

Exercices — Série 5

Exercice 1. [Un exemple d'Euler, 1755]

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{(e^{e^x})}$.

Exercice 2.

Soient f, g, h trois fonctions dérivables. Alors la dérivée de $y(x) = 1 + f(x^2)g(h(x))$ vaut

- ☐ $y'(x) = 2xf(x^2)g'(h(x))h'(x)$
- ☐ $y'(x) = 2xf(x^2)g'(h'(x))$
- ☐ $y'(x) = 2xf'(x^2)g(h(x)) + f(x^2)g'(h(x))h'(x)$
- ☐ $y'(x) = 2xf'(x)g(h(x)) + f(x^2)g'(h(x))h'(x)$

Exercice 3.

V F

- 1) Si $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables sur $]a, b[$ et $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f'(x) > g'(x)$ sur $]a, b[$. ☐ ☐
- 2) Si $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f(0) = f'(0) = 0$, donc $f(x) = 0$ pour tout x . ☐ ☐
- 3) Soit $f(x)$ deux fois dérivables sur $[0, 1]$. Si $f'(x) > 0$ en $[0, 1]$, donc $f''(x) > 0$ en $[0, 1]$. ☐ ☐

Exercice 4. [Euler, 1755]

Déterminer le tableau des variations de la fonction

$$y(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

puis esquisser son graphe.

Exercice 5. [Euler, 1755]

La suite de nombres

$$\sqrt[1]{1} = 1, \quad \sqrt[2]{2} \simeq 1.4142, \quad \sqrt[3]{3} \simeq 1.4422, \quad \sqrt[4]{4} \simeq 1.4142, \quad \sqrt[5]{5} \simeq 1.3797, \quad \dots$$

semble suggérer que la fonction $y(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ possède un maximum près de $x = 3$. Trouver où exactement et comparer avec la valeur minimale de la fonction $y(x) = x^x$.

Indication. Pour calculer la dérivée de $y(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ou de $y(x) = x^x$, il peut être utile de se référer à la méthode utilisée pour a^x .

Exercice 6. La dérivée de la fonction $\arctan(\sqrt{x})$ en $x \in \mathbb{R}_+$ vaut

☐ $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

☐ $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$

☐ $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

☐ $\frac{1}{1+x}$

Exercice 7. La dérivée de la fonction $y(x) = \ln\left(\frac{(x+2)^3(x+5)^7}{\sqrt{x-5}}\right)$, $x > 5$, vaut

☐ $y'(x) = \ln\left(\frac{21(x+2)^2(x+5)^6}{2(x-5)^{1/2}}\right)$

☐ $y'(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{21(x+2)^2(x+5)^6}$

☐ $y'(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{7}{x+5} - \frac{1}{2(x-5)}$

☐ $y'(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{(x+2)^3(x+5)^7}$

Exercice 8. Donner l'équation de la tangente à $y(x) = \frac{2e^x}{x^2 - 1}$ en $x = 0$.

☐ $y = -2x + 4$

☐ $y = 2x - 4$

☐ $y = e^2x - 2$

☐ $y = -2x - 2$

Exercice 9.

Soit $f(x)$ une fonction dont le développement limité en $x = 0$ est

$$f(x) = 10 - 6x^6 + o(x^6)$$

Alors

☐ f possède un maximum local en $x = 0$

☐ on ne peut pas savoir le type du point stationnaire en $x = 0$

☐ f possède un minimum local en $x = 0$

☐ f possède un point selle en $x = 0$

Exercice 10.

A l'aide du développement limité du sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

déterminer le développement limité d'ordre 5 de la fonction

$$f(x) = \sin(x^3) - \sin^3(x)$$

En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x)}{x^5}$$

☐ $+\infty$

☐ 3

☐ 1

☐ $\frac{1}{2}$

Exercice 11. [Leibniz, 1710]

Pour une fonction $y(x) = f(x) \cdot g(x)$, montrer que

$$y'' = f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'', \quad \text{et} \quad y''' = f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + f \cdot g''',$$

puis extrapoler une formule générale pour la n -ième dérivée $y^{(n)}$.