Examen blanc 2024

Exercice 1.
Parmi les fonctions réelles suivantes, laquelle est une fonction polynomiale en x

- ☐ $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
- ☐ $f(x) = \sin(\alpha) \cdot x^2 + \frac{x}{\pi} + e^2 \cdot x^3$ pour α fixé.
- ☐ $f(x) = 3\sin(x) + 2x$.
- ☐ $f(x) = x^3 - \pi x^2 + x - \sqrt{x}$.

Exercice 2.
Quel est le coefficient du terme x^3 dans le développement de

$$P(x) = (2-3x)^8$$

- ☐ $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 27 \cdot 32$
- ☐ $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 3^5$
- ☐ $-\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 27 \cdot 32$
- ☐ $-\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 6^5$

Exercice 3.
Quelle est la dérivée de la fonction

$$f(x) = \log_{10}(2x) + 3^x$$

.

- ☐ $f'(x) = \dfrac{20}{x} + x \cdot 3^{x-1}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(10)} + \ln(3) \cdot 3^x$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{\ln 10}{x} + 3^x$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(10) \cdot x} + \dfrac{3^x}{\ln 3}$

Exercice 4.
Pour tout $a, b > 0$ et différents de 1 on a

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

- ☐ VRAI
- ☐ FAUX

Exercice 5.
L'expression

$$2\sinh(3) - 4\cosh(3) + 1$$

vaut

- ☐ $1 - e^3 - \dfrac{3}{e^3}$
- ☐ $1 - e^3 + \dfrac{2}{e^3}$
- ☐ $1 - e^3 - \dfrac{1}{e^3}$
- ☐ $1 - \dfrac{1}{2}e^3 + \dfrac{3}{2e^3}$

Exercice 6.
Une personne regarde le sommet d'un mât de hauteur h. Ses xeux sont à 2 mètres du sol et il voit le sommet du mât sous un angle de 45 degrés (par rapport à l'horizontale). Son fils, 1 mètre devant lui, et donc les yeux sont à 1 mètre du sol, voit le sommet du mât sous un angle de 60 degrés.
La hauteur h du mât vaut

- ☐ $h = 4 + \sqrt{3} \approx 5.732$ mètres
- ☐ $h = 2\sqrt{3} + 1 \approx 4.464$ mètres
- ☐ $h = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$ mètres
- ☐ $h = \frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \approx 8.464$ mètres

Exercice 7.
Soit 3 fonctions réelles f, g et h dont les développements limités en $a = 0$ sont

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + x^4 + o(x^4) \\ g(x) &= -x^2 - 2x^3 + o(x^3) \\ h(x) &= -x^3 + 5x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Alors la limite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) + x \cdot g(x) + h(x)}{x^4}$$

vaut

- ☐ 0
- ☐ 3
- ☐ $+\infty$
- ☐ 4

Exercice 8.
La limite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{3\sin(x^2)}}$$

vaut

- ☐ $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$
- ☐ $\sqrt[3]{e}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{e^3}$

Exercice 9.
On considère la courbe γ donnée sous forme cartésienne implicite

$$(\gamma)\ :\ x^3y + \ln(x + y^2) + y^2 - 3x = 3 + \ln(5)$$

et le point $P(1, 2)$ sur cette courbe. L'équation de la tangente à γ au point P est

☐ $y = -\frac{2}{5}(x-1)+2$

☐ $y = 2(x-1)+2$

☐ $y = -\frac{16}{29}(x-1)+2$

☐ $y = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$

Exercice 10.
Soit f une fonction réelle continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui admet au voisinage d'un point $x = a$ les tableaux de signes suivants:

	a	
f'(x)	+	-
f"(x)	+	+

Alors

☐ le point $x = a$ est un minimum local

☐ le point $x = a$ est un maximum local et $f'(a)$ n'existe pas

☐ cette situation ne peut jamais arriver

☐ le point $x = a$ est un plat

Exercice 11.
Si une fonction réelle f a sa dérivée seconde qui s'annule en $x = a$ alors f possède un point d'inflexion en ce point.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, impaire et 2 fois dérivable ($f''(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$) qui n'est pas la fonction $f(x) = x$. Alors f possède toujours un point d'inflexion en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 13.
Si une courbe de l'espace $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a une torsion nulle en tout point alors cette courbe se situe dans un plan

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 14.
On considère la courbe du plan donné sous forme paramétrique par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} \qquad t \in I = \left[0; \frac{7\pi}{4}\right]$$

Alors

- □ il existe 2 valeurs de t où la tangente à γ est horizontale et 2 valeurs de t où la tangente est verticale.
- □ il existe 4 valeurs de t où la tangente à γ est horizontale et 4 valeurs de t où la tangente est verticale.
- □ il existe 4 valeurs de t où la tangente à γ est horizontale et 2 valeurs de t où la tangente est verticale.
- □ il existe 5 valeurs de t où la tangente à γ est horizontale et 2 valeurs de t où la tangente est verticale.

Exercice 15.
L'intégrale définie

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{3x^2}{(x-2)^4}\, dx$$

vaut

□ $I = \frac{7}{2}$ □ $I = \frac{13}{5}$

□ $I = 12$ □ $I = \frac{27}{8}$

Exercice 16.
L'intégrale définie

$$I = \int_0^{1} \arctan(x) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx$$

vaut

□ $I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ □ $I = \frac{\pi}{4} - \ln(2)$

□ $I = \frac{\pi}{12} - 2\ln(2)$ □ $I = \frac{1}{6} \cdot (\pi - 1)$

Exercice 17.
L'aire géométrique comprise entre la parabole $y = x^2$ et la cubique $y = x^3 - 2x^2 - x + 3$ vaut

□ $A = 0$ □ $A = 3$

□ $A = 8$ □ $A = 5$

Exercice 18.
Dans le plan, la distance entre le point $P(2,3)$ et la droite d'équations paramétriques

$$(d) : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t+4 \\ 5+t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

vaut

□ $\delta(P,d) = \frac{6}{5}$

□ $\delta(P,d) = \frac{14\sqrt{29}}{29}$

□ $\delta(P,d) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

□ $\delta(P,d) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Exercice 19.
Dans l'espace la distance entre les deux droites gauches

$$(d): \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2t \\ -1-t \\ 3-2t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (g): \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3s \\ 2+s \\ 5-s \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

vaut (arrondie au millième)

□ $\delta(d,g) \approx 1.511$

□ $\delta(d,g) \approx 4.069$

□ $\delta(d,g) \approx 2.525$

□ $\delta(d,g) \approx 1.744$

Exercice 20.
On considère la courbe c de $\mathbb{R}^2$ donnée sous forme paramétrique:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Alors les équations paramétriques de la développée de c sont

□ $X(t) = \frac{2}{3}\cos(t) - 3\cos^2(t)$ et $Y(t) = 3 + 2\sin(t)\cos(t)$

□ $X(t) = -4\sin^3(t)$ et $Y(t) = 3\cos^2(t) - \frac{5}{2}$

□ $X(t) = \frac{3}{2}\cos^2(t) - 3\sin(t)$ et $Y(t) = 1 + 3\sin^3(t)$

□ $X(t) = 2\cos^2(t)$ et $Y(t) = 3\sin^3(t) + \frac{7}{2}$

Exercice 21.
On considère la courbe c de $\mathbb{R}^2$ donnée sous forme paramétrique:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ 2\sqrt{t} \end{pmatrix} \qquad 3 \le t \le 8$$

Alors la longueur L de la courbe c vaut

□ $L = 1 + \arctan(8)$.

□ $L = 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

□ $L = 2 + \sqrt{3}$.

□ $L = 1 + \sqrt{8} - \sqrt{3}$.

Exercice 22.
On considère la surface de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation cartésienne

$$(\Sigma): \frac{z^2}{x+1} + \ln(x^2 + 2y - z) = 2$$

et le point $P(1,1,2)$ sur cetet surface. Alors l'équation du plan tangent à Σ au point P est

☐ $2x - 5x + 3z = 3$

☐ $2x - y + 3z = 7$

☐ $x - 2y + z = 1$

☐ $x - 5x + 3z = 2.$

Exercice 23.
On considère courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations paramétriques

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 \\ t^2 - t \\ \ln(1+t^2) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Alors la courbure de γ au point $P(\frac{1}{3}, 0, \ln(2))$ vaut

☐ $\kappa_P = \sqrt{\frac{8}{27}}$

☐ $\kappa_P = 0$

☐ $\kappa_P = \sqrt{\frac{11}{8}}$

☐ $\kappa_P = \frac{4}{9}$

Exercice 24.
On considère courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations paramétriques

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(2t) \\ \sin^2(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, \pi]$$

Alors le plan osculateur à la courbe γ au point $P(0,0,1)$ a comme équation cartésienne

☐ $2x - 2y + z = 1$

☐ $2x - 2x + 4z = 4$

☐ $2x + 2y - 4z + 4 = 0$

☐ $x = y$

Exercice 25.
L'enveloppe de la famille de droite (paramétrée par a)

$$y = x \cdot \tan(a) + \frac{1}{\tan(a)}$$

est

☐ l'hyperbole d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$

☐ la parabole d'équation $y^2 = 4x$

☐ le cercle d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 5$

☐ l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 26.

La torsion d'une droite de $\mathbb{R}^3$ est nulle

□ VRAI □ FAUX

Exercice 27.

On considère la courbe de Bézier cubique γ dont les 4 points de contrôles sont $P_0(0,0)$, $P_1(1,3)$, $P_2(3,-1)$ et $P_3(5,0)$. Alors le vecteur tangent à la courbe en son milieu est

□ $\gamma'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix}$ □ $\gamma'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & -3 \end{pmatrix}$

□ $\gamma'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{23}{4} \end{pmatrix}$ □ $\gamma'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 28.

La surface de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 2u\cos v \\ u\sin v \\ 3u \end{pmatrix} \qquad u \geq 0 \quad v \in [0, 2\pi]$$

est

□ un hélicoïde (ou surface hélicoidale)

□ un cylindre dont la section est une ellipse

□ un cône dont la section est une ellipse

□ un cylindre vertical dont la section est un cercle.

Exercice 29. On considère la chaînette γ située dans le plan Oyz d'équations paramétriques

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ \cosh(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2]$$

L'aire de la surface de révolution obtenue lorsque γ tourne aoutour de l'axe Oz vaut

□ $S = 2\pi \cdot (\sinh(2) - 1)$ □ $S = 2\pi \cdot (2\sinh(2) - \ln(2))$

□ $S = 2\pi \cdot (2\sinh(2) - \cosh(2) + 1)$ □ $S = \pi \cdot \left(\sinh^2(2) - \sinh(2) + 1\right)$