

Exercices — Série 1

Exercice 1.

Indiquer lesquelles des expressions suivantes sont des polynômes de la variable x et préciser leur degré :

- | | |
|----------------------------|---|
| a) $3x^2 + x + \pi$ | j) x^x |
| b) $2^x + 1$ | k) $x(x + 1)$ |
| c) $x^7 - 1$ | l) $(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$ |
| d) 2 | m) $x^{2^{10}} - 1$ |
| e) $x^5 + x^4$ | n) $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ |
| f) $\sin(x) + x^2$ | o) $(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$ |
| g) $\sqrt{x}$ | p) $\frac{x^{2^n}}{x^{2^m}}$ |
| h) $3yx^2 + 2yx + \sin(y)$ | |
| i) $\frac{1}{x+1}$ | |

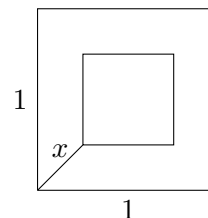
Exercice 2.

- a) Trouver deux polynômes p, q de degré 1 tels que $p(0) = q(0)$ mais tels que $p \neq q$.
- b) Trouver deux polynômes p, q de degré 2 tels que $p(0) = q(0)$ et $p(1) = q(1)$ mais tels que $p \neq q$.

Exercice 3.

On considère un carré de côté 1 dans lequel est inscrit un carré concentrique, comme dans la figure ci-contre. On note x la longueur qui sépare deux sommets voisins des carrés.

- 1) Exprimer la surface du petit carré en fonction de x .
- 2) Trouver x de telle sorte que la surface du petit carré soit égale à la moitié de la surface du grand.



Exercice 4.

Sachant que $\sin(0^\circ) = 0$ et $\sin(1^\circ) \simeq 0.0174524$, trouver un polynôme de degré 1 qui interpole ces deux valeurs, et l'utiliser pour estimer la valeur de $\sin(0.5^\circ)$. Comparer avec la "vraie" valeur $\sin(0.5^\circ) \simeq 0.0087265$.

Exercice 5.

(a) Démontrer par récurrence que

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \text{ pour tout entier } n \text{ positif ou nul.}$$

Cette formule nous donne un polynôme $p(x) = \frac{x \cdot (x+1)}{2}$ qui évalue la somme des entiers positifs ou nuls jusqu'à $x = n$

(b) Démontrer par récurrence sur n que

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{pour } a \geq -1, n = 0, 1, 2, \dots$$

(c) Démontrer par récurrence que le nombre $2^{2n} + 2$ est divisible par 3, quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.

Donner le développement complet de $(1 + x)^9$.

Exercice 7.

Dans l'expression de $(2 + x)^{90}$ le coefficient se trouvant devant le terme x^{20} vaut

☐ $\binom{90}{20}$

☐ $2^{20} \binom{90}{20}$

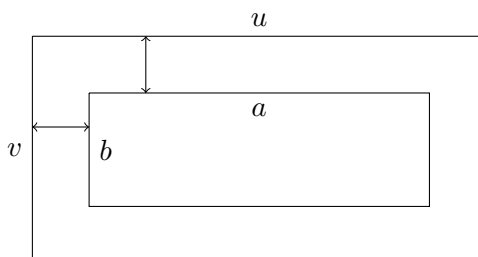
☐ $2^{70} \binom{90}{70}$

☐ $\binom{90}{70}$

Tournez svp!

Exercice 8. ¹

On considère la face rectangulaire (de longueur u et de largeur v) d'un panneau préfabriqué. Trouver les longueurs a et b des côtés d'une ouverture rectangulaire d'aire la moitié de l'aire du rectangle d'origine, de telle sorte que le cadre soit de largeur constante:



(De cette manière, la quantité de lumière passant par l'ouverture est essentiellement la même que celle bloquée par le cadre du panneau.)

Donner ensuite les valeurs de a et b dans le cas où $u = 4[\text{m}]$ et $v = 3[\text{m}]$, ainsi que dans le cas où $u = 12[\text{m}]$ et $v = 5[\text{m}]$.

¹Cette question est survenue pendant la préparation de l'UE-P "Béton. Construction et préfabrication" du semestre de printemps 2013 proposée par E. Amstein et T. Voellinger.