

Exercices Structures Fondamentales

Semaine 8

EPFL, Semestre d'automne 2024

Exercice 1. 1. Montrez que $\text{End}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ contient exactement 16 éléments.

2. Montrez que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ contient exactement 6 éléments.

Exercice* 2.

On écrit $Z(G)$ pour le centre d'un groupe G .

1. Soit $f: G \twoheadrightarrow H$ un homomorphisme de groupes surjectif. Montrez que

$$f(Z(G)) \subseteq Z(H).$$

2. Donnez un exemple d'un homomorphisme surjectif $f: G \rightarrow H$ tel que

$$f(Z(G)) \subsetneq Z(H).$$

3. Donnez un exemple d'un homomorphisme $f: G \rightarrow H$ tel que

$$f(Z(G)) \not\subseteq Z(H).$$

4. Soit $f: G \rightarrow H$ injectif et $f(G) \subset Z(H)$. Montrez que G est abélien.

5. Soient G, H deux groupes. Montrez que $Z(G \times H) \cong Z(G) \times Z(H)$.

Exercice 3. 1. Montrez que $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont isomorphes entre eux si et seulement $\text{pgcd}(n, m) = 1$.

Indication : Si $\text{pgcd}(n, m) = 1$, construisez un homomorphisme $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et étudiez ensuite son noyau. Si $\text{pgcd}(n, m) \neq 1$, étudiez les ordres des éléments des deux groupes.

2. ("THÉORÈME DES RESTES CHINOIS".) Soit $n_1, \dots, n_r$ des entiers ≥ 2 et deux-à-deux premiers entre eux. Montrez que

$$\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z} \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}.$$

3. Trouvez les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruences suivants en utilisant le point précédent:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{57} \\ x \equiv 2 \pmod{121} \end{cases}$$

4. Pour rappel, la fonction *phi* d'Euler $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est définie par $\phi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$. Montrez que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ si m et n sont premiers entre eux et déduisez en que

$$\phi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) \dots p_r^{k_r-1}(p_r - 1),$$

où $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ est la factorisation de n en nombres premiers.

Exercice 4.

Montrez que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont tous de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrez que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont donnés par les sous-ensembles

$$d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[rd] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Z}\}$$

où $0 < d \leq n$ divise n .

2. Si $n = dm$, montrez que $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
3. Montrez que $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre (génère) le groupe entier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\text{pgcd}(k, n) = 1$.
4. Déduisez que pour tout $n \geq 2$,

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

Indication : remarquez que chaque élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre un sous-groupe ; et que le nombre d'éléments engendrant ce sous-groupe peut être calculé grâce à la fonction phi d'Euler.