Série 8 (Corrigé)

Exercice 1

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Une transformation matricielle définie par une matrice A est toujours bijective lorsque son domaine (ensemble de départ) est égal à Lign$A$ et son codomaine (ensemble d'arrivé) est égal à Col$A$.
Solution : *Vrai : si l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes est égal à l'espace d'arrivée, alors l'application est surjective. Si, de plus, l'espace vectoriel formé engendré par les vecteurs lignes est l'espaces de départ, alors on peut conclure qu'elle est aussi injective, donc qu'il s'agit d'une bijection.*

Exercice 2

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : Utiliser le résultat de l'exercice 4.
Solution : *On calcule le déterminant de A. Ensuite, pour faire le moins de calculs possible, on réalise des opérations élémentaires sur la matrice A pour obtenir les matrices B, C et D. Ceci revient à multiplier A par des matrices élémentaires. On a exhibé à l'exercice 4 les effets multiplicatifs sur le déterminant de A qui en résultent.*

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -9,$$

$$\det B = 2 \det A = -18, \ (L_1 \leftarrow 2L_1)$$

$$\det C = -\det A = 9, \ (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\det D = \det A = -9. \ (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Solution : *On peut calculer* $det(A)$ *en développant par rapport à la première colonne, puis en échelonnant la matrice* 3×3 *obtenue. On obtient* $det(A) = -a \cdot (2a-3)$. *A est inversible ssi* $det(A) \neq 0$ *ssi* $a \notin \{0, \frac{3}{2}\}$.

Exercice 4

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication : Montrer que $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.

Solution :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{échelonnement partiel (ne modifie pas le } \det)} \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 0 & c_2 - c_1 & c_2^2 - c_1^2 \\ 0 & c_3 - c_2 & c_3^2 - c_2^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\det A = \det A^T = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_1).$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. *Ainsi, A est inversible si et seulement si* $c_i \neq c_j$ *pour tous* $i, j = 1, 2, 3$, *avec* $i \neq j$.

En général, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$, $\det A = \prod_{1 \le i < j \le n}^{n} (c_j - c_i)$ *s'appelle un déterminant de Vandermonde (à noter que la forme typique de la matrice de Vandermonde est* A^T, *qui a bien entendu le même déterminant que A).*

Exercice 5

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

$\det A = 1$ *(A ajoute à la quatrième ligne la troisième ligne multipliée par α),* $\det B = -1$ *(B échange les lignes 1 et 2),* $\det C = \alpha$ *(C multiplie la première ligne par $\alpha \neq 0$).*

Exercice 6

Soient A et B des matrices de taille $n \times n$. Montrer que si A ou B est non inversible, alors AB est non inversible.
Solution : *On utilise la propriété du déterminant* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *Ainsi, si* $\det(A) = 0$ *ou* $\det(B) = 0$, *alors* $\det(AB) = 0$. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'où le résultat.*

Exercice 7

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Solution :

a) 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne.

b) Premier déterminant : 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières. Second déterminant : a^3.

c) $\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ *est indépendant de l'angle φ. Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété* $\det A = 1$.

d) $\det B = 0$, *donc* $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det B = \det A$.

b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$.

c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.

d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.

Solution : *Vrai : b) Comme la matrice n'est pas inversible, sont déterminant est nul. Faux : a) Prendre une matrice* $2x2$*, aucune raison que* $ad - bc$ *soit égal à* $bc - ad$*, c) Uniquement si la matrice est diagonale, d) Manifestement faux.*

Exercices optionnels

Exercice 9

Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices telles que B est inversible et :

$$\begin{cases} det(A) &= det(B^3) \\ det(C) &= det(B^{-1}) \\ det(ABC) &= 8 \end{cases}$$

Que valent $det(A), det(B)$ et $det(C)$?

Solution : *Notons $a = det(A)$, $b = det(B)$ et $c = det(C)$. Par hypothèse, B est inversible, donc $b \neq 0$. Comme le déterminant est compatible avec le produit matriciel, les équations ci-dessus donnent $a = b^3$, $c = b^{-1}$ et $abc = 8$. En remplaçant a et c dans la dernière équation, on obtient $b^3 = 8$, soit $b = 2$. Donc $det(A) = 8$, $det(B) = 2$ et $det(C) = \frac{1}{2}$.*

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Si deux lignes d'une matrice de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$.

(b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.

(c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.

(d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible.

Solution : *Vrai : (a) Sa transposée n'est pas inversible, donc elle non plus. Faux : (b)Prendre n'importe quelle matrice $2x2$ pour se convaincre que $det(A^3) \neq 3ad - 3bc$, (c) Le déterminant n'est pas linéaire, (d)Prendre la matrice nulle, qui n'est pas inversible.*

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.

b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A.

c) Dans certains cas, il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$.

d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$.

Solution : *Vrai : a) Les zéros au-dessus de la diagonale vont annuler tous les termes en-dessous, d) On peut s'en convaincre via le calcul. Faux : b)En prenant une matrice $2x2$ générique, on trouve que $\det A^T = \det A$, donc c'est faux déjà pour $n = 2$ c) C'est un "si et seulement si", revoir le cours.*

Partiellement en classe

Exercice 12

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
Solution : *λA est obtenue à partir de A en faisant n opérations élémentaires sur les lignes : on multiplie les lignes 1 à n par λ. Chacune de ces opérations multiplie le déterminant par λ. Donc $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.*

Exercice 13

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

A : *L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.*
On développe par rapport à la première colonne de A. On obtient

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B : *On développe par rapport à la deuxième colonne de B :* $\det B = 0$. *On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc* $\det B = 0$.

C : *On développe par rapport à la troisième colonne de C :* $\det C = 0$. *On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc* $\det C = 0$.

D : *On développe par rapport à la première colonne de D. On obtient*
$\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$

E : *On développe par rapport à la première colonne de E. On obtient*

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T.

Solution : *La transposition ne change pas la valeur du déterminant. Les résultats sont les mêmes qu'au a).*

Exercice 14

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Solution : *Deux lignes de A sont identiques ssi deux colonnes de A^T sont identiques. Si deux colonnes de A^T sont les même, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, ainsi A^T est non inversible, c-à-d* $\det\left(A^T\right) = \det(A) = 0$. *On peut donc conclure dans tous les cas* $\det(A) = 0$.

Méthode 2 : Échanger deux lignes (ou colonnes) de A multiplie le déterminant de A par -1. En échangeant deux lignes identiques (ou colonnes) de A, la matrice A ne change pas. On a donc : $\det(A) = -\det(A)$. *Ainsi* $\det(A) = 0$.

Exercice 15

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Solution : *Deux lignes de A sont identiques ssi deux colonnes de A^T sont identiques. Si deux colonnes de A^T sont les même, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, ainsi A^T est non inversible, c-à-d* $\det\left(A^T\right) = \det(A) = 0$. *On peut donc conclure dans tous les cas* $\det(A) = 0$.

Méthode 2 : Échanger deux lignes (ou colonnes) de A multiplie le déterminant de A par -1. En échangeant deux lignes identiques (ou colonnes) de A, la matrice A ne change pas. On a donc : $\det(A) = -\det(A)$. *Ainsi* $\det(A) = 0$.

Exercice 16

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\det(A^{-1})\det(A+B)\det(B^{-1})$$

A est égal à 2.

B est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$,

C n'est pas défini car la matrice $A + B$ n'est pas forcément inversible.

D est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$.

(Une seule réponse correcte.)

Exercice 17

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\frac{\det(A^T) + \det(B^T)}{\det(A)\det(B)}$$

A est égal à $\det(A^T - A) + \det(B^T - B)$

B est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$

C est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$

D est égal à $\frac{1}{\det(B)} - \frac{1}{\det(A)}$

Exercice 18

Le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est

A. -2

B. $2 - \alpha$

C. $-2 - \alpha$

D. 2

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.