# Exemples de questions d'examen

Zsolt Patakfalvi

29 décembre 2020

Ce document présente des exemples de questions d'examen, et est un peu plus long que le vrai examen. Finir cette fiche en 3.5 ou 4 heures est plus au moins équivalent à finir l'examen final en 3 heures.

**Informations additionnelles sur l'examen :** La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et les brouillons (fournis par les assistant(e)s), est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire.

Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et d'expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours et en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat.

**Question 1**
Démontrez que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

**Question 2**
Soit $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal, $\xi : G \to {}^{G}/_{H}$ l'homomorphisme quotient et soit $\phi : G \to F$ un homomorphisme tel que $H \subseteq \ker \phi$.

Démontrez qu'il existe un unique homomorphisme $\eta : {}^{G}/_{H} \to F$ tel que le diagramme suivant commute (ce qui signifie $\eta \circ \xi = \phi$) :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\phi"'] & {}^{G}/_{H} \arrow[d, "\eta"] \\ & F \end{tikzcd}$$

**Question 3**
Soient $H, F$ deux groupes et $\phi : F \to \operatorname{Aut}(H)$ un homomorphisme. On écrit $\phi_f = \phi(f)$ pour simplifier la notation. Rappelons que $H \rtimes_\phi F$ est le groupe dont la loi de composition sur l'ensemble $H \times F$ est donnée par la formule suivante, où $(h, f)$ et $\left(\tilde{h}, \tilde{f}\right)$ sont des éléments de l'ensemble $H \times F$ :

$$(h, f) \cdot \left(\tilde{h}, \tilde{f}\right) = \left(h \cdot \phi_f(\tilde{h}), f \cdot \tilde{f}\right) \tag{1}$$

Démontrez que la multiplication de $H \rtimes_\phi F$ est **associative**. Signalez et expliquez les étapes où vous utilisez quelque chose d'autre que la règle (1) verbatim.

**Question 4**
Soit $G$ un groupe abélien d'ordre $p^2$, où $p$ est un nombre premier. Montrez que si $G$ n'est pas cyclique, alors $G \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$.

*Rappel : Il faut justifier vos réponses. Vous pouvez utiliser tout ce qui a été démontré dans le cours et dans les exercices, sauf la question ou une généralisation de la question elle-même.*

**Question 5**
Soit $\sigma \in S_5$ une permutation qui fixe exactement 2 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ la décomposition de $\sigma$ en un produit de cycles disjoints de longueur $\geq 2$.

1. Quelles sont les possibilités pour $r$ et la longueur des $\sigma_i$ ?
2. Combien de telles permutations $\sigma$ existent ?

*Rappel : Il faut justifier votre réponse. Vous pouvez utiliser tout ce qui a été démontré dans le cours et en exercices, sauf la question ou une généralisation de la question elle-même.*

**Question 6**
1. Soit $\sigma \in S_n$ une permutation, et soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ la décomposition de $\sigma$ en un produit de cycles disjoints non-triviaux. Quelle est l'expression générale pour $o(\sigma)$ en terme des longueur des $\sigma_i$ ?

   *Rappel : Il faut justifier votre réponse. Vous pouvez utiliser tout ce qui a été démontré dans le cours et en exercices, sauf la question ou une généralisation de la question elle-même.*
2. Soit $H \leq S_4$ un sous-groupe tel que $|H| = 6$. Démontrez que $H \cong S_3$.

**Question 7**
Rappelons que le groupe des quaternions $Q_8$ contient les 8 éléments suivants :

$$Q_8 = \{e, -e, i, i^3, j, j^3, k, k^3\}$$

et que les relations suivantes sont satisfaites

$$(-e)^2 = e,\ i^2 = j^2 = k^2 = -e,\ ij = k,\ ji = -k,\ jk = i.$$

1. Démontrez qu'il existe un unique sous-groupe $F \leq Q_8$ d'ordre 2, et que pour tout sous-groupe $H \leq Q_8$ d'ordre 4, on a $F \leq H$.
2. Démontrez que $Q_8$ n'est pas isomorphe à un produit semi-direct non-trivial. Cela veut dire qu'on ne peut pas écrire $Q_8 \cong A \rtimes_\alpha B$ pour un homomorphisme $\alpha : B \to \mathrm{Aut}(A)$ où $A$ et $B$ sont des groupes d'ordre $\geq 2$.

**Question 8**
Considérons le sous-groupe $G \leq U(3, \mathbb{F}_2)$ qui contient les matrices de forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où on peut mettre un élément quelconque de $\mathbb{F}_2$ au lieu des étoiles.

Combien y a-t-il d'homomorphismes $D_{10} \to G$ ?

**Question 9**
1. Soit $G$ un groupe quelconque, $H = Z(G)$ le centre de $G$ et $F \leq G$ un sous-groupe. Démontrez que la représentation adjointe $\mathrm{Ad}_F^H$ est triviale, ce qui veut dire que pour tout $f \in F$ on a $\mathrm{Ad}_f^H = \mathrm{id}_H$.
2. Soit $p > 0$ un nombre premier. Montrez que si $G$ est un groupe d'ordre $p^2$, alors $|Z(G)| \neq p$.
3. Est-ce qu'il existe un groupe $G$ d'ordre d'ordre $p^3$ tel que $|Z(G)| = p$ (pour chaque nombre premier $p$) ?