

Série 12 (Corrigé)

Exercice 1

Soient les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$.

Solution : Soit $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. La meilleure approximation $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$ de $\mathbf{v}$ correspond à la projection orthogonale $\mathbf{p}_W(\mathbf{v})$. **Attention**, ici $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ ne sont pas orthogonaux ($\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \neq 0$).

Méthode 1 : La projection orthogonale est déterminée par $\mathbf{w} \in W$ et $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^\perp$:

$$\begin{cases} (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}_1 = 0 \\ (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 \\ \alpha\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \beta\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

La solution est $\alpha = -1/2$, $\beta = 4/3$. Par conséquent, $\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On doit trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}$ sous la forme $A\mathbf{x}$, où $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. L'équation normale pour la solution au sens des moindres carrés de $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ est

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

On conclut comme dans la méthode 1.

Méthode 3 : On applique la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la famille

$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. On pose $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. La famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forme alors une base orthogonale de W . On a ainsi $\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ ne sont pas orthogonaux, cette méthode ne permet pas directement de trouver les coefficients α et β , il faut résoudre le système supplémentaire $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$. On retrouve le même résultat.

b) Calculer la distance entre $\mathbf{v}$ et $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Solution : $\|\mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v})\| = \left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Soient maintenant les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$.

Solution : On pose à nouveau $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. On remarque que les vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont orthogonaux. On peut ainsi facilement calculer la projection orthogonale.

$\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$. Puisque les vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont ici orthogonaux, le calcul de la projection orthogonale fournit directement les coefficients α et β . On trouve $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$.

d) Calculer la distance entre $\mathbf{v}$ et $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Solution : $\|\mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v})\| = \sqrt{\frac{35}{2}}.$

Exercice 2

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

Solution : On applique la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis on les normalise. On obtient $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, d'où $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, et $R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$

$$\textbf{Solution} : Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Solution} : Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.
- b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\mathbf{y}}$ la projection orthogonale de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W . Alors $\hat{\mathbf{y}}$ dépend du choix de la base de W .
- c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tel que $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_2$, alors $\mathbf{z} \in W^\perp$.
- d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\mathbf{p}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.

Solution : Vrai : a) Forcément vu que $Q^T = Q^{-1}$, c) Oui, suffit d'écrire un élément de W comme combinaison linéaire de w_1 et w_2 , d) Oui, un projecteur est l'identité quand on le restreint à l'espace en question. Faux : b) Il ne dépend que de W .

Exercice 4

Soit V une espace euclidien. On note $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ et la norme associée est $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Montrer :

- a) Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

Solution : $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 = 1 - 0 + 1 = 2$, donc $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

- b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Solution : $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle - \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Solution : $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle + \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

Remarque : l'égalité c) s'appelle "identité du parallélogramme".

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.
- b) Soit A une matrice $m \times n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ qui rend $A\mathbf{x}$ aussi proche que possible de $\mathbf{b}$.
- c) Soit V un espace euclidien et soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Alors $(\mathbf{u}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- d) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire classique est un espace euclidien.

Solution : Vrai : a) Revoir la définition, b) Idem, d) Idem. Faux : c) Le sens du membre de gauche de l'égalité n'est même pas clair.

Exercice 6

Répondez par vrai ou faux, en justifiant brièvement votre réponse : Le point $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$ est le point le plus proche de $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ dans le sous-espace engendré par $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solution : Faux. On cherche α, β solutions de :

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aux sens des moindres carrés. L'équation normale donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

L'unique solution est $(\alpha, \beta) = (-1, 0.2)$; donc le point le plus proche de $\mathbf{y}$ dans le sous-espace engendré par $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ est $\begin{pmatrix} -1.6 \\ 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercices supplémentaires

Exercice 7

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une base orthogonale de U . On considère la transformation $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{p}_U(\mathbf{v})$. Montrer que $\mathbf{T}$ est une transformation linéaire.

Solution : Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &= \frac{(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p \\ &= \alpha \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \beta \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p + \beta \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \beta \mathbf{T}(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Méthode 2 : En utilisant l'identité $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1)^{-1} \mathbf{v} + \dots + \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^T (\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p)^{-1} \mathbf{v} \\ &= \left(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1)^{-1} + \dots + \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^T (\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p)^{-1} \right) \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Ainsi, la transformation $\mathbf{T}$ est associée à la matrice de taille $n \times n$ définie par $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1)^{-1} + \dots + \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^T (\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p)^{-1}$ et est donc linéaire.

Exercice 8

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i [$^{\circ}\text{C}$]	U_i [V]
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Solution : Le système linéaire s'écrit

$$\mathbf{U} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{pmatrix}$ et A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & T_6 & T_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \end{pmatrix}.$$

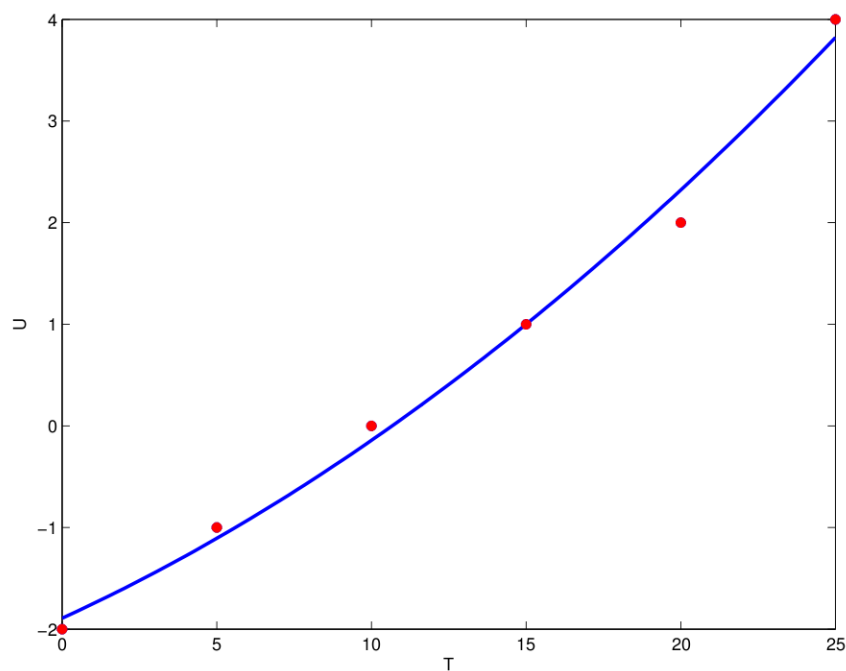
Pour résoudre ce système et trouver a, b, c au sens des moindres carrés, on considère l'équation normale

$$A^T \mathbf{U} = A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-53}{28} \\ \frac{39}{280} \\ \frac{1}{280} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.89 \\ 0.139 \\ 0.00357 \end{pmatrix}.$$

Le graphique suivant montre les données (en rouge) et la courbe d'interpolation (bleue) obtenue au sens des moindres carrés.



Exercice 9

Soit $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

(a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

(b) $W_1 = (W_1^\perp)^\perp$;

(c) $W_1 \subset W_2$ implique $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

Solution :

(a) Soit $\mathbf{x} \in (W_1 + W_2)^\perp$ alors

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{0}$$

pour tous $\mathbf{w}_1 \in W_1$ et $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Si on prend $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ alors on a que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 = 0$ pour tous $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Cela signifie que $\mathbf{x} \in W_2^\perp$. De façon similaire, on a que $\mathbf{x} \in W_1^\perp$. On a donc montré que

$$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

Pour montrer l'égalité, il nous suffit de montrer que si $x \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ alors $x \in (W_1 + W_2)^\perp$ aussi. En effet, pour tous $x \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ on a

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2$$

pour tous $\mathbf{w}_1 \in W_1$ et $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Alors, par linéarité, on a

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Finalement, cela signifie que

$$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp.$$

(b) Pour tous $\mathbf{x} \in W_1$, par définition, on a que $\mathbf{x}$ est orthogonal à tous les éléments dans $W_1^\perp$, c-à-d

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

pour tous $\mathbf{y}$ dans $W_1^\perp$. Mais cela signifie que $\mathbf{x} \in (W_1^\perp)^\perp$. On a donc montré que

$$W_1 \subset (W_1^\perp)^\perp.$$

De façon similaire, on peut montrer que $(W_1^\perp)^\perp \subset W_1$. En effet, vu que $\dim(W_1) + \dim(W_1^\perp) = n$ et aussi $\dim(W_1)^\perp + \dim(W_1^\perp)^\perp = n$, on peut donc écrire

$$\dim(W_1) = \dim(W_1^\perp)^\perp.$$

Finalement, $W_1 = (W_1^\perp)^\perp$.

(c) Pour tous $\mathbf{x} \in W_2^\perp$ on a que $\mathbf{x}$ est orthogonal à tous les vecteurs de W_2 , c-à-d

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$$

pour tous $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Vu que W_1 est un sous espace de W_2 , alors $\mathbf{x}$ est aussi orthogonal à tous les vecteurs de W_1 , c-à-d

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$$

pour tous $\mathbf{w}_1 \in W_1$. Cela signifie que $\mathbf{x} \in W_1^\perp$ et donc $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

Exercice 10

i) Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et v un vecteur dans $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_n|^2.$$

Solution : Soit U la matrice orthogonale formée des colonnes u_i . En utilisant $UU^T = I$, on obtient

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, UU^T v \rangle = \langle U^T v, U^T v \rangle = \|U^T v\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} u_1 \cdot v \\ \vdots \\ u_n \cdot v \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i \cdot v|^2.$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ et soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_p|^2.$$

Solution : On considère la projection $w = \sum_{i=1}^p \langle u_i, v \rangle u_i$ de v sur $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$. On a la décomposition $v = w + z$, avec $z \in W^\perp$. Par le théorème de Pythagore, w et z étant orthogonaux, on obtient

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

(En effet, on a $\|v\|^2 = \langle w + z, w + z \rangle = \|w\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle w, z \rangle$ et $\langle w, z \rangle = 0$). Ensuite,

$$\|v\|^2 \geq \|w\|^2 = \sum_{i=1}^p \|\langle u_i, v \rangle u_i\|^2 = \sum_{i=1}^p |\langle u_i, v \rangle|^2 \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^p |\langle u_i, v \rangle|^2.$$

Partiellement en classe

Exercice 11

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $W = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$. Calculer la décomposition $v = z + p_W(v)$, où $z \in W^\perp$.

Exercice 12

Soient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire euclidien) de v sur W est

[A.] $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ [B.] $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ [C.] $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$ [D.] $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Calculer la droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-1, 3)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$.

Par où passe cette droite en $x = -1, 1$ et 0 ?

Exercice 14

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$

de l'équation $Ax = b$ satisfait

[A.] $\hat{x}_2 = 1/6$ [B.] $\hat{x}_2 = -35/6$ [C.] $\hat{x}_2 = 41/6$ [D.] $\hat{x}_2 = -5/6$

Exercice 15

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$?

- A. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution
- B. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution au sens des moindres carrées
- C. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution.
- D. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution au sens des moindres carrées.

Exercice 16

Soit $u_1, \dots, u_p$ une base orthonormée d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et soit U la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \dots, u_p$. Montrer que $p_W(y) = UU^T y$.

Exercice 17

Soient A une matrice de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Soit $c = \text{proj}_{\text{Col}(A)}(b)$. Alors, il est toujours vrai que

- A. la solution au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ est $A^{-1}c$.
- B. l'équation $Ax = b$ n'admet aucune solution
- C. toute solution de $Ax = c$ est une solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$
- D. l'équation $Ax = c$ possède une solution unique.

Exercice 18

Quelle équation correspond à la droite de régression par les points $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$?

- A. $y = 0.9 + 0.4x$
- B. $y = 1 + 0.5x$
- C. $y = 18 + 4x$
- D. $y = 1.1 + 0.6x$

Exercice 19

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, on a

- A. $U^T Ux = \text{proj}_W(x)$ et $UU^T y = \text{proj}_W(y)$
- B. $U^T Ux = x$ et $UU^T y = 0$
- C. $U^T Ux = x$ et $UU^T y = y$
- D. $U^T Ux = x$ et $UU^T y = \text{proj}_W(y)$.

Exercice 20

Soit A une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes, et soit $A = QR$ sa factorisation QR. Alors R est une matrice inversible.

- A. Vrai
- B. Faux

Exercice 21

Calculer une factorisation QR de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = QR$ la décomposition QR de A . Alors

$$[A.] \ r_{33} = 2\sqrt{2} \quad [B.] \ r_{33} = \sqrt{2} \quad [C.] \ r_{33} = \sqrt{3} \quad [D.] \ r_{33} = 3\sqrt{2}$$

Exercice 23

Soient A une matrice non-nulle de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors, il est toujours vrai que

- A. le vecteur $b - Ax$ appartient à $\ker(A^T)$ pour un unique choix de $x \in \mathbb{R}^n$.
- B. la matrice $A^T A$ est inversible.
- C. l'équation $Ax = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés.
- D. si $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ sont deux solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, alors $A\hat{x} = A\hat{x}'$

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.