

Examen blanc de mi-semestre

L'énoncé comprends 16 questions couvrant les premières six semaines du cours.

Exercice 1. [Droite]

La droite passant par les points $A = (10, 1)$ et $B = (100, 2)$ coupe l'axe Ox dans le point P . Quelles sont les coordonnées du point P ?

☐ $P(190, 0)$

☐ $P(-90, 0)$

☐ $P(0, \frac{8}{9})$

☐ $P(-80, 0)$

Exercice 2. [Polynôme d'interpolation]

Le polynôme d'interpolation $P(x)$ passant par les points $(0, -1)$, $(1, -2)$, $(2, 0)$ et $(3, 1)$ est :

☐ $P(x) = -1 - x + \frac{3}{2}x(x-1) - \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$

☐ $P(x) = -1 + x + \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$

☐ $P(x) = -1 - x + 3x^2 - 4x^3$

☐ $P(x) = -1 + x + 3x^2 + 4x^3$

Exercice 3. [Binôme de Newton]

Dans l'expression de $(7 + 2x)^{2021}$ le coefficient devant le terme x^{2020} vaut

☐ 2^{2021}

☐ $2020 \cdot 7$

☐ $2021 \cdot 7 \cdot 2^{2020}$

☐ $2020 \cdot 2^{2020}$

Exercice 4. [Polynôme]

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré 11 vérifiant les conditions suivantes :

$$P(1) = 1!, \quad P'(1) = 2!, \quad P''(1) = 3!, \dots, \quad P^{(10)}(1) = 11!$$

Alors :

☐ Il existe une infinité de polynômes P vérifiant ces conditions.

☐ Un tel polynôme P n'existe pas.

☐ Il existe un unique polynôme P vérifiant ces conditions.

☐ Si P est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors

$$P(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \dots + 11(x-1)^{10} + 12(x-1)^{11}.$$

Exercice 5. [Propriétés des logarithmes]

Soit $x > 0$ et soit $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction logarithme naturel. Alors l'expression

$$\ln((x+1)^2) - \ln(x^2)$$

vaut :

☐ $2 \ln(x^2 - 1)$

☐ $2 \ln(1 + \frac{1}{x})$

☐ $\ln(2x - 1)$

☐ $\ln(2x + 1)$

Exercice 6. [Logarithmes et coefficients binomiaux]

Soient n et k des entiers positifs tels que $k \leq n$ et soit $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction logarithme naturel. Alors l'expression

$$\ln\left(\binom{n}{k}\right)$$

vaut

☐ $\ln(n) - \ln(k)$

☐ $\ln(n!) - \ln(k!) - \ln((n-k)!)$

☐ 0

☐ $\ln(n) - \ln(k) - \ln(n-k)$

Exercice 7. [Fonctions trigonométriques]

Si les trois angles internes d'un triangle ont tous une tangente positive, alors :

☐ Il s'agit d'un triangle rectangle.☐ Tous les angles internes du triangle sont aigus.☐ Ce triangle a un angle interne obtus.☐ Il n'est pas possible que les trois angles internes aient une tangente positive.**Exercice 8.** [Relations trigonométriques]

Soit x un angle. L'expression $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ est égale

☐ $\cos^3(x) - \sin^3(x)$

☐ $\cos(x) - \sin(x)$

☐ $\cos^2(x) - \sin^2(x)$

☐ 1

Exercice 9. [Fonctions hyperboliques]

L'expression $\sinh(\ln(2))$ vaut

☐ $\frac{5}{4}$

☐ 5

☐ $\frac{3}{2}$

☐ $\frac{3}{4}$

Exercice 10. [Dérivation des fonctions trigonométriques]

La dérivée de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{2}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ en un point $x \neq 0$ vaut

☐ 1

☐ $\frac{\pi}{4}$

☐ 0

☐ $\frac{2+x^2}{4+x^2}$

Exercice 11. [Droite tangente à une courbe]

L'équation de la droite tangente à la courbe définie par la fonction $f(x) = x^2(1 - \log_\pi(x))$ au point d'abscisse π s'écrit :

☐ $y = -\frac{\pi}{\ln(\pi)}x + \frac{\pi^2}{\ln(\pi)}$

☐ $y = (2\pi - \frac{\pi}{\ln(\pi)})(x - \pi^2)$

☐ $y = -\pi x + \pi^2$

☐ $y = -\ln(\pi^\pi)x + \ln(\pi^{\pi^2})$

Exercice 12. [Dérivées d'ordre supérieur]

La dérivée quatrième de la fonction $h(x) = \sin(x)e^x + 1$ en $x = \frac{\pi}{4}$ vaut

☐ $-2\sqrt{2}e^{\pi/4}$

☐ $\sqrt{2}$

☐ 0

☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}e^{\pi/4}$

Exercice 13. [Intégrale définie]

L'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

vaut

☐ $\frac{\pi}{2}$

☐ $\frac{\pi}{6}$

☐ $\frac{\pi}{4}$

☐ $\frac{\pi}{8}$

Exercice 14. [Aire sous la courbe]

L'aire sous la courbe $f(x) = x^{\pi-e}$ entre les droites verticales $x = 0$ et $x = \ln(3)$ vaut

☐ $\ln^{\pi-e+1}(3)$

☐ $\frac{\ln^{\pi-e+1}(3)}{\pi - e + 1}$

☐ $\frac{\pi - e - 1}{\ln^{\pi-e+1}(3)}$

☐ $\ln(3)$

Exercice 15. [Intégrale indéfinie]

L'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}} dx$ vaut

☐ $\frac{2\sqrt{7+x^3}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

☐ $\frac{\sqrt{7+x^3}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

☐ $-\frac{2\sqrt{7+x^3}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

☐ $\frac{3\sqrt{7+x^3}}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 16. [Primitive]

Une primitive de la fonction

$$\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}$$

est

☐ $e^{\arctan(x)} - \frac{1}{x}$

☐ $e^{\arctan(x)} + \frac{1}{x}$

☐ $e^{\arctan(x)} + \ln(x)$

☐ $e^{\tan(x)} - \frac{1}{x}$