

Exercices Structures Fondamentales

Semaine 9

EPFL, Semestre d'automne 2024

Exercice 1.

Trouvez la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ainsi que des cycles

$$(1\ 3\ 4\ 5) \quad \text{et} \quad (2\ 3\ 1)(6\ 5\ 4).$$

Exercice 2.

Pour $a \in \mathbb{Z}$ on note, $[a]_2$ sa classe en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $[a]_4$ sa classe en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On note $p : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la fonction défini par $p([a]_4) = [a]_2$ et on note $\epsilon : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le signe. Soit $G = \{(\sigma, [a]_4) \in S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \mid \text{sgn}(\sigma) = p([a]_4)\}$.

- Montrer que G est un sous-groupe de $S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- Calculer l'ordre de G et montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'indice 2 dans G . Pour un groupe fini G , l'indice d'un sous-groupe H de G est

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}.$$

Exercice 3 (Classes de conjugaison).

Soit G un groupe.

1. Montrez que pour tout $g \in G$, l'application

$$c_g : G \rightarrow G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

est un automorphisme. On appelle c_g la **conjugaison par g** .

2. Montrez que l'ensemble

$$\{(g, h) \in G \times G \mid \exists f \in G \text{ tel que } g = c_f(h)\} \subset G \times G$$

définit une relation d'équivalence sur G . Les classes d'équivalence sont appelées les **classes de conjugaison** de G .

Exercice* 4 (Classes de conjugaison de S_n). 1. Etablissez la **formule de conjugaison des cycles** : pour $n \geq 1$ et $\sigma \in S_n$, on a

$$\sigma \circ (i_1 \dots i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)).$$

2. En utilisant la formule précédente, montrez que deux permutations $\sigma, \tau \in S_n$ appartiennent à la même classe de conjugaison si et seulement leur décomposition en produit de cycles disjoints sont du même type (c'est-à-dire : pour tout $r \geq 2$, les nombres de r -cycles dans les décompositions de σ et de τ sont égaux).

Exercice 5.

Soit G un groupe fini abélien avec $|G| = 2k$ pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ un nombre impair. Montrer que G a un élément unique d'ordre 2.