

Exercices — Série 4

Exercice 1. [Limites]

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\sqrt{x^3})}{x}$

☐ 0

☐ 2

☐ 1

☐ $+\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + 5})}{x^3 + x^2 + 1}$

☐ $\frac{\sin(\sqrt{6})}{3}$
☐ $\sin(\sqrt{5})$
☐ 0

☐ $\cos(\sqrt{5})$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 7}$

☐ $2/7$
☐ 1

☐ ∞
☐ $5/3$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x}$

☐ ∞
☐ 0

☐ $1/2$
☐ $1/\sqrt{2}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x}$

☐ ∞
☐ $1/2$
☐ $1/\sqrt{2}$
☐ 0

Exercice 2. [Limites bis]

Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calcul pour les limites et les critères donnés dans le cours pour lever les indéterminations.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^4 + 6x + 3} - x^2)$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt{x^3 + 4})$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 3}}{5}$

(7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{(2x + 1)(x + 4)})$

(8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 3.

Calculer la dérivée de $\log_{10}(x)$, et plus généralement de $\log_a(x)$ (pour $a \neq 1$) en utilisant la règle de changement de base et la dérivée de la fonction $\ln(x)$.

Exercice 4.

Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\arctan(x)} + \frac{(3+5x)}{(x+4x^2)} + \ln^2(x) .$$

Exercice 5. [Limites ter]

Pour les fonctions $f(x)$ et les points x_0 ci-dessous, calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Sinon, montrer que la limite n'existe pas.

$$(1) \quad f(x) = \frac{5x^3 + 10x}{5x} \quad x_0 = 0$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \quad x_0 = 1$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} \quad x_0 = 2$$

$$(6) \quad f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \quad x_0 = 1$$

$$(3) \quad f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x_0 = 0$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} \quad x_0 = 0$$

$$(7) \quad f(x) = \frac{\tan(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} \quad x_0 = 1$$

Exercice 6.

Soient f , g et h trois fonctions dérivables. Alors la dérivée de $y(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ vaut

$$\square \quad f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

$$\square \quad f'(x) \cdot g'(x) \cdot h'(x)$$

$$\square \quad f'(x) \cdot (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x))$$

$$\square \quad f(x) \cdot (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x))$$

Exercice 7.

Soient f, g, h trois fonctions dérivables. Alors la dérivée de $f(g(h(x)))$ vaut

$$\square \quad f'(g'(h'(x))))$$

$$\square \quad f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

$$\square \quad f'(g(h(x)))g'(h(x))$$

$$\square \quad f'(g(h(x)))h'(x)$$

Exercice 8.

La dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ vaut

☐ $-\frac{x}{\ln^2(x)}$

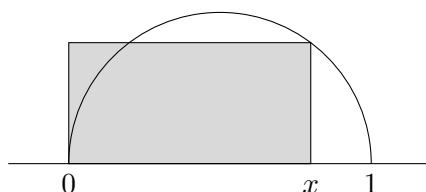
☐ $-\frac{1}{x \ln^2(x)}$

☐ $-\frac{1}{\ln^2(x)}$

☐ $-\frac{1}{x \ln(x)}$

Exercice 9. [Johann Bernoulli, ~1691]

Trouver x pour lequel le rectangle formé par l'abscisse et l'ordonnée d'un point sur le cercle $y = \sqrt{x - x^2}$ soit d'aire maximale.



S'assurer qu'il s'agit bien d'un maximum en étudiant le signe de la dérivée.

Exercice 10.

Donner l'équation de la tangente à $f(x) = \frac{2e^x}{x^2 - 1}$ en $x = 0$.

☐ $y(x) = -2x - 2$

☐ $y(x) = 2x - 4$

☐ $y(x) = -2x + 4$

☐ $y(x) = e^2x - 2$

Exercice 11.

La fonction $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ a la propriété suivante

☐ $f'''(x) = f'(x)$

☐ $f(x) = f^{(5)}(x)$

☐ $f''(x) = f^{(4)}(x)$

☐ $f'(x) = f^{(5)}(x)$