# Exercices — Série 9

**Les 3 premiers exercices sont une reprise des 3 derniers exercices de la série 8 avec en plus le calcul du cercle osculateur. Vous pouvez reprendre les résultats déjà obtenus sans refaire les calculs. Les nouveautés sont en gras.**

**Exercice 1.** [Vecteur tangent et courbure]

On considère la cycloïde $c(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

(a) Calculer le vecteur tangent $c'(t)$ en tout point de la cycloïde. Que vaut-il pour $t = 2n\pi$ avec $n$ entier ?

(b) Calculer la courbure $\kappa(t)$. Que vaut la courbure en $t = 0$ ?

(c) Pour $t = \pi$ calculer le point $P$ de la courbe correspondant, le vecteur tangent et la courbure en $P$. **Puis calculer les coordonnées du centre du cercle osculateur à la courbe en $P$ et donner son équation cartésienne implicite**

**Exercice 2.** [Vecteur tangent et courbure]

On considère la courbe $\gamma$ donnée par son équation cartésienne explicite

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

(a) Calculer le vecteur tangent $c'(x)$ en tout point de cette courbe (en prenant $x$ comme paramètre).

(b) Calculer la courbure $\kappa(x)$. Que vaut-elle en $x = 0$ ?

(c) Quand est-ce que $\kappa(x)$ est minimale ? maximale ?

(d) Que fait la courbure lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ ? Est-ce raisonnable ?

(e) Pour le point $P(1, \frac{1}{3})$ calculer le vecteur tangent en $P$, la courbure en $P$ **ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur en $P$.**

(f) **Donner l'équation cartésienne du cercle osculateur à $\gamma$ en $P$.**

**Exercice 3.** [Courbure d'une forme cartésienne implicite]

On considère la courbe $\gamma$ donnée sous forme cartzésienne implicite:

$$(\gamma)\ :\ xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 - 3y = \frac{11}{3}$$

et le point $P(2, 1)$ sur la courbe.

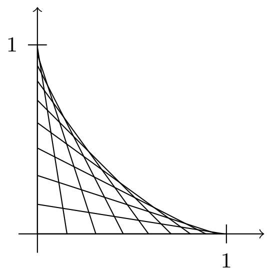
(a) En dérivant implicitement par rapport à $x$ déterminer la pente $y'$ de la tangente à $\gamma$ au point $P$. En déduire un vecteur tangent en ce point.

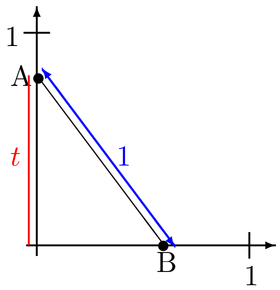
(b) En dérivant une seconde fois l'équation obtenue sous (a), trouver $y''$ au point $P$. En déduire la courbure de $\gamma$ en ce point.

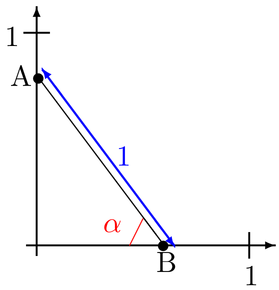
(c) **Trouver les coordonnées du centre du cercle osculateur à la courbe $\gamma$ au point $P$**

**Exercice 4.**

Nous voulons déterminer l'enveloppe de la famille de segments représentant "une échelle de longueur 1 qui glisse le long d'un mur":




**paramétrisation 1 : avec $t$**

(a) En considerant la famille de courbes indexée par le paramètre $t$ (comme indiqué sur la figure), les coordonnées des points A et B sont:

- ☐ $A = (t, 0)$ et $B = (0, \sqrt{1-t^2})$
- ☐ $A = (0, t)$ et $B = (\sqrt{1-t^2}, 0)$
- ☐ $A = (0, t)$ et $B = (t, 0)$
- ☐ $A = (0, t)$ et $B = (\sqrt{t^2-1}, 0)$

(b) Donc, l'expression du chaque droite appartenant à cette famille de courbes est donnée par:

- ☐ $y_t(x) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + t$
- ☐ $y_t(x) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$
- ☐ $y_t(x) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + 2t$
- ☐ $y_t(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}x + t$

(c) Pour trouver la valeur du paramètre $t$ qui donne la valeur maximale (localement) de la fonction $y_t(x)$ puis en déduire une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée, on calcule $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x)$ qui vaut:

- ☐ $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = -\frac{t^2 x}{2\sqrt{1-t^2}} + 1$
- ☐ $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = \frac{x}{2\sqrt{1-t^2}} + 1$
- ☐ $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1-t^2)^3}} + 1$
- ☐ $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$

(d) La condition $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = 0$ donne:

- ☐ $x(t) = -\sqrt{(1-t^2)^3}$
- ☐ $x(t) = \sqrt{(1-t^2)^3}$
- ☐ $x(t) = 2\frac{\sqrt{(1-t^2)}}{t^2}$
- ☐ $x(t) = 2\sqrt{(1-t^2)}$

(e) Pour $0 \leq t \leq 1$ une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée est donnée par:

- ☐ $x(t) = 2\sqrt{(1-t^2)}$ et $y(t) = t$
- ☐ $x(t) = (1-t^2)^{3/2}$ et $y(t) = -t^3 + t$
- ☐ $x(t) = (1-t^2)^{3/2}$ et $y(t) = t^3$
- ☐ $x(t) = -(1-t^2)^{3/2}$ et $y(t) = 2t - t^3$

**paramétrisation 2 : avec $\alpha$**

(f) En considérant la famille de courbes indexée par le paramètre $\alpha$ (comme indiqué sur la figure), les coordonnées des points A et B sont:

- ☐ $A = \left(0, \frac{\sin(\alpha)}{2}\right)$ et $B = \left(\frac{\cos(\alpha)}{2}, 0\right)$
- ☐ $A = (0, \cos(\alpha))$ et $B = (\sin(\alpha), 0)$
- ☐ $A = (0, \tan(\alpha))$ et $B = (\cot(\alpha), 0)$
- ☐ $A = (0, \sin(\alpha))$ et $B = (\cos(\alpha), 0)$

(g) Donc, l'expression du chaque droite appartenant à cette famille de courbes est donnée par:

- ☐ $y_\alpha(x) = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x + \sin(\alpha)$
- ☐ $y_\alpha(x) = \cot(\alpha)x + \sin(\alpha)$
- ☐ $y_\alpha(x) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}x + \cos(\alpha)$
- ☐ $y_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x + \sin(\alpha)$

(h) Pour trouver la valeur du paramètre $\alpha$ qui donne la valeur maximale (localement) de la fonction $y_\alpha(x)$ on calcule $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x)$ qui vaut:

- ☐ $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = -\frac{\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}x - \cos(\alpha)$
- ☐ $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = -\frac{x}{\cos^2(\alpha)} - \cos(\alpha)$
- ☐ $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = -\frac{x}{\cos^2(\alpha)} + \cos(\alpha)$
- ☐ $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = \frac{x}{\cos^2(\alpha)} + \sin(\alpha)$

(i) La condition $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = 0$ donne:

- ☐ $x(\alpha) = \cos^3(\alpha)$
- ☐ $x(\alpha) = \cos(\alpha)$
- ☐ $x(\alpha) = -\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$
- ☐ $x(\alpha) = -\frac{\cos^3(\alpha)}{\cos(2\alpha)}$

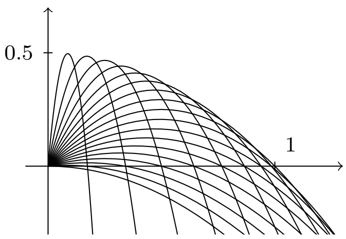
(j) Pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée est donnée par:

- ☐ $x(\alpha) = -\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$ et $y(\alpha) = -\sin^2(\alpha)\tan(\alpha)$
- ☐ $x(\alpha) = -\cos^3(\alpha)$ et $y(\alpha) = 2\cos^3(\alpha)\sin(\alpha)$
- ☐ $x(\alpha) = \cos^3(\alpha)$ et $y(\alpha) = \sin^3(\alpha)$

☐ $x(\alpha) = \cos(\alpha)$ et $y(\alpha) = -\sin(\alpha) + 1$

**Exercice 5.**

Nous voulons trouver l'enveloppe de la "*famille balistique*" de paraboles représentant la trajectoire d'un boulet tiré (à la vitesse de 1 [unité /seconde]) d'un canon dont la pente est $p$, où $p \in ]0, \pi/2[$:




$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad y(t) = \frac{pt}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{t^2}{2}.$$

(a) Pour simplifier le problème nous exprimons $y$ comme une fonction de $x$ en éliminant le paramètre $t$. Dans ce cas, on obtient que la famille de courbes est donnée par:

☐ $y_p(x) = px - \frac{1}{2}x(1+p^2)$ ☐ $y_p(x) = \frac{px}{1+p^2} - \frac{1}{2}x^2(1+p^2)$

☐ $y_p(x) = px - \frac{1}{2}x^2(1+p^2)$ ☐ $y_p(x) = px - \frac{1}{2(1+p^2)}x^2$

(b) Pour trouver la valeur du paramètre $p$ qui donne le $y$ maximal (localement) on calcule $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x)$ qui vaut:

☐ $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x + \frac{x^2}{2}\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$ ☐ $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x - px$

☐ $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x + px^2$ ☐ $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x - px^2$

(c) La condition $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = 0$ selon laquelle on obtient un maximum est:

☐ $x = 0$ ☐ $x = \frac{1}{p}$

☐ $x = -\frac{1}{p}$ ☐ $x = -\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$

(d) Pour $p \in ]0, \pi/2[$, une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée est donnée par:

☐ $x(p) = \frac{1}{p}$ et $y(p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2}$ ☐ $x(p) = \frac{1}{p}$ et $y(p) = 1 - \frac{1}{2p} - \frac{p}{2}$

☐ $x(p) = -\frac{1}{p}$ et $y(p) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2}$ ☐ $x(p) = 0$ et $y(p) = 0$

(e) Nous pouvons exprimer l'enveloppe cherchée avec $y$ comme une fonction de $x$ en éliminant le paramètre $p$. Dans ce cas, on obtient:

☐ $y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$ ☐ $y(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$

☐ $y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$ ☐ $y(x) = 0$

**Exercice 6.**

Une representation paramétrique de l'ellipse de demi-axes $a, b \in \mathbb{R}^+$ est donnée par les équations :

$$x(t) = a\cos(t), \qquad y(t) = b\sin(t).$$

(a) Les 1ère et 2ème dérivées $x'(t), x''(t), y'(t)$ et $y''(t)$ valent:

- ☐ $x'(t) = a\sin(t)$, $x''(t) = a\cos(t)$, $y'(t) = -b\cos(t)$, $y''(t) = -b\sin(t)$
- ☐ $x'(t) = -a\sin(t)$, $x''(t) = -a\cos(t)$, $y'(t) = b\cos(t)$, $y''(t) = b\sin(t)$
- ☐ $x'(t) = -a\sin(t)$, $x''(t) = -a\cos(t)$, $y'(t) = b\cos(t)$, $y''(t) = -b\sin(t)$
- ☐ $x'(t) = -a\sin(t)$, $x''(t) = a\cos(t)$, $y'(t) = -b\cos(t)$, $y''(t) = b\sin(t)$

(b) Donc une équation paramétrique de sa développée (qui est une *astroïde écrasée*) est donnée par les équations:

- ☐ $x(t) = \frac{(b^2-a^2)}{a}\cos^3(t)$ et $y(t) = \frac{(a^2-b^2)}{b}\sin^3(t)$
- ☐ $x(t) = \frac{(a^2-b^2)}{a}\cos^3(t)$ et $y(t) = \frac{(b^2-a^2)}{b}\sin^3(t)$
- ☐ $x(t) = a\cos(t) + \frac{\cos(t)\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)}{a}$ et $y(t) = b\sin(t) + \frac{\sin(t)\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)}{b}$
- ☐ $x(t) = a\cos(t) - \frac{b\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)}{(a^2+b^2)\sin(t)}$ et $y(t) = b\sin(t) - \frac{a\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)}{(a^2+b^2)\cos(t)}$

**Exercice 7.**

On considère la chaînette $f(x) = \cosh(x)$ et un point $A = (a, f(a))$, où $a \in \mathbb{R}$, sur celle-ci.

(a) La courbure $\kappa$ de la chaînette en $A$ est donnée par:

- ☐ $\kappa = \frac{1}{\cosh(a)}$
- ☒ $\kappa = \frac{1}{\cosh^2(a)}$
- ☐ $\kappa = \frac{(1+\sinh^2(a))^{3/2}}{|\cosh(a)|}$
- ☐ $\kappa = \frac{\cosh(a)}{(1-\sinh^2(a))^{3/2}}$

(b) Le rayon $r$ du cercle osculateur en $A$ est donné par:

- ☒ $r = \cosh^2(a)$
- ☐ $r = \frac{(1-\sinh^2(a))^{3/2}}{\cosh(a)}$
- ☐ $r = \frac{|\cosh(a)|}{(1+\sinh^2(a))^{3/2}}$
- ☐ $r = \cosh(a)$

(c) Le centre $C$ du cercle osculateur en $A$ a pour coordonnées:

- ☐ $x_0 = a - \frac{\sinh(a)(1-\sinh^2(a))}{\cosh(a)}$ et $y_0 = \cosh(a) + \frac{1-\sinh^2(a)}{\cosh(a)}$
- ☐ $x_0 = a + \sinh(a)\cosh(a)$ et $y_0 = 2\cosh(a)$
- ☐ $x_0 = a - \sinh(a)\cosh(a)$ et $y_0 = \cosh(a) + \frac{1-\sinh^2(a)}{\cosh(a)}$
- ☒ $x_0 = a - \sinh(a)\cosh(a)$ et $y_0 = 2\cosh(a)$

(d) L'équation de la droite $\gamma$ perpendiculaire à la droite tangente en $A$ est donnée par:

☐ $y(x) = \frac{1}{\sinh(a)}x - \frac{a}{\sinh(a)} - \cosh(a)$ ☐ $y(x) = \sinh(a)x + a\sinh(a) + \cosh(a)$

☐ $y(x) = -\frac{1}{\sinh(a)}x + \frac{a}{\sinh(a)} + \cosh(a)$ ☐ $y(x) = \sinh(a)x - a\sinh(a) - \cosh(a)$

(e) Le point $I$ d'intersection de la droite perpendiculaire $\gamma$ calculée en (d) avec l'axe $Ox$ a cordonnées données par :

☐ $I\big(\sinh(a)\cosh(a) + a, 0\big)$ ☐ $I\big(a + \coth(a), 0\big)$

☐ $I\big(\sinh(a)\cosh(a) + a\sinh(a), 0\big)$ ☐ $I\big(\sinh(a)\cosh(a) - a, 0\big)$

(f) Est-ce que $\overline{CA} = \overline{AI}$?

☐ oui ☐ non

**Exercice 8.**

On considère le branche supérieure de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$. Nous pouvons considérer son équation implicite, donnée par:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

(a) Le courbure $\kappa$ de la courbe en $A(a, f(a))$ est donnée par:

☐ $\kappa = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}a^2\right)^{3/2}}$ ☒ $\kappa = \frac{1}{\left(1+2a^2\right)^{3/2}}$

☐ $\kappa = \left(1 - 2a^2\right)^{-3/2}$ ☐ $\kappa = \frac{\left(2+a^2\right)^{-3/2}}{2}$

(b) Le rayon de courbure en $A$ est donné par:

☒ $r = \left(1 + 2a^2\right)^{3/2}$ ☐ $r = 2\left(2 + a^2\right)^{3/2}$

☐ $r = \left(1 + \frac{3}{2}a^2\right)^{3/2}$ ☐ $r = \left(1 - 2a^2\right)^{3/2}$

(c) Le centre $C$ du cercle osculateur en un point $A = (a, f(a))$ a pour coordonnées:

☐ $x_0 = 2a + 2a^3$ et $y_0 = 2a^2\sqrt{(1 + a^2)}$

☐ $x_0 = \frac{1}{2} + a + \frac{a^2}{2}$ et $y_0 = \sqrt{(1 + a^2)}\left(6 + 4x^2\right)$

☒ $x_0 = -2a^3$ et $y_0 = 2\sqrt{(1 + a^2)^3}$

☐ $x_0 = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{4}$ et $y_0 = \sqrt{1 + a^2}\left(\frac{5}{4} + \frac{a^2}{2}\right)$

(d) L'équation de la développée est donnée aussi par:

☐ $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ ☐ $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - (2x)^{\frac{2}{3}} = 1$

☐ $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + (2x)^{\frac{3}{2}} = 1$ ☐ $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

**Exercice 9.** [Le même mais en paramétrique]

Nous pouvons aussi considérer l'équation paramétrique de la branche supérieure de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$, par:

$$x = \sinh(t), \quad y = \cosh(t).$$

(a) Le courbure $\kappa$ en $A(x(a), y(a))$ est donnée par:

- ☐ $\kappa = 1 - 2\sinh^2(a)$
- ☐ $\kappa = \left(1 - 2\sinh^2(a)\right)^{-3/2}$
- ☒ $\kappa = \frac{1}{\left(1+2\sinh^2(a)\right)^{3/2}}$
- ☐ $\kappa = \frac{1}{1+2\sinh^2(a)}$

(b) Le rayon $r$ du cercle osculateur en A est donné par:

- ☐ $r = \frac{1}{1-2\sinh^2(a)}$
- ☐ $r = 1 + 2\sinh^2(a)$
- ☐ $r = \left(1 - 2\sinh^2(a)\right)^{3/2}$
- ☒ $r = \left(1 + 2\sinh^2(a)\right)^{3/2}$

(c) Le centre $C$ du cercle osculateur au point $A$ a pour coordonnées:

- ☒ $x_0 = -2\sinh^3(a), \quad y_0 = 2\cosh^3(a)$
- ☐ $x_0 = -2\sinh^3(a), \quad y_0 = -2\cosh^3(a)$
- ☐ $x_0 = 2\sinh(a) + 2\sinh^3(a), \quad y_0 = 2\cosh(a) - 2\cosh^3(a)$
- ☐ $x_0 = \sinh(a)\left(1 - \frac{1}{1-2\sinh^2(a)}\right), \quad y_0 = \cosh(a)\left(1 - \frac{1}{2\cosh^2(a)-1}\right)$