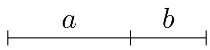
Exercices — Série 3

Exercice 1. [Le “nombre d'or” d'Euclide et les fonctions trigonométriques]

Pour Euclide (mathématicien grec considéré comme un des fondateurs des mathématiques modernes, 325–265 *av.J.-C.* environ),

> Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est tout entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit.

En d'autres termes, donné un partage d'un segment en deux parties:

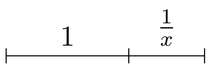


les longueurs a et b forment une “extrême et moyenne raison” (ou, une **section d'or** dans les textes à partir du XIX^{e} siècle) si

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \ .$$

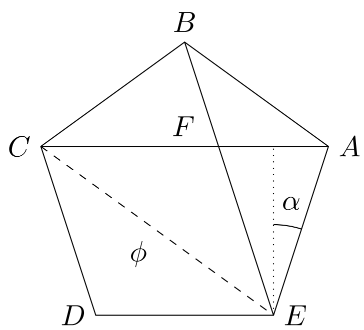
(a) Vérifier que si a et b forment une “extrême et moyenne raison” d'un certain segment, alors ka et kb vont aussi former une “extrême et moyenne raison” pour un segment k fois “plus grand” (où $k > 0$).

(b) D'après le point précédent, on peut se réduire au cas où a est de longueur 1. Trouver la longueur x pour que le segment



soit “coupé en extrême et moyenne raison”. Remarquer que x est alors la longueur totale du segment. Cette unique solution x que l'on obtient est appelé le **nombre d'or**.

(c) Dans un pentagone régulier $ABCDE$ (d'arêtes de longueur 1),



montrer que les triangles CEA et EAF sont semblables, et isocèles. Trouver $\overline{FA}$ en fonction de la longueur ϕ, et déterminer aussi la longueur $\overline{CF}$. Conclure que F partage CA en “extrême et moyenne raison”, et donner la valeur de ϕ.

(d) Trouver la mesure en degrés de l'angle α (qui partage FEA en deux), et donner les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

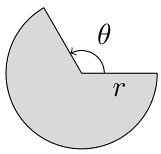
Exercice 2.

Si un angle θ est dans le premier quadrant (c'est-à-dire $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$) et que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, alors

- ☐ $\sin(\theta) = \frac{1}{9}$
- ☐ $\sin(\theta) = -\frac{1}{3}$
- ☐ $\sin(\theta) = \frac{1}{3}$
- ☐ $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{8}}{3}$

Exercice 3.

Un cône droit est fabriqué en découpant un secteur d'angle θ dans un disque, et en recollant les deux demi-rayons ainsi obtenus. Calculer le **demi-angle d'ouverture** du cône (*i.e.* l'angle entre la hauteur du cône et une de ses génératrices) et observer qu'il ne dépend que de θ.



- ☐ $\arcsin\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$
- ☐ $\arcsin\left(1 - \frac{\theta}{4\pi}\right)$
- ☐ $\arcsin\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$
- ☐ $\arcsin\left(1 + \frac{\theta}{2\pi}\right)$

Exercice 4. [Application de la trigonométrie]

L'angle d'élévation d'un point sur le sol au sommet d'une pyramide est de 24°30'. L'angle d'élévation d'un point 50 m plus loin vers le haut de la pyramide est de 15°50'. Trouver la hauteur de la pyramide.

- ☐ 27.23 m
- ☐ 47.21 m
- ☐ 37.54 m
- ☐ 5.37 m

Exercice 5. [Formule de de Moivre]

Dans l'expression de $\sin(1000x)$ on trouve un terme qui vaut

- ☐ $\sin^{1000}(x)$
- ☐ $1000\sin(x)\cos^{999}(x)$
- ☐ $\cos^{1000}(x)$
- ☐ $\binom{1000}{2}\sin^2(x)\cos^{998}(x)$

Exercice 6.

Montrer que, pour tout x réel, on a :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ .$$

Esquisser la courbe parcourue par les points $(\cosh(x), \sinh(x))$ lorsque x varie.

Exercice 7.

Démontrer les formules suivantes.

(a) Formules de la somme des arguments (pour tout x, y réels):

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \ , \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \ . \end{aligned}$$

(b) Formules de l'argument double (pour tout x réel):

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x) \ , \\ \cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1 \ . \end{aligned}$$

(c) Formules du demi-argument (la première pour $0 \le x$, la seconde pour tout x réel):

$$\sinh(\tfrac{x}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh(x) - 1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \cosh(\tfrac{x}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh(x) + 1}{2}} \ .$$

Comparer avec les formules correspondantes des fonctions trigonométriques.

Exercice 8.

L'expression $\sinh(x - y)$ vaut

- ◻ $\sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$
- ◻ $\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
- ◻ $\sinh(x)\cosh(-y) - \cosh(x)\sinh(-y)$
- ◻ $\cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$