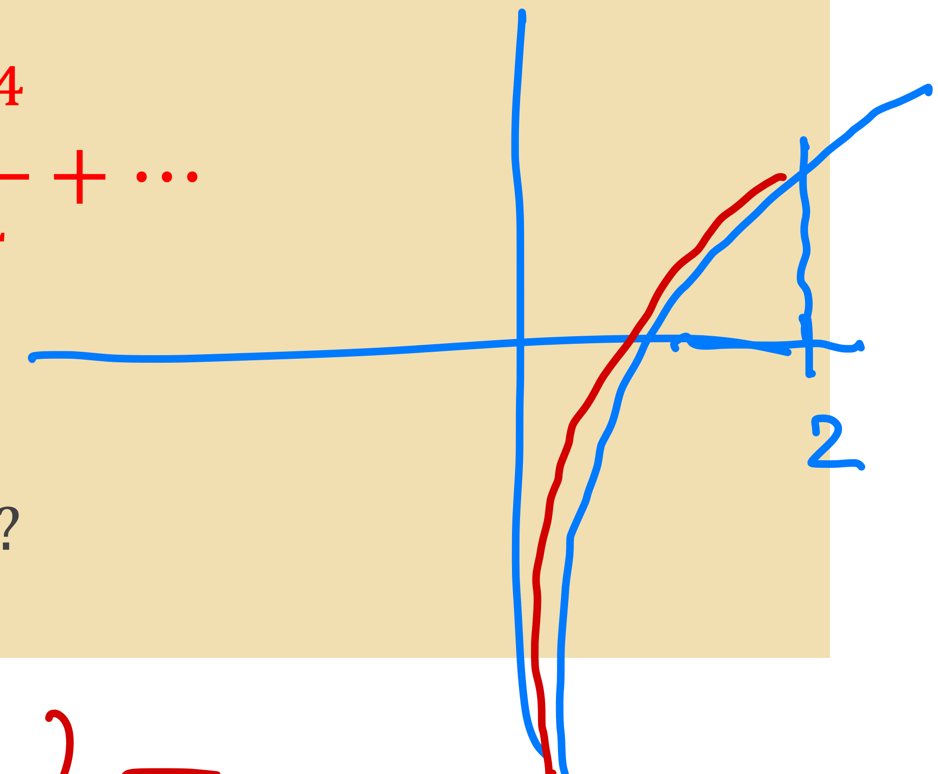
Paradoxe d'Achille et de la tortue



Série du logarithme naturel

Comme pour l'exponentielle, on peut calculer le logarithme naturel à l'aide d'une série, c'est-à-dire d'une somme infinie de terme.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$



Mais ici, la série ne converge que pour $x \in]-1; 1]$

Comment fait une machine à calculer pour calculer ln(1.5)?
Et ln(10) ?

$$x = 1 \Rightarrow \ln(1+1) =$$

$$= \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

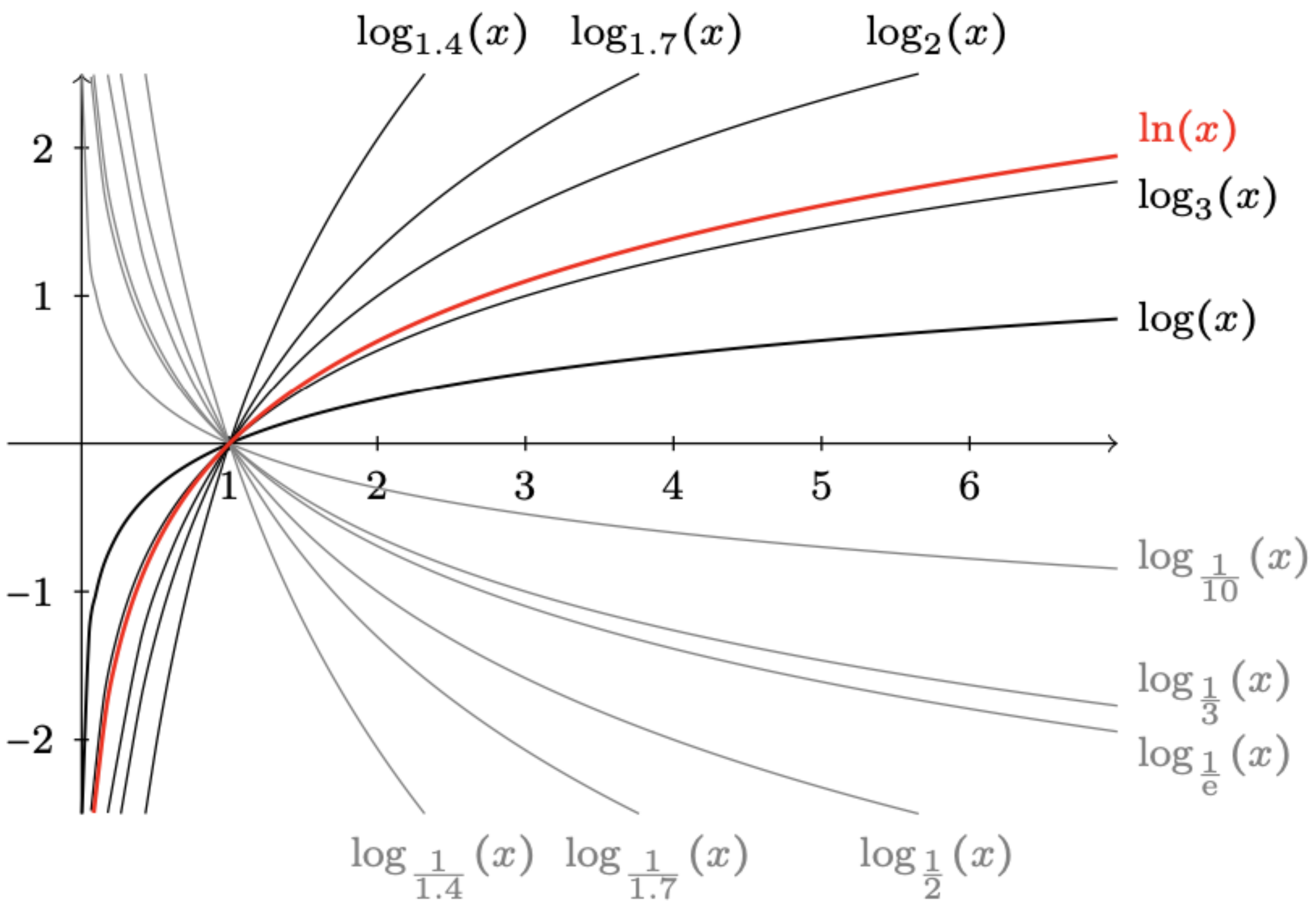
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

$$x \in]-1;1]$$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} -$$

Converge lentement

Représentation graphique des fonctions logarithmiques



$$y = \log_{1/b}(x) \underset{\text{déf du } \log_{1/b}}{\iff} \left(\frac{1}{b}\right)^{y} = x$$

$$\iff \frac{1}{b^{y}} = x \iff b^{-y} = x$$

$$\iff -y = \log_b(x)$$

déf. de $\log_b$

$$\iff y = -\log_b(x)$$

$$\boxed{\log_{1/b}(x) = -\log_b(x)}$$