

Série 11

Exercice 1

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}, \quad \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Exercice 2

Soient $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont orthogonaux.

b) Calculer la projection orthogonale $\mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ de $\mathbf{v}$ sur $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

c) Donner la décomposition $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$, où $\mathbf{z} \in W^\perp$.

Même question pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Même question pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)$ et $V = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

Exercice 4

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

a) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Exercice 5

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ une base orthogonale de W . Soit $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.

Montrer que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

Exercice 6

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) en utilisant la méthode QR lorsque

$$\begin{aligned} \text{i) } A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{ii) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 7

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

- Montrer que $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$.
- Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

La solution au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est telle que

$$\square \hat{x}_2 = -4$$

$$\square \hat{x}_2 = 3$$

$$\square \hat{x}_2 = -3$$

$$\square \hat{x}_2 = 4$$

Exercice 9

Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{v}$. Est-ce un espace vectoriel? Si oui, trouver une base de W . Justifier les réponses.

Exercice 10

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 11

Soient

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et A une matrice 3×3 à coefficients réels telle que :

- $\lambda_1 = 4$ est une valeur propre associée au vecteur $\mathbf{v}_1$
 - $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ est une valeur propre associée au vecteur $\mathbf{v}_2$
- (a) Calculer le polynôme caractéristique de A dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$?
- (b) Calculer D et P tels que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.
- (c) Calculez P^{-1} .
- (d) *Optionnel : calculez A*

Rappel :

$$\begin{aligned} e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} &= 2 \frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2 \cos(\pi/3) = 2 \frac{1}{2} = 1 \\ -ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} &= -i2 \frac{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}{2} = 2 \sin(\pi/3) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 12

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les valeurs propres complexes de A et de B .
- (b) Calculer les vecteurs propres complexes de A et de B .
- (c) Soit P et Q les matrices dont les colonnes sont des vecteurs propres de A et de B , respectivement (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ et interpréter le résultat.

Partiellement en classe

(Ces exercices seront sur les slides.)

Exercice 131

Vrai/Faux : Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors chaque ligne de A est orthogonale à tous les vecteurs dans $\ker(A)$ (par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$).

1. Vrai
2. Faux

Exercice 141

Vrai/Faux : Soit V un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soient $u, v \in V$ deux vecteurs. Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si la distance entre u et v est la même que la distance entre u et $-v$.

- A. Vrai
- B. Faux

Exercice 151

Vrai/faux : Une matrice de dimension $m \times n$ avec $m > n$ peut avoir des lignes orthogonales.

- A. Vrai
- B. Faux

Exercice 161

Si U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U = I_n$.

- A. Vrai
- B. Faux : $U U^T = I_m$
- C. Pas toujours, ça dépend

Exercice 171

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2\}$ du sous-espace

vectorel $V = \text{Vect}\{w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^3$, où $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 181

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2\}$ du sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}^4$, où

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 191

Vrai/Faux : Soit A une matrice $n \times n$ telle que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Alors A est inversible.

A. Vrai

B. Faux

Exercice 201

Vrai/Faux : Soit A une matrice $n \times n$ telle que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Alors les lignes de A forment une base orthonormée.

A. Vrai

B. Faux

Exercice 211

Soit B une matrice de taille $m \times n$ telle que $BB^T = I_m$. Alors

A. Les colonnes de B forment un ensemble orthonormé

B. Les lignes de B forment un ensemble orthonormé

C. $B^T B = I_n$

D. B est inversible

Exercice 221

Soient $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et soit $W = \text{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$. Le procédé

d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, sans normalisation et sans changer l'ordre, appliqué à la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ de W nous fournit une base orthogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de W , où

A. $v_3 = x_3 - v_1 + v_2$

B. $v_3 = x_3 + 9v_1 - 9v_2$

C. $v_3 = x_3 + v_1 - v_2$

D. $v_3 = x_3$

Exercice 231

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans $W^\perp$ et dans W , alors $v = 0$.

A. Vrai

B. Faux

Exercice 241

Soit $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Trouver une base de $W^\perp$.

Exercice 251

Vrai/faux : Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $y \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $p_W(y) = y$.

A. Vrai

B. Faux

Exercice 261

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $W = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$. Calculer la décomposition $v = z + p_W(v)$, où $z \in W^\perp$.

Exercice 271

Soient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire usuel) de v sur W est

A. $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 281

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{x} =$

$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $Ax = b$ satisfait

- A. $\hat{x}_2 = 1/6$
- B. $\hat{x}_2 = -35/6$
- C. $\hat{x}_2 = 41/6$
- D. $\hat{x}_2 = -5/6$

Exercice 291

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$?

- A. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution
- B. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution au sens des moindres carrées
- C. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution.
- D. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution au sens des moindres carrées.

Exercice 301

Soit $u_1, \dots, u_p$ une base orthonormée d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et soit U la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \dots, u_p$. Montrer que $p_W(y) = UU^T y$.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.