Série 14 (Corrigé)

Exercice 1

Les valeurs singulières non nulles de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

sont

☐ 4 et 36 ☐ $\sqrt{2}$ et 2

☐ 2 et 6 ☐ 2 et 4

Solution : *Les valeurs singulières sont* 2 *et* 6*.*

Exercice 2

Trouver la décomposition SVD de la matrice suivante

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution : *Les valeurs singulières de A sont $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{1} = 1$. Donc la matrice Σ est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres associés sont chacune des valeurs propres de $A.A^T$ sont

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc la matrice V est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour connaître la matrice U, on calcule $A.v_1$ et $A.v_2$, puis on divise par les valeurs singulières. On obtient donc U égal à

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément alors que $A = U.\Sigma.V^T$.

Exercice 3

(a) Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que le rang de AA^T est égal au rang de A.

(b) Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m > n$. Montrer que AA^T n'est pas inversible.

Solution :

(a) Méthode 1 : on peut montrer que $\mathrm{Col}(A) = Im(T_A) = Im(T_{AA^T}) = \mathrm{Col}(AA^T)$ *; dès lors,* $rg(A) = rg(AA^T)$*. On vérifie que* $\mathrm{Col}(A) \supseteq \mathrm{Col}(AA^T)$*. En effet si* $y \in \mathbb{R}^m$ *s'écrit* AA^Tx *pour un certain* $x \in \mathbb{R}^m$*, alors* $y = A(A^Tx) \in \mathrm{Col}(A)$*. Réciproquement, montrons que* $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathrm{Col}(AA^T)$ *: si* $y \in \mathrm{Col}(A)$*, alors il existe* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $y = Ax$*. On cherche* $z \in \mathbb{R}^m$ *tel que* $y = Ax = AA^Tz$*. L'équation* $AA^Tz = Ax$ *est l'équation normale associée à l'équation linéaire* $A^Tz = x$*. Elle admet donc toujours une solution* z *telle que* $y = Ax = AA^Tz$*. On en déduit que* $\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathrm{Col}(AA^T)$*, d'où* $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^T)$*.*

Méthode 2 : on peut montrer que $\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Ker}(AA^T)$*. Dès lors, d'après le théorème du rang :*

$$m = dim(\mathrm{Ker}(A^T)) + rg(A^T)$$

$$m = dim(\mathrm{Ker}(AA^T)) + rg(AA^T)$$

Comme $rg(A) = rg(A^T)$*, on en déduit que* $rg(A) = rg(AA^T)$*. On vérifie que* $\mathrm{Ker}(A^T) \subseteq \mathrm{Ker}(AA^T)$*. En effet, si* $x \in \mathbb{R}^m$ *vérifie* $A^Tx = 0$*, alors* $AA^Tx = 0$*. Réciproquement, montrons que* $\mathrm{Ker}(A^T) \supseteq \mathrm{Ker}(AA^T)$*. Si* $AA^Tx = 0$*, alors* $(A^Tx).(A^Tx) = x^TAA^Tx = 0$*, donc* $A^Tx = 0$*, par définie positivité du produit scalaire. On en déduit que* $\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Ker}(AA^T)$*.*

(b) Si $m > n$*, alors* $rg(A) \leq n < m$ *(on peut voir l'inégalité* $rg(A) \leq n$ *comme une conséquence du théorème du rang, ou plus simplement, observer que* $Col(A)$ *est engendré par* n *vecteurs). Donc* $rg(AA^T) = rg(A) < m$*. Comme* AA^T *est carrée de taille* m*, on en déduit que* AA^T *n'est pas inversible.*

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

Solution : *On a* $A = U\Sigma V^T$ *avec* U, V *des matrices orthogonales de taille* $n \times n$ *et* Σ *la matrice diagonale des valeurs singulières. On a* $\det(A) = \det(U)\det(\Sigma)\det(V)$*, avec* $\det(U) \neq 0$ *et* $\det(V) \neq 0$ *(car* U *et* V *sont inversibles), ainsi*

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et A *est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.*

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Solution :

On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

Exercice 5

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Et soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières (U est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et V une matrice orthogonale de taille $n \times n$). Montrer que les matrices U et V ne sont pas uniques en général mais que la matrice Σ est unique.

Solution :

Les $\min(m, n)$ valeurs singulières sont les racines carrées de valeurs propres de la matrice A^TA de taille $n \times n$, elles sont donc uniques. Comme Σ est la matrice diagonale (de taille $m \times n$) des valeurs singulières ordonnées par ordre décroissant, cette matrice est unique.

Les matrices U et V ne sont pas uniques. En effet, on peut toujours multiplier U et V par -1 :

$$A = (-U)\Sigma(-V)^T,$$

ce qui donne une autre décomposition.

Exercice 6

Trouver la décomposition SVD de la matrice suivante

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Solution : *Les valeurs singulières de A sont $\sqrt{360} = 6.\sqrt{10}$, $\sqrt{90} = 3.\sqrt{10}$ et 0. Donc la matrice Σ est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} 6.\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3.\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres associés sont chacune des valeurs propres de $A.A^T$ sont

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad v_2 := \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad v_3 := \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

donc la matrice V est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour connaître la matrice U, on calcule $A.v_1$ et $A.v_2$, puis on divise par les valeurs singulières. On obtient donc U égal à

$$\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

On vérifie moins aisément cette fois que $A = U.\Sigma.V^T$.

Partiellement en classe mardi

Exercice 7

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite en calculer une décomposition en valeurs singluières.
Solution :

La matrice A est 2×4, donc elle a 4 valeurs singulières. 2 d'entre eux sont surement nuls, les deux autres sont les mêmes que ceux de A^T. On peut calculer ces dernier en calculant les valeurs propres de AA^T qui est une matrice 2×2, ce qui est plus rapide que de calculer ceux de A^TA :

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \to \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(5-\lambda)$$

Donc les valeurs singulières de A^T sont $\sqrt{7}$ et $\sqrt{5}$ et ceux de A sont $\sqrt{7}, \sqrt{5}, 0$ et 0.

Si $A = U\Sigma V^T$ est une décomposition SVD de A, alors $A^T = V\Sigma^T U^T$ est une décomposition en valeurs singulières de $B = A^T$ et viceversa. On va plutot calculer cette dernière

***Calculer une orthodiagonalisation de** B^TB, $B^TB = UDU^T$ avec*

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On cherche une base de $\ker(B^TB - 7I)$ ainsi que de $\ker(B^TB - 5I)$ et on trouve, qu'il faut encore normaliser et mettre dans U :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ normalisés dans } U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calculer l'image de u_1 ***et*** u_2 ***(les colonnes de*** U ***par rapport à*** $B = A^T$***, ainsi que les normaliser***

$$Bu_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \; et \; Bu_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \; dont\ les\ normes\ sont\ \sqrt{7}\ et\ \sqrt{5}$$

Ces vecteurs, une fois normalisés, seront les premières deux colonnes de V *:*

$$V = \begin{pmatrix} 1\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \\ 3\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \\ 2\sqrt{14} & -2/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \\ 0 & 2/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Il faut trouver les deux dernières colonnes de V ***en complétant en base orthonormée****. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt au vecteurs* v_1, v_2, e_1, e_2*, où ces derniers sont les premiers deux vecteurs de base canoniques. Si on devait trouver un complément orthogonal nul, on rajouterait encore* e_3 *et* e_4*.*

$$w_3 = e_1 - v_1 \cdot e_1 \, v_1 - v_2 \cdot e_1 \, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/35 \\ -11/35 \\ 2/35 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

et

$$v_3 = \frac{1}{||w_3||} w_3 = \begin{pmatrix} 29/\sqrt{1015} \\ -11/\sqrt{1015} \\ 2/\sqrt{1015} \\ -7/\sqrt{1015} \end{pmatrix}$$

$$w_4 = e_2 - v_1 \cdot e_2 \, v_1 - v_2 \cdot e_2 \, v_2 - v_3 \cdot e_2 \, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/29 \\ -6/29 \\ -8/29 \end{pmatrix} \; et \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/\sqrt{116} \\ -6/\sqrt{116} \\ -8/\sqrt{116} \end{pmatrix}$$

Donc

$$V = \begin{pmatrix} 1\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & 29/\sqrt{1015} & 0 \\ 3\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & -11/\sqrt{1015} & 4/\sqrt{116} \\ 2\sqrt{14} & -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{1015} & -6/\sqrt{116} \\ 0 & 2/\sqrt{10} & -7/\sqrt{1015} & -8/\sqrt{116} \end{pmatrix}$$

La matrice Σ *a la même taille de* A *et est*

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soit A une matrice et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^T A$, tels que

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

- d'abord déduisez le tailles des matrices A, U, Σ et V ;
- normalisez les vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$, on obtient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$;
- calculez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$;
- calculez les valeurs singulières et définissez Σ ;
- complétez $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
- définissez V en utilisant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$;
- normalisez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$ et utilisez-les pour définir U.

Solution : *On remarque d'abord que, vu que* $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^4$ *pour* $i = 1, 2$ *et le produit matriciel* $A\mathbf{w}_i$ *est bien défini,* A *possède* 4 *colonnes. En outre, vu que* $A\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^2$ *pour* $i = 1, 2,$ *on voit que* A *possède* 2 *lignes. Par conséquent,* $A \in \mathbb{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, *ce qui implique que* $\Sigma \in \mathbb{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $U \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *et* $V \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

On calcule d'abord la matrice $\Sigma \in \mathbb{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$. *On remarque que* $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$, *et que* $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{3}$. *Comme* $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^4$ *pour* $i = 1, 2$ *ne sont pas des vecteur propres normalisés de* A^TA, *on définit d'abord*

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \textit{et}\ \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$ *pour* $i = 1, 2$ *sont des vecteur propres normalisés de* A^TA. *En plus,*

$$\|A\mathbf{v}_1\| = \left\|\frac{A\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|A\mathbf{w}_1\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$
$$\|A\mathbf{v}_2\| = \left\|\frac{A\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}\right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\|A\mathbf{w}_2\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

En conséquence, A *possède les valeur singulières,* $\sigma_1 = \sqrt{5}/\sqrt{2}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{5}/\sqrt{3}$, *avec* $\sigma_1 > \sigma_2$, *et donc*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va calculer maintenant la matrice orthogonale $V \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. *On sait que les deux premières colonnes de* V *sont les vecteurs propres* $\mathbf{v}_1$ *et* $\mathbf{v}_2$ *normalisés de* A^TA. *Par ailleurs, comme le deux dernières colonnes de* Σ *son nulles, le produit* ΣV^T *dans la décomposition en valeurs singulières* $A = U\Sigma V^T$ *de* A *est indépendant des valeurs précises de deux dernières colonnes de* V. *En conséquence, il suffit de compléter* $\mathbf{v}_1$ *et* $\mathbf{v}_2$ *en une base orthonormée* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^4$ *et définir*

$$V = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3\, \mathbf{v}_4].$$

Pour le faire, on calcule d'abord une base du complément orthogonale $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}^\perp = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}^\perp$, *qui est donc donné par le noyau de la matrice*

$$[\mathbf{w}_1\, \mathbf{w}_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la forme échelonnée réduite est obtenue de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} : x_1 = x_2 = -x_3/2\right\}$$

$$= \left\{x_3\begin{pmatrix}-1/2\\ -1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-1/2\\ -1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\},$$

ce qui nous donne la base

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

de $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}^{\perp}$. *Si l'on normalise la base précédente on trouve une base orthonormée* $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ *de* $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}^{\perp}$ *donnée par*

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ -2/\sqrt{6}\\ 0\end{pmatrix} \ \textit{et } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

On conclut que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^4$. *On définit donc la matrice orthogonale*

$$V = [\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3\,\mathbf{v}_4] = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On va finalement calculer la matrice orthogonale $U = [\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2] \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Pour le faire on utilise les identités*

$$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\sigma_i}$$

pour $i = 1, 2$, *vu que* $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$. *On trouve ainsi*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{A\mathbf{v}_1}{\sigma_1} = \frac{A\mathbf{w}_1}{\sigma_1\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{A\mathbf{v}_2}{\sigma_2} = \frac{A\mathbf{w}_2}{\sigma_2\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$U = [\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

En conclusion, on a

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Exercice 12

Parmi les affirmation suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

1. Soit A une matrice. Alors AA^T et A^TA ont les mêmes valeurs singulières.
2. Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur singulière de A.
3. Soit A une matrice carrée. Alors toutes les valeurs propres de A sont aussi des valeurs singulières de A.
4. Soit A une matrice et soit $A = U\Sigma V^T$ une SVD de A. Alors $V\Sigma U^T$ est une SVD de A^T.
5. Soit A une matrice de taille 3×3 avec valeurs singulières $1, 3$ et 5. Alors le déterminant de A est 15.

Solution :

1. *Faux. Il faut déjà remarquer qu'on ne parle pas ici des valeurs singulieres de A. Ensuite, si A est $m \times n$, alors AA^T est $m \times m$ et elle possède m valeurs singulières et A^TA est $n \times n$ avec n valeurs singulières. Donc elles peuvent pas être les mêmes. Par contre, elles ont les mêmes valeurs singulière non-nulles.*
2. *Vrai. Si A est carrèes, alors les valeurs singulières sont les modules des valeurs propres de A dans l'ordre décroissants. On sait que A est inversible ssi zèro n'est pas valeur propres de A et, donc, ssi zèro n'est pas valeur singulière de A.*
3. *Faux. Si A est carrèes, alors les valeurs singulières sont les modules des valeurs propres de A dans l'ordre décroissants.*
4. *Faux.* $A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T$. *Si A est $m \times n$, alors Σ aussi et Σ^T est $n \times m$. Donc $\Sigma^T \neq \Sigma$ dans le cas où A n'est pas carrée.*
5. *Faux. Par exemple, la matrice diagonale D avec* $-1, 3, 5$ *sur la diagonale a déterminant égale à* -15 *et valeurs singulières* $1, 3$ *et* 5.

Partiellement en classe jeudi (ancien examen)

Ces exercices seront fait en classe mardi et jeudi : la première heure vous travaillerez seuls, la deuxième heure je fais passer en revue les exercices.

La factorisation LU (exercice 4), n'est pas au programme en 2023. Vous pouvez à la place essayer de calculer la factorisation QR de la matrice.

Exercice 13

Pour quels nombres réels b est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0 ?

- ☒ 0 et 1
- ☐ aucun
- ☐ 0 et −1
- ☐ −1 et 1

Exercice 14

On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille 3×3 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit h un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- ☐ si et seulement si $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$ et $h \neq 1/2$.
- ☐ si et seulement si $h \neq 1/2$ et $h \neq 1/3$.
- ☐ pour toute valeur réelle de h.
- ☒ si et seulement si $h \neq 2$ et $h \neq -2$.

Exercice 15

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{12} de B est égal à

- ☐ $-\frac{2}{3}$.
- ☒ $\frac{1}{9}$.
- ☐ $-\frac{1}{9}$.
- ☐ $\frac{1}{3}$.

Exercice 16

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$ est une factorisation LU de A (L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément l_{32} de L est

☐ $1/2$.
☐ $-3/2$.
☐ $3/2$.
☒ 3.

Exercice 17

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfait

☐ $\widehat{x}_2 = -35/6$.
☐ $\widehat{x}_2 = 41/6$.
☒ $\widehat{x}_2 = -5/6$.
☐ $\widehat{x}_2 = 1/6$.

Exercice 18

La dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ tels que } v_4 = 0 \right\}$$

est

☐ 4.
☐ 3.
☐ 1.
☒ 2.

Exercice 19

Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ l'application linéaire définie par $T\big(p(t)\big) = (t+1)p(t)$. Alors la matrice de T dans les bases $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ et $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20

Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien et le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V est

- ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.
- ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} 255 \\ 396 \\ 375 \end{pmatrix}$.

Exercice 21

Soit un paramètre $b \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme $q(t) = bt - t^2$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ engendré par $p_1(t) = 1 + t + t^2$ et $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$ lorsque

- ☐ $b = 1$.
- ☐ $b = -1$.
- ☐ $b = -3$.
- ☒ $b = 3$.

Exercice 22

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

possède une infinité de solutions

- ☒ pour $h = -2$, $h = 0$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -2$, $h = 1$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -1$, $h = 0$ et $h = 1$.
- ☐ pour $h = -1$, $h = -1/2$ et $h = 1/2$.

Exercice 23

Soit A une matrice de taille 4×5 telle que l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible} \right\} ?$$

☐ 0
☐ 1
☐ 2
☒ 3

Exercice 24

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2$.
☐ $\dim(\operatorname{Ker} A) \neq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) \neq 2$.
☐ $\dim(\operatorname{Ker} A) \neq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2$.
☒ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) \neq 2$.

Exercice 25

Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de T dans les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.
☐ $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
☐ $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 6 \\ 10 & -7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
☒ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 26

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

☐ -2 et 3.
☐ 3 et 4.
☐ -5, -1 et 1.
☒ -2 et 7.

Exercice 27

Quel énoncé est vrai pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$?

☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au plus une solution.
☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution.
☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au plus une solution au sens des moindres carrés.
☒ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.

Exercice 28

Soit $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_4$ une application linéaire. Si le rang de T est égal à 4, alors l'ensemble $\{T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), T(2\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4), T(\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1)\}$

☐ est une base de $\mathbb{P}_4$.
☐ n'est pas linéairement indépendante.
☐ ne peut pas être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.
☒ peut être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.

Exercice 29

Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$. Alors

☐ AB est toujours diagonalisable.
☐ AB n'est jamais diagonalisable.
☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres.
☒ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 30

Soient $m \geq 2$, A une matrice de taille $m \times (m-1)$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ peut être

☒ l'ensemble vide.
☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension 1.
☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension $m-2$.
☐ égal à $\mathbb{R}^{m-1}$.

Exercice 31

Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles A et B de taille $n \times n$?

- ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- ☐ $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$
- ☐ $(2A)^{-1} = 2^{-n}A^{-1}$
- ☒ $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$

Exercice 32

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations

(a) $\det A = 1$ (b) $AA^T = I_3$ (c) $A^3 = I_3$

lesquelles sont vraies ?

- ☐ seulement (a) et (c)
- ☐ seulement (b)
- ☐ seulement (a) et (b)
- ☒ (a), (b) et (c)

Exercice 33

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- ☐ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- ☐ $\det A = -4$
- ☐ A est une matrice de changement de base
- ☒ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

Exercice 34

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \mathrm{Col}(U)$. Soit proj_W la projection orthogonale sur W. Alors, pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- ☐ $U^TU\mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $UU^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- ☐ $U^TU\mathbf{x} = \mathrm{proj}_W\mathbf{x}$ et $UU^T\mathbf{y} = \mathrm{proj}_W\mathbf{y}$.
- ☐ $U^TU\mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $UU^T\mathbf{y} = \mathbf{y}$.
- ☒ $U^TU\mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $UU^T\mathbf{y} = \mathrm{proj}_W\mathbf{y}$.

Exercice 35

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R}\right\}$

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R}\right\}$

(e) $\left\{\begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R}\right\}$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- ☐ tous sauf (d)
- ☐ tous sauf (b)
- ☐ seulement (c) et (e)
- ☒ seulement (a), (c) et (e)

Exercice 36

Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ semblables. Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai ?

- ☐ Les polynômes caractéristiques de A et de B sont les mêmes.
- ☐ A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
- ☐ Les rangs de A et de B sont les mêmes.
- ☒ A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.