

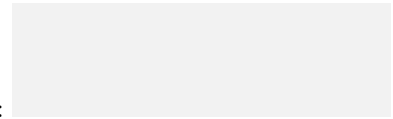


Ens: Stefano Francesco Burzio
MATH-189 Mathématiques - AR
16 janvier 2024
Durée : 210 minutes

Leonhard Euler

SCIPER: 111111

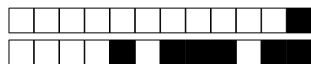
Signature :



Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Un **formulaire** personnel de 2 feuilles A4 recto-verso est autorisé.
- L'utilisation du livre **Formulaires et tables**, CRM éditions contenant des annotations personnelles est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** non graphique et non programmable est autorisé.
- L'utilisation de tout autre **outil électronique** est interdite pendant l'épreuve.
- **Aucun** autre document n'est autorisé.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +1 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0.2 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x = \tanh(y)$ et $|x| < 1$. Alors

☐ $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

☐ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

☐ $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

☐ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Question 2 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls dans l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$. Choisir l'identité correcte parmi celles qui suivent.

☐ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$

☐ $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

☐ $\|\lambda \vec{u}\| = \lambda \|\vec{u}\|$

☐ Le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs est donné par $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

Question 3 Soit le point $P(1, \pi)$. Considérons la droite d dont la pente vaut $-1/e$ passant par P , et la droite s perpendiculaire à d et passant par P . Alors :

☐ La droite d coupe l'axe Ox dans le point $(0, 1 + e\pi)$

☐ La droite d coupe l'axe Oy dans le point $(0, \pi - \frac{1}{e})$

☐ La droite s coupe l'axe Oy dans le point $(0, \frac{1}{e} + \pi)$

☐ La droite s coupe l'axe Ox dans le point $(1 - \frac{\pi}{e}, 0)$

Question 4 Une paramétrisation du plan qui contient les trois points $P(1, 0, 1)$, $Q(2, -2, 2)$, et $R(3, 2, 4)$ est donnée par

☐ $r(u, v) = (2 + u - v, -2 - 2u - 4v, 2 + u + 2v)$, où $u, v \in \mathbb{R}$

☐ $r(u, v) = (1 - u - 2v, 2u - 2v, 1 + 3u - 3v)$, où $u, v \in \mathbb{R}$

☐ $r(u, v) = (2 - u + v, -2 + 2u + 4v, 2 - u + 2v)$, où $u, v \in \mathbb{R}$

☐ $r(u, v) = (-1 + u + 2v, -2u + 2v, -1 + u + 3v)$, où $u, v \in \mathbb{R}$

Question 5 Soit d_1 la droite de vecteur directeur $\vec{d}_1 = (-3, 1, 4)$ qui passe par le point $A_1(-5, 4, 15)$ et soit d_2 la droite de vecteur directeur $\vec{d}_2 = (3, 5, -4)$ qui passe par le point $A_2(-10, -3, 5)$. La distance entre les droites d_1 et d_2 vaut

☐ 5

☐ 10

☐ 50

☐ 2



Question 6 Les solutions réelles de l'équation suivante sont :

$$e^{-x} = \frac{2^{3x}}{3^{x^2}}$$

- ☐ $x = 1$ et $x = \log_3(8)$
☐ $x = 0$ et $x = \ln(3) + \ln(8)$
☐ $x = 0$ et $x = \log_8(3) - \log_3(8)$
☐ $x = 0$ et $x = \log_3(e) + \log_3(8)$

Question 7 Soient $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ tels que $b > 0$ et $b \neq 1$. Si $\log_b(5) = a$, $\log_b(2.5) = c$, et $5^x = 2.5$ alors x vaut

- ☐ $\frac{c}{a}$
☐ $c - a$
☐ $a \cdot c$
☐ $a + c$

Question 8 L'aire de la région du plan comprise entre les graphes des deux fonctions $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = xe^{-x}$ et les deux droites verticales $x = 0$ et $x = 1$ vaut

- ☐ 1
☐ e
☐ e^{-1}
☐ $1 - e^{-1}$

Question 9 Laquelle des affirmations suivantes est vraie pour toute fonction bijective f ?

- ☐ Si f est paire, alors $f(-x) - f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
☐ Si f est impaire, alors $f(f(-x)) = -f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$.
☐ Si f est impaire, alors $f(x) - f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
☐ Si f est paire, alors $-f(f(-x)) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$.

Question 10 Parmi les identités suivantes contenant les réciproques des fonctions trigonométriques, sélectionner celle qui est correcte pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $-1 < x < 1$.

- ☐ $\arcsin(x) = \pi + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
☐ $\arccos(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$
☐ $\arccos(x) = \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$
☐ $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$



Question 11 Considérons la courbe de l'espace donnée par $\gamma(t) = (\sin(t) \cos(t), \cos^2(t) - \frac{1}{2}, \sin(t))$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. À laquelle des surfaces ci-dessous γ appartient-elle?

☐ $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + z^2 = 1$

☐ $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + z = 1$

☐ $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

☐ $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = z^2$

Question 12 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier strictement supérieur à 2 et $x \in \mathbb{R}$ non nul. Quel est le coefficient du terme x^{n-2} dans le développement de $(2+x)^n$?

☐ $2^{n-2} \cdot \binom{n}{n-2}$

☐ $2^n \cdot \binom{n+2}{2}$

☐ $2 \cdot \binom{n-2}{2}$

☐ $4 \cdot \binom{n}{2}$

Question 13 Une équation paramétrique de la développée de la courbe $y(x) = e^x$ est donnée par

☐ $x(a) = a - 1 - e^{2a}$ et $y(a) = e^a + 2 \cosh(a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

☐ $x(a) = a - 1 - e^{2a}$ et $y(a) = e^{-a} + 1$ où $a \in \mathbb{R}$.

☐ $x(a) = a - 1 - e^{2a}$ et $y(a) = 2 \cosh(a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

☐ $x(a) = a + 1 - e^{2a}$ et $y(a) = e^a + e^{-a} + 1$ où $a \in \mathbb{R}$.

Question 14 Considérons les deux courbes paramétriques suivantes : $c(t) = (0, t, 0)$ et $d(t) = (\cos t, t, \sin t)$, où $t \in \mathbb{R}$. Une paramétrisation de l'hélicoïde contenant les deux courbes données est

☐ $r(u, v) = (u \cos(v), v, u \sin(v))$, où $u, v \in \mathbb{R}$

☐ $r(u, v) = (u \cos(v), u, u \sin(v))$, où $u, v \in \mathbb{R}$

☐ $r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$, où $u, v \in \mathbb{R}$

☐ $r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$, où $u, v \in \mathbb{R}$

Question 15 Considérons une courbe de Bézier avec quatre points de contrôle différents P_0, P_1, P_2 et P_3 . Le vecteur $\vec{v}$ tangent à la courbe à la valeur du paramètre $t \in [0; 1]$ est donnée par :

☐ $\vec{v} = 3(1-t)^2 \overrightarrow{P_0 P_1} + 6t(1-t) \overrightarrow{P_1 P_2} + 3t^2 \overrightarrow{P_2 P_3}$

☐ $\vec{v} = 3(1-t)^2 \overrightarrow{P_1 P_0} + 6t(1-t) \overrightarrow{P_2 P_1} + 3t^2 \overrightarrow{P_3 P_2}$

☐ $\vec{v} = (1-t)^2 \overrightarrow{P_0 P_1} + 2t(1-t) \overrightarrow{P_1 P_2} + t^2 \overrightarrow{P_2 P_3}$

☐ $\vec{v} = (1-t)^2 \overrightarrow{P_1 P_0} + 2t(1-t) \overrightarrow{P_2 P_1} + t^2 \overrightarrow{P_3 P_2}$

Question 16 Soit la fonction $f(x) = \cos(x)$ définie pour tous $x \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme de Taylor du quatrième degré, $P_4(x)$, centré au point $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est

☐ $P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$

☐ $P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$

☐ $P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$

☐ $P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$



Question 17 Considérons la portion de chaînette donnée par $z = \cosh(x)$ pour $0 \leq x \leq \ln(2)$ contenue dans le plan Oxz . L'aire latérale de la surface de révolution obtenue en faisant tourner cette courbe autour de l'axe Oz vaut

- ☐ $\frac{\pi}{2}(2 + \ln(2))(-6 + \ln(32))$
☐ $\frac{3\pi}{2}(\ln(8) - 1)$
☐ $\frac{3\pi}{2}$
☐ $\frac{\pi}{2}(\ln(8) - 1)$

Question 18 Parmi les expressions suivantes sélectionner celle qui est une expression polynomiale en fonction de la variable x .

- ☐ $P(x) = e^{x^2+x+1}$
☐ $P(x) = 1 + \frac{1}{x}$
☐ $P(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
☐ $P(x) = \sqrt{7}x^{10^{10}} - \ln(3)x^{9^9}$

Question 19 L'intégrale définie

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin(2 \sin(x)) dx$$

vaut

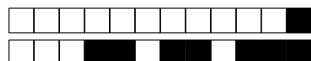
- ☐ $\frac{1}{2}(\cos(2) - 1)$
☐ 0
☐ 1
☐ $\sin^2(1)$

Question 20 Le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les trois points $A(15, 24)$, $B(18, 37)$ et $C(22, 25)$ est donné par

$$P(x) = 24 \cdot L_0(x) + 37 \cdot L_1(x) + 25 \cdot L_2(x)$$

où L_i sont les polynômes de Lagrange pour $i = 0, 1, 2$. Alors $L_1(16)$ vaut

- ☐ $1/2$
☐ $-35715/500000$
☐ $57143/100000$
☐ $13/3$



Deuxième partie, questions du type ouvert

Répondre à chaque question dans l'espace dédié. Toutes les réponses doivent être justifiées mathématiquement. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 21 *Cette question est notée sur 4 points.*

☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃ ☒₄

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

(a) $a(x) = \ln(x \cdot \ln(x))$;

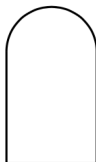
(b) $b(x) = x^{3x}$.



Question 22 *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6

Comme illustré sur la figure ci-dessous, une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle.



Déterminer les dimensions de la fenêtre qui laisse passer le plus de lumière (c.-à-d. d'aire maximale) en sachant que le pourtour (périmètre) de la fenêtre mesure 30 mètres.

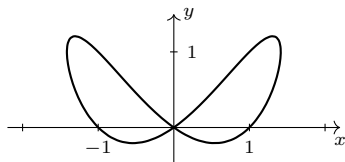


Question 23 Cette question est notée sur 12 points.

	0		1		2		3		4		5		6
	7		8		9		10		11	<input checked="" type="text"/>	12		

Une équation implicite de la *besace* (représentée ci-dessous) est:

$$(x^2 - y)^2 = x^2 - y^2.$$



- (a) (3 points) Calculer la pente d'une droite tangente à cette courbe en un point arbitraire (x, y) , puis en $(-1, 0)$.

- (b) (3 points) En utilisant la paramétrisation suivante de la besace:

$$x(t) = \cos(t) - \sin(t), \quad y(t) = -\sin(t) \cdot (\cos(t) - \sin(t)) \quad (\text{pour } 0 \leq t \leq 2\pi),$$

calculer la pente d'une droite tangente à cette courbe en un point $(x(t), y(t))$, puis en $(-1, 0)$.

- (c) (2 points) Calculer l'abscisse, notée y_0 , du point $P(-1, y_0)$ qui appartient à la courbe et pas à l'axe Ox . Ensuite, donner la valeur du paramètre t auquel le point P correspond dans l'équation paramétrique de la besace.
- (d) (4 points) Trouver les coordonnées exactes de tous les points de la besace où la droite tangente à la courbe est horizontale.

