

Série 6 (Corrigé)

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) calculer le noyau et image d'une application linéaire.
- (O.2) transformations injective et surjective
- (O.3) matrice associée à une transformation linéaire
- (O.4) théorème du rang

Nouveau vocabulaire dans cette série

- transformation linéaire
- matrice de T par rapport à ...
- noyau et image d'une transformation linéaire

Exercice 1

On appelle *trace* d'une matrice carrée A , et l'on note $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A . Soit $\mathcal{M}_{n \times n}$ l'espace vectoriel des matrices de tailles $n \times n$.

- (i) Montrer que l'application $\text{tr}: \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \text{tr}(A)$ est une application linéaire.
- (ii) Calculer la dimension de $\text{Ker}(\text{tr})$.
- (ii) Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Solution : En général on peut écrire

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (i) L'application $\text{tr}: \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire si pour toutes A et B dans $\mathcal{M}_{n \times n}$ et tous λ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\text{tr}(A) + \text{tr}(B) = \text{tr}(A + B) \quad \text{et} \quad \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + B) &= \sum_{i=1}^n (A + B)_{ii} = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii}}_{\text{tr}(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_{ii}}_{\text{tr}(B)} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \\ \text{tr}(\lambda A) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii}}_{\text{tr}(A)} = \lambda \text{tr}(A). \end{aligned}$$

(ii) Par le théorème du rang on sait que

$$\dim \text{Im}(\text{tr}) + \dim \text{Ker}(\text{tr}) = \dim \mathcal{M}_{n \times n}.$$

Premièrement, $\mathcal{M}_{n \times n}$ est l'ensemble formé des matrices avec $n \times n = n^2$ éléments, donc $\dim \mathcal{M}_{n \times n} = n^2$. De plus, l'image de tr est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ de la forme $\text{tr}(A)$ avec A dans $\mathcal{M}_{n \times n}$. Donc $\dim \text{Im}(\text{tr}) = 1$. Finalement, on a que

$$\dim \text{Ker}(\text{tr}) = n^2 - 1.$$

(iii) En effet, en utilisant la définition de multiplication des matrices, on a

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \text{tr}(BA).$$

Exercice 2

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Solution : On doit prouver (i) si $w \in T(U)$ et α est un scalaire, alors $\alpha w \in T(U)$ et (ii) si $w_1 \in T(U)$ et $w_2 \in T(U)$ alors $w_1 + w_2 \in T(U)$, et (iii) $T(U)$ contient 0_W .

(i) En effet : $w \in T(U) \Leftrightarrow w = T(u)$ pour un certain $u \in U$. Ainsi, en utilisant la linéarité de T , $\alpha w = \alpha T(u) = T(\alpha u) \in T(U)$ ($\alpha u \in U$ car U est un s.e.v. de V , donc fermé pour la multiplication par un scalaire). (ii) De même, $w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(U)$ (U est fermé pour l'addition). (iii) On a $0_V \in U$ car U s.e.v. de V et $T(0_V) = 0_W$ par linéarité de T , donc $0_W \in T(U)$ (car il existe $u = 0_V \in U$ tel que $0_W = T(u)$).

Exercice 3

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$ telles que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ pour tout vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $A = B$.

Solution : Soient $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ et $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, où $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{b}_i$ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^m$ pour tous $i = 1, \dots, n$. Alors, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$A\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots x_n \mathbf{a}_n \quad \text{et} \quad B\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots x_n \mathbf{b}_n,$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les composantes de $\mathbf{x}$. Les j^e composantes de $A\mathbf{x}$ et $B\mathbf{x}$ s'écrivent comme de suite

$$(A\mathbf{x})_j = x_1 \mathbf{a}_{1j} + x_2 \mathbf{a}_{2j} + \dots x_n \mathbf{a}_{nj} \quad \text{et} \quad (B\mathbf{x})_j = x_1 \mathbf{b}_{1j} + x_2 \mathbf{b}_{2j} + \dots x_n \mathbf{b}_{nj},$$

où $\mathbf{a}_{ij}$ et $\mathbf{b}_{ij}$ indiquent la j^e composante de la i^e colonne de A et B , respectivement. Donc, si $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$, alors on a

$$(A\mathbf{x})_j = (B\mathbf{x})_j, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, m.$$

C-à-d

$$x_1 \mathbf{a}_{1j} + x_2 \mathbf{a}_{2j} + \dots x_n \mathbf{a}_{nj} = x_1 \mathbf{b}_{1j} + x_2 \mathbf{b}_{2j} + \dots x_n \mathbf{b}_{nj}, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, m.$$

On peut donc écrire

$$x_1(\mathbf{a}_{1j} - \mathbf{b}_{1j}) + x_2(\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{b}_{2j}) + \dots x_n(\mathbf{a}_{nj} - \mathbf{b}_{nj}) = 0, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, m.$$

Cette équation est vraie pour tout $\mathbf{x}$ seulement si $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{b}_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$, c-à-d seulement si $A = B$.

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$\text{Ker } A \cap \text{Col } B = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$, $k \leq n$, une base de $\text{Col } B$. Montrer que $\{A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k\}$ est une base de $\text{Col}(AB)$.

Solution : Méthode 1 : Soit $\mathbf{T}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à la matrice A . On considère sa restriction $\mathbf{T}_{A|_{\text{Col } B}}$ au sous-espace $\text{Col } B \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{T}_{A|_{\text{Col } B}} : \text{Col } B \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Comme $\text{Ker } A \cap \text{Col } B = \{\mathbf{0}\}$, cette application est injective. De plus, l'image de cette application est $\mathbf{T}_A(\text{Col } B) = \text{Col}(AB)$. L'application $\mathbf{T}_A$ réalise donc une bijection entre $\text{Col } B$ et $\text{Col}(AB)$. Par conséquent, la matrice A transforme toute base de $\text{Col } B$ en une base de $\text{Col}(AB)$.

Méthode 2 : Montrons d'abord que la famille $\{A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k\}$ est linéairement indépendante. Soient $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$c_1 A\mathbf{b}_1 + c_2 A\mathbf{b}_2 + \dots + c_k A\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$$

$$\text{alors, } A(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k) = \mathbf{0}$$

$$\text{ainsi, } c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k \in \text{Ker } A.$$

Or, le vecteur $c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k$ appartient à $\text{Col } B$ comme combinaison linéaire des $\mathbf{b}_j \in \text{Col } B$. Mais $\text{Ker } A \cap \text{Col } B = \{\mathbf{0}\}$, ainsi $c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k = \mathbf{0}$. $\mathcal{B}$ étant une base, $\mathcal{B}$ est linéairement indépendante, d'où $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Par ailleurs, $\{A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k\}$ engendre $\text{Col}(AB)$. En effet, $\text{Col}(AB)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(AB)x = A(Bx)$, où $x \in \mathbb{R}^p$. De même, $\text{Col}(B)$ est l'ensemble des Bx , $x \in \mathbb{R}^p$. Comme $\text{Col}(B)$ est engendré par $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$, on en déduit que $\text{Col}(AB)$ est engendré par $\{A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k\}$. La famille $\{A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k\}$ est donc une base de $\text{Col}(AB)$.

Exercice 5

Soit $\mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à 4 et $\mathbb{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à 3. Soit $T : \mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application linéaire qui associe à chaque polynôme sa dérivée, c'est à dire $T(p) = p'$ pour chaque $p \in \mathbb{P}_4$.

- Calculer le noyau de T et trouver sa dimension.
- Étant donné la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathbb{P}_4$ et la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{P}_3$, calculer la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ associé à T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(c) Calculer une base et la dimension du noyau de la transformation linéaire T .

Rappel : la dérivée de $a_k x^k$ est $a_k k x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Solution :

(a) Le noyau de la transformation T est l'ensemble des polynômes de p dans $\mathbb{P}_4$ tels que $T(p) = 0$. Seulement les constants ont dérivée nulle, donc $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}\}$, dont une base est constitué du polynome constant $p(x) = 1$. On conclut aussi que $\dim \text{Ker}(T) = 1$.

(b) On peut écrire $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ et $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Donc

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{CB}} &= [[T(b_1)]_{\mathcal{C}}, [T(b_2)]_{\mathcal{C}}, [T(b_3)]_{\mathcal{C}}, [T(b_4)]_{\mathcal{C}}, [T(b_5)]_{\mathcal{C}}] \\ &= \begin{bmatrix} [0]_{\mathcal{C}}, [1]_{\mathcal{C}}, [2x]_{\mathcal{C}}, [3x^2]_{\mathcal{C}}, [4x^3]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $p = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$, alors les coefficients de sa dérivée p' peuvent être calculée comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{[T]_{\mathcal{CB}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}}_{[p]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}}_{[T(p)]_{\mathcal{C}}},$$

c-à-d, $p' = 3 + 12x^2 - 4x^3$.

(c) En partant de la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$, qui est déjà sous forme échelonnée, on remarque qu'il y a 4 colonnes pivot, donc $\text{rg}([T]_{\mathcal{CB}}) = 4$. En utilisant le théorème de rang :

$$\dim \text{Ker} [T]_{\mathcal{CB}} = (\text{nombre de colonnes de } [T]_{\mathcal{CB}}) - \text{rg}([T]_{\mathcal{CB}}) = 5 - 4 = 1.$$

De plus, x_1 est la seule variable libre du système et une base du $\text{Ker} [T]_{\mathcal{CB}}$ est par exemple :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

Une base du noyau de T est donnée par le polynome p tel que $[p]_{\mathcal{C}} = (1, 0, 0, 0, 0)^T$, c'est à dire $p(x) = 1$. La dimension du noyau de T est 1.

Remarque : On peut répondre à la question (a) de la façon suivante : Le vecteur de $\mathbb{P}_4$ qui en la base $\mathcal{B}$ a ces coordonnées est $p(x) = 1$. On peut donc prendre $\{1\}$ comme base de $\text{Ker}(T)$ et $\dim \text{Ker}(T) = \dim \text{Ker}([T]_{\mathcal{CB}})$

Exercices de révision

Exercice 6

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ii) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .

Solution :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

iii) Trouver la solution générale de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solution : La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La variable x_3 est libre, on peut donc écrire :

$$s_3 = t, t \in \mathbb{R}, s_1 = -5 - 4t, s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 7

Calculer $A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

Solution :

$$A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Solution :

$$A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

$$\text{a) } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solution : On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + x_3 = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases}.$$

Ce système possède une unique solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement indépendants, et ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

$$\text{b) } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solution : $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$. Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

c) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Solution : $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent $\mathbb{R}^2$.

Remarque

On utilise :

Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.

$\Leftrightarrow$ Pour tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).

$\Leftrightarrow$ La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible); la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (car $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$).

$\Leftrightarrow$ Chaque ligne a une position pivot.

Exercice 9

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

Solution : Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, le système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite

s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) A est une matrice 4×2 , $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ et $\mathbf{a}_2$ n'est pas un multiple de $\mathbf{a}_1$.

Solution : Si $\mathbf{a}_2$ n'est pas un multiple de $\mathbf{a}_1$, alors il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$. Deux cas sont possibles.

Si $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, alors les deux vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ sont linéairement indépendants, et la forme

échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Si $\mathbf{a}_1$ est le vecteur nul, alors le vecteur $\mathbf{a}_2$ est non nul (car non multiple de $\mathbf{0}$), et la

forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- c) A est une matrice 4×3 , $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$. Les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\mathbf{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

Solution : $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un espace de dimension 2. Le vecteur $\mathbf{a}_3$ n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Par conséquent, les trois vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ engendrent un espace de dimension 3, ils sont linéairement indépendants.

$$\text{D'où la forme échelonnée réduite de } A : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale.
- b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale.
- c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.
- d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Solution : Vrai : b) Ce système admet toujours 0 comme solution. S'il en existe une autre, alors l'application linéaire associée à la matrice A n'est pas bijective puisque 0 admet deux antécédents différents. Donc A n'est pas de rang maximal et ses colonnes sont linéairement dépendantes. c) Cinq vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ sont toujours linéairement dépendants. Faux : a) Quelque soit A , la solution triviale est toujours une solution à un système du type $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. d) Prenons $v_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, on vérifie aisément que cette famille n'est pas indépendante.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.
- c) Une équation homogène est toujours compatible.
- d) Si $\mathbf{x}$ est une solution non triviale de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors aucune composante de $\mathbf{x}$ est nulle.

Solution : Vrai : a), c). Faux : b), d).

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible.
- b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.
- c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.
- d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.

Solution : *Vrai : a), b), d). Faux : c).*

Partiellement en classe

Exercice 13

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par $x \mapsto Ax$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. L'image de T_A est l'espace colonne de A .
- B. L'image de T_A est l'espace de tous les $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $Ax = b$ est compatible.
- C. Le noyau de T_A est l'espace ligne de A .
- D. Le noyau de T_A est l'espace des solutions de l'équation $Ax = 0$.

Solution : A. Vrai, B. Vrai, C. Faux, D. Vrai

Exercice 14

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $\mathbf{T}_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $\mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Remplacer le symbole $==?$ par le bon opérateur logique $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, ou $\neq$

- (a) $\mathbf{T}_A$ est injective $==?$ A a une position pivot dans chaque colonne.
- (b) $\mathbf{T}_A$ est surjective $==?$ A a une position pivot dans chaque ligne.

Le montrer et préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n .

Solution : Il s'agit à chaque fois d'équivalences, ie., $\Leftrightarrow$ (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_A \text{ injective} &\Leftrightarrow \mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ n'admet que la solution triviale} \\ &\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ n'admet que la solution triviale} \\ &\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ n'a pas de variable libre} \\ &\Leftrightarrow A \text{ a une position pivot dans chaque colonne.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad \mathbf{T}_A \text{ surjective} &\Leftrightarrow \mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \text{ a une solution pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \\ &\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ a une solution pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \\ &\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \\ &\Leftrightarrow A \text{ a une position pivot dans chaque ligne.}\end{aligned}$$

Pour répondre à la deuxième question, nous observons que pour la matrice A on a

$$\text{nombre de positions pivot} \leq \min\{m, n\},$$

comme le nombre maximal de positions pivot est atteint si chaque élément diagonal a_{ii} de la matrice A (de taille $m \times n$) est une position pivot. Alors,

- (a) on a déduit que $\mathbf{T}_A$ est injective si et seulement si A a n positions pivot. Donc, il est nécessaire que $n \leq m$.
- (b) on a déduit que $\mathbf{T}_A$ est surjective si et seulement si A a m positions pivot. Donc, il est nécessaire que $m \leq n$.

On retrouve au passage que nécessairement $n = m$ lorsque $\mathbf{T}_A$ est bijective (cf. Exercice 5).

Exercice 15

Vrai ou faux ?

- A. Soit V un espace vectoriel de dimension 2022 et W un espace vectoriel de dimension 2021. Alors le noyau de toute transformation linéaire surjective $T: V \rightarrow W$ est toujours de dimension 1.
- B. Soit $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$ une application linéaire injective. Alors T est surjective.
- C. Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée de V . Alors l'application des coordonnées $[\cdot]_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective.

Solution : A. Vrai, B. Vrai, C. Vrai

Exercice 16

Soit $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Donner la matrice M qui représente $\mathbf{T}$ par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
- (b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
- (c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Solution : Deux versions : une sans utiliser la théorie sur le changement de base, et une avec.

Sans utiliser la théorie sur le changement de base

- (a) On note $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les vecteurs de la base canonique E de $\mathbb{R}^3$. Par définition, la matrice canonique de l'application $\mathbf{T}$ est

$$([\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]_E).$$

On cherche

$$M = ([\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]_B).$$

On va donc chercher les vecteurs coordonnées de $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$ et $\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)$ par rapport à la base B . On note $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ les vecteurs de la base B . Commençons par $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$. On cherche l'unique vecteur $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ tel que $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + r_3\mathbf{b}_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = [\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)]_B. \quad (1)$$

De façon similaire, on obtient

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On procède de manière identique pour expliciter

$$M = ([\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_3)]_E) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici les 3 systèmes à résoudre sont très simples car ils font intervenir la matrice identité (matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base canonique E).

(c) La matrice M recherchée est ici donnée par

$$M = ([\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_3)]_B).$$

Les 3 systèmes à résoudre font intervenir la même matrice qu'en (1). On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la théorie sur le changement de base

(a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation $\mathbf{T}$. On obtient

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E . Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base E à la base B , notée P_{BE} (telle que $[\mathbf{x}]_B = P_{BE}[\mathbf{x}]_E$). On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage de la base B à la base E , notée P_{EB} . Cette dernière est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. ses colonnes sont les vecteurs de la base B , exprimés dans la base E . Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite), ou calculer directement son inverse en résolvant $P_{EB}P_{EB}^{-1} = I_3$, où l'on pose

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P_{EB} contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenu que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{BE}.$$

On applique alors P_{BE} aux vecteurs obtenus précédemment (qui sont exprimés dans la base E). La matrice M est

$$M = ([P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont exprimés dans la base canonique E . La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On applique P_{BE} aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$M = ([P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{b}_3)]) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17

Soient $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de $V = \mathbb{P}_2$ dans $W = \mathbb{P}_1$ et $B = (b_1, b_2, b_3) = (t^2 - t + 1, 2t + 1, 2t - 1)$ et $C = (1, t)$ bases de V et W .

Soit T telle que

$$T(b_1) = 2t - 1, \quad T(b_2) = 2, \quad T(b_3) = 2$$

Soit $p(t) = t^2$, calculer $T(p)$ ainsi que $[T(p)]_C$.

Quelle est la marche à suivre ?

Mettre dans l'ordre et éliminer les **2 intrus** :

- Mettre sous forme échelonnée la matrice augmentée $(B|p)$.
- Alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_3)$.
- Calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\leftarrow$ en colonne).
- Compléter la base C en une base de V .
- Trouver les coordonnées de $T(p)$ par rapport à C .

Solution :

- calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\leftarrow$ en colonne)
- alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_3)$
- trouver les coordonnées de $T(p)$ par rapport à C

Rappel : ici,

$$[a_0 + a_1 t + a_2 t^2]_B = \begin{pmatrix} a_2 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{4}a_2 \end{pmatrix}$$

(To be continued)

Exercice 18

Soient $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t - 1) + c(t - 1)^2.$$

Alors, on a $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, où

$$\text{A. } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{C. } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{B. } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D. } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : Sans corrigé

Exercice 19

Soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Considérer la base ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$.

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

$[\mathcal{T}(v)]_{\mathcal{B}}$ signifie la transformation $\mathcal{T}$ appliquée à v écrite selon la base $\mathcal{B}$. Pour trouver la matrice associée à $\mathcal{T}$, on commence par remplacer l'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

Or ce vecteur doit aussi s'écrire selon la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = 6 * \mathbf{b}_1 - 2 * \mathbf{b}_3$$

Ainsi, la première colonne de M sera

$$\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

Le même raisonnement s'applique pour la deuxième colonne

$$\mathcal{T}(v_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

Or ce vecteur doit aussi s'écrire selon la base $\mathcal{B}$, soit

$$\mathcal{T}(v_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 2 * \mathbf{b}_1 + 6 * \mathbf{b}_2 - 8 * \mathbf{b}_3$$

Ainsi, la deuxième colonne de $\mathcal{M}$ sera

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

La réponse est C.

Exercice 20

Soient $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire et les bases ordonnées $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

$$\begin{array}{ll} \text{A. } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} & \text{C. } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\ \text{B. } M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix} & \text{D. } M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution :

$[\mathcal{T}(v)]_{\mathcal{C}}$ signifie la transformation $\mathcal{T}$ appliquée à v écrite selon la base $\mathcal{C}$. En utilisant la même technique que l'exercice précédent, on commence par remplacer un des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Or ce vecteur doit aussi s'écrire selon la base $\mathcal{C}$, soit

$$\mathcal{T}(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 * \mathbf{b}_1 + 2 * \mathbf{b}_2$$

Ainsi, la première colonne de $\mathcal{M}$ sera

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La réponse est donc B.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.