Exercices structures algébriques
Semaine 1

EPFL, Semestre d'automne 2024

Les exercices marqués par un * peuvent être rendus jusqu'à la fin de la session d'exercices.

Exercice 1.
Soient P, Q, R des expressions logiques. Démontrer les tautologies suivantes :

1. L'énoncé
$$P \wedge \neg P \Rightarrow Q$$
2. La règle de double négation, c'est-à-dire l'implication
$$\neg\neg P \Rightarrow P$$
3. Le modus ponens, c'est-à-dire l'implication
$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$$
4. L'énoncé
$$\neg(P \Rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q$$
5. * L'énoncé
$$(P \wedge (Q \vee R)) \iff ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

Exercice* 2.
Démontrer par induction (=recurrence) pour tout entier $n \geq 1$ la formule
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3.
Trouver l'erreur dans la preuve de l'énoncé suivant :

Proposition.
Tous les chevaux d'un groupe de $n \geq 1$ chevaux sont de la même couleur.

Démonstration. $\mathbf{n = 1}$: Tous les chevaux d'un groupe de $n = 1$ chevaux sont de la même couleur, car il n'y a qu'un seul cheval.
$\mathbf{n \to n + 1}$: Supposons que tous les chevaux d'un groupe de n chevaux sont de la même couleur. Considérons maintenant un groupe de $n + 1$ chevaux $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n, h_{n+1}$. Notez que les chevaux $h_1, h_2, \ldots, h_n$ forment un groupe de n chevaux, et donc, doivent tous être de la même couleur. Aussi, les chevaux $h_2, h_3, \ldots, h_{n+1}$ forment un groupe de n chevaux, et donc, doivent tous être de la même couleur. Puisque ces deux groupes de chevaux ont les membres $h_2, h_3, \ldots, h_n$ en commun, tous les $n + 1$ chevaux doivent être de la même couleur. $\square$

Exercice 4.
Un entier positif p est un nombre premier s'il est divisible par exactement deux entiers positifs distincts (1 et lui-même). Montrer par induction que tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k,$$

et que les nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$ sont uniques quitte à les réordonner.

Exercice 5 (Exercice difficile)**.**
Soient $a_1, a_2, a_3 \ldots$ des nombres réels tels que pour tout entiers positifs i, j on a $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Démontrer par induction pour tout entier $n \geq 1$ l'inéquation

$$a_n \leq a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}.$$