

Série 14

Exercice 1

Les valeurs singulières non nulles de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

sont

$$\square \quad 4 \quad \text{et} \quad 36 \qquad \square \quad \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 2$$

$$\square \quad 2 \quad \text{et} \quad 6 \qquad \square \quad 2 \quad \text{et} \quad 4$$

Exercice 2

Trouver la décomposition SVD de la matrice suivante

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

- (a) Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que le rang de AA^T est égal au rang de A .
- (b) Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m > n$. Montrer que AA^T n'est pas inversible.

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

- i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.
- ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A , donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1} .

Exercice 5

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Et soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières (U est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et V une matrice orthogonale de taille $n \times n$). Montrer que les matrices U et V ne sont pas uniques en général mais que la matrice Σ est unique.

Exercice 6

Trouver la décomposition SVD de la matrice suivante

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Partiellement en classe mardi**Exercice 7**

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soit A une matrice et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^T A$, tels que

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

- d'abord déduisez les tailles des matrices A, U, Σ et V ;
- normalisez les vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$, on obtient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$;
- calculez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$;
- calculez les valeurs singulières et définissez Σ ;
- complétez $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
- définissez V en utilisant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$;
- normalisez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$ et utilisez-les pour définir U .

Exercice 12

Parmi les affirmation suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

1. Soit A une matrice. Alors AA^T et $A^T A$ ont les mêmes valeurs singulières.
2. Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur singulière de A .
3. Soit A une matrice carrée. Alors toutes les valeurs propres de A sont aussi des valeurs singulières de A .
4. Soit A une matrice et soit $A = U\Sigma V^T$ une SVD de A . Alors $V\Sigma U^T$ est une SVD de A^T .
5. Soit A une matrice de taille 3×3 avec valeurs singulières 1, 3 et 5. Alors le déterminant de A est 15.

Partiellement en classe jeudi (ancien examen)

Ces exercices seront fait en classe mardi et jeudi : la première heure vous travaillerez seuls, la deuxième heure je fais passer en revue les exercices.

La factorisation LU (exercice 4), n'est pas au programme en 2023. Vous pouvez à la place essayer de calculer la factorisation QR de la matrice.

Exercice 13

Pour quels nombres réels b est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0 ?

- ☐ 0 et 1
- ☐ aucun
- ☐ 0 et -1
- ☐ -1 et 1

Exercice 14

On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille 3×3 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit h un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- ☐ si et seulement si $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$ et $h \neq 1/2$.
- ☐ si et seulement si $h \neq 1/2$ et $h \neq 1/3$.
- ☐ pour toute valeur réelle de h .
- ☐ si et seulement si $h \neq 2$ et $h \neq -2$.

Exercice 15

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{12} de B est égal à

- ☐ $-\frac{2}{3}$.
- ☐ $\frac{1}{9}$.
- ☐ $-\frac{1}{9}$.
- ☐ $\frac{1}{3}$.

Exercice 16

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$ est une factorisation LU de A (L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément l_{32} de L est

- ☐ 1/2.
- ☐ -3/2.
- ☐ 3/2.
- ☐ 3.

Exercice 17

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés

$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfait

- ☐ $\hat{x}_2 = -35/6$.
- ☐ $\hat{x}_2 = 41/6$.
- ☐ $\hat{x}_2 = -5/6$.
- ☐ $\hat{x}_2 = 1/6$.

Exercice 18

La dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ tels que } v_4 = 0 \right\}$$

est

- ☐ 4.
- ☐ 3.
- ☐ 1.
- ☐ 2.

Exercice 19

Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application linéaire définie par $T(p(t)) = (t+1)p(t)$. Alors la matrice de T dans les bases $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ et $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ est

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20

Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien et le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V est

$$\square \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 255 \\ 396 \\ 375 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21

Soit un paramètre $b \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme $q(t) = bt - t^2$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ engendré par $p_1(t) = 1 + t + t^2$ et $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$ lorsque

$$\square \quad b = 1.$$

$$\square \quad b = -1.$$

$$\square \quad b = -3.$$

$$\square \quad b = 3.$$

Exercice 22

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

possède une infinité de solutions

- ☐ pour $h = -2, h = 0$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -2, h = 1$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -1, h = 0$ et $h = 1$.
- ☐ pour $h = -1, h = -1/2$ et $h = 1/2$.

Exercice 23

Soit A une matrice de taille 4×5 telle que l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible}\} ?$$

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

Exercice 24

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et $\dim(\text{Ker } B) = 2$.
- ☐ $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$ et $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$.
- ☐ $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$ et $\dim(\text{Ker } B) = 2$.
- ☐ $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$.

Exercice 25

Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de T dans les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 6 \\ 10 & -7 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}.$

Exercice 26

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ☐ -2 et 3 .
- ☐ 3 et 4 .
- ☐ -5 , -1 et 1 .
- ☐ -2 et 7 .

Exercice 27

Quel énoncé est vrai pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$?

- ☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au plus une solution.
- ☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution.
- ☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au plus une solution au sens des moindres carrés.
- ☐ L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.

Exercice 28

Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_4$ une application linéaire. Si le rang de T est égal à 4, alors l'ensemble $\{T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), T(2\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4), T(\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1)\}$

- ☐ est une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ n'est pas linéairement indépendante.
- ☐ ne peut pas être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ peut être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.

Exercice 29

Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$. Alors

- ☐ AB est toujours diagonalisable.
- ☐ AB n'est jamais diagonalisable.
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres.
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 30

Soient $m \geq 2$, A une matrice de taille $m \times (m-1)$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ peut être

- ☐ l'ensemble vide.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension 1.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension $m-2$.
- ☐ égal à $\mathbb{R}^{m-1}$.

Exercice 31

Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles A et B de taille $n \times n$?

- ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- ☐ $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$
- ☐ $(2A)^{-1} = 2^{-n}A^{-1}$
- ☐ $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$

Exercice 32

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations

- (a) $\det A = 1$ (b) $AA^T = I_3$ (c) $A^3 = I_3$

lesquelles sont vraies ?

- ☐ seulement (a) et (c)
- ☐ seulement (b)
- ☐ seulement (a) et (b)
- ☐ (a), (b) et (c)

Exercice 33

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- ☐ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- ☐ $\det A = -4$
- ☐ A est une matrice de changement de base
- ☐ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

Exercice 34

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Soit proj_W la projection orthogonale sur W . Alors, pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- ☐ $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- ☐ $U^T U \mathbf{x} = \text{proj}_W \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \text{proj}_W \mathbf{y}$.

- ☐ $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \mathbf{y}$.
☐ $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \text{proj}_W \mathbf{y}$.

Exercice 35

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$
 (b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$ (e) $\left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$
 (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- ☐ tous sauf (d)
☐ tous sauf (b)
☐ seulement (c) et (e)
☐ seulement (a), (c) et (e)

Exercice 36

Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ semblables. Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai ?

- ☐ Les polynômes caractéristiques de A et de B sont les mêmes.
☐ A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
☐ Les rangs de A et de B sont les mêmes.
☐ A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
 Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.