Exercices structures fondamentales
Semaine 13

EPFL, Semestre d'automne 2024

Exercice 1.
Montrez que le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_{>0}$ n'est pas de type fini.

Exercice 2.
Soit $n \geq 3$.

1. Montrez que S_n est engendré par les transpositions
$$(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n).$$
Indication : il suffit de montrer que le sous-groupe engendré par ces transpostions contient toutes les transpositions de S_n.

2. Montrez que S_n est engendré par $(1\ 2)$ et $(2\ 3\ \ldots\ n)$.

3. Soit $H \leq S_n$ un sous-groupe engendré par 2 transpositions distinctes. Montrez que soit $H \cong S_3$, soit $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3.
Soit $n \geq 3$. Montrez que A_n est engendré par des 3-cycles.

Exercice 4.
Rappelez-vous la définition pour $n \geq 3$:

$$D_{2n} = \{\sigma \in S_n \,|\, \forall 1 \leq i, j \leq n\ :\ [i], [j] \text{ adjacent dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow [\sigma(i)], [\sigma(j)] \text{ adjacent dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $D_{2n} < S_n$.

2. Soit $\sigma, \tau \in D_{2n}$ comme dans le cours et considérons l'ensemble $S = \{\sigma^i, \sigma^i\tau \mid 0 \leq i \leq n-1\}$. Montrer que $|S| = 2n$.

3. Quels sont les ordres des éléments de D_{2n} ?

Exercice 5.
Fixons un entier $n \geq 3$.

1. Prouvez les relations suivantes :
   (a) $\tau\sigma^i\tau = \sigma^{-i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$;
   (b) $(\tau\sigma^j)^{-1}\sigma^i(\tau\sigma^j) = \sigma^{-i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$;
   (c) $(\tau\sigma^j)^{-1}\tau\sigma^i(\tau\sigma^j) = \tau\sigma^{2j-i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.
   (d) $(\sigma^j)^{-1}\tau\sigma^i(\sigma^j) = \tau\sigma^{2j+i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminez les classes de conjugaison de D_{2n}.
   Indication : elles seront différentes suivant la parité de n.
3. Déterminez le centre de D_{2n}.
4. Montrer que $\langle\sigma\rangle \leq D_{2n}$ est normal et montrer que $D_{2n}/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice* 6 (Troisième théorème d'isomorphisme)**.**
Soit $M \lhd G, N \lhd G$ et $M < N$.

1. Montrer que $M \lhd N$ et $N/M \lhd G/M$.
2. Montrer que
$$(G/M)/(N/M) \cong G/N$$