Exercices Structures Fondamentales
Semaine 10

EPFL, Semestre d'automne 2024

Exercice 1. 1. Trouvez tous les sous-groupes distincts de S_3 et de A_4 qui sont engendrés par un élément.

2. On dit qu'un groupe est **cyclique** s'il est généré par un seul élément. Montrez que chaque sous-groupe propre de S_3 est cyclique.

Exercice 2. 1. Soit G un groupe. Montrez que le centre $Z(G)$ est égal à l'union des classes de conjugaison qui sont des singletons.

2. Montrez que $Z(S_2) = S_2$ et que $Z(S_n) = \{e\}$ pour tout $n \geq 3$.
Indication : étant donné $\sigma \in S_n$, construisez une transposition qui ne commute pas avec σ.

3. Montrez que $Z(A_3) = A_3$ et que $Z(A_n) = \{e\}$ pour $n \geq 4$.
Indication : étant donné $\sigma \in A_n$, construisez un 3-cycle qui ne commute pas avec σ.

Exercice* 3.
Soit G un groupe et $H < G$ un sous-groupe, et $K < H$ un sous-groupe de H.

1. Montrer que $K < G$.

2. Montrer que si $[G : H], [H : K] < \infty$ alors $[G : K] = [G : H][H : K]$.

Exercice 4 (Sous-groupes de A_4)**.**
Dans cet exercice, nous allons identifier tous les sous-groupes de A_4.

1. Soit $\sigma \in S_4$. Montrez que la conjugaison par σ induit un isomorphisme de A_4.

2. Montrez que le sous-ensemble $\{\sigma \in A_4 \mid \sigma^2 = e\}$ est un sous-groupe d'ordre 4 de A_4.

3. Si $H \leq A_4$ est un sous-groupe qui contient un produit de 2-cycles disjoints ainsi qu'un 3-cycle, montrez que $H = A_4$.
   Indication : on peut supposer que le produits de 2*-cycles disjoints de* H *est* $(12)(34)$*. Montrez que si* $H \neq A_4$*, alors* H *est d'ordre* 6*, et dériver une contradiction en montrant que* H *contient au moins* 3 *éléments d'ordre* 3.

4. Si $H \leq A_4$ est un sous-groupe qui contient deux 3-cycles qui ne fixent pas le même élément, montrez que $H = A_4$.
   Indication : par l'absurde, en utilisant Lagrange, montrez que nécessairement $|H| = 3$*, et dérivez une contradiction.*

5. Faites la liste des sous-groupes de A_4.

Exercice 5.
Soit G un groupe et $H < G$ un sous-groupe. On aimerait définir un produit sur l'ensemble des classes à gauche $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ par l'application

$$* : G/H \times G/H \to G/H, \quad (gH, g'H) \mapsto gg'H.$$

Est-ce que cette application est bien définie? Si oui, donnez une preuve, si non, donnez un contre-exemple.