

Exercices Structures Fondamentales

Semaine 7

EPFL, Semestre d'automne 2024

Exercice 1.

Montrez que tous les groupes d'ordre 2 sont isomorphes entre eux.

Exercice 2.

Montrez que tous les groupes d'ordre 3 sont isomorphes entre eux.

Exercice 3.

Montrez que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4. 1. Soit G un groupe. Construisez une bijection explicite entre $\{\text{homomorphismes } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow G\}$ et $\{g \in G \mid g^2 = e_G\}$.

2. Montrez que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice* 5.

Soit G un groupe. Pour $s \in G$, définissons $L_s : G \rightarrow G$ par $L_s(t) = st$ pour tout $t \in G$ (L_s est donc la multiplication à gauche, aussi appelée **translation à gauche** par s).

1. Soit $\text{Bij}(G)$ l'ensemble de toutes les bijections de G sur lui-même, c'est-à-dire, toutes les permutations de G . Montrez que pour tout $s \in G$, $L_s \in \text{Bij}(G)$.

2. Montrez que l'application

$$\Lambda : G \rightarrow \text{Bij}(G), \quad s \mapsto L_s$$

est un homomorphisme de groupes.

3. Montrez que Λ est injective.

Exercice 6.

Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On rappelle que $\text{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est égal à

$$\{m_d : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid 0 \leq d < n\}$$

où m_d désigne l'application de la multiplication par d . On a aussi une bijection $\theta : \text{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par

$$\theta(f) = f([1])$$

pour tout $f \in \text{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Montrez que θ induit un isomorphisme de groupes $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.