

# Exercices structures algébriques

## Semaine 2

EPFL, Semestre d'automne 2024

### Exercice\* 1.

Soient  $f: A \rightarrow B$  et  $g: B \rightarrow C$  des applications entre ensembles.

- En supposant que les applications  $f$  et  $g$  sont toutes deux surjectives, montrer que la composition  $g \circ f: A \rightarrow C$  est surjective.
- En supposant que la composition  $g \circ f$  est surjective, montrer que  $g$  est surjective.

### Exercice\* 2.

Soient  $A, B$  et  $C$  trois ensembles, tels que  $A \cup B = A \cup C$  et  $A \cap B = A \cap C$ . Montrer que  $B = C$ .

### Exercice 3.

Soient  $A, B$  deux ensembles,  $f: A \rightarrow B$  une application, et définissons  $\Phi: 2^A \rightarrow 2^B$  de la manière suivante : pour tout  $E \in 2^A$  (i.e.  $E \subseteq A$ ),

$$\Phi(E) = f(E)$$

où on définit  $f(E) = \{f(e), e \in E\}$ . Montrer que

$$\Phi \text{ est injective} \iff f \text{ est injective.}$$

### Exercice 4.

Soient  $A, B$  deux ensembles,  $f: A \rightarrow B$  une application, et  $E, F \in 2^A$ .

1. Montrer que  $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$ .
2. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Montrer qu'on a égalité si  $f$  est injective.

### Exercice 5.

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

1. Combien d'éléments possède l'ensemble produit  $A \times B$  ?
2. Combien y a-t-il de fonctions  $A \rightarrow B$  ?
3. Combien y a-t-il de fonctions injectives  $A \hookrightarrow B$  ?