Série 6

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) calculer le noyau et image d'une application linéaire.

(O.2) transformations injective et surjective

(O.3) matrice associée à une transformation linéaire

(O.4) théorème du rang

Nouveau vocabulaire dans cette série

- transformation linéaire
- matrice de T par rapport à ...
- noyau et image d'une tranformation linéaire

Exercice 1

On appelle *trace* d'une matrice carrée A, et l'on note $\operatorname{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A. Soit $\mathcal{M}_{n\times n}$ l'espace vectoriel des matrices de tailles $n \times n$.

(i) Montrer que l'application $\operatorname{tr}\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$ est une application linéaire.

(ii) Calculer la dimension de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.

(ii) Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Exercice 2

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \to W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Exercice 3

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$ telles que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ pour tout vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Col} B = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k\}$, $k \leq n$, une base de $\operatorname{Col} B$. Montrer que $\{A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_k\}$ est une base de $\operatorname{Col}(AB)$.

Exercice 5

Soit $\mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou egale à 4 et $\mathbb{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou egale à 3. Soit $T : \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_3$ l'application linéaire qui associe à chaque polynôme sa dérivé, c'est à dire $T(p) = p'$ pour chaque $p \in \mathbb{P}_4$.

(a) Calculer le noyau de T et trouver sa dimension.

(b) Étant donné la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathbb{P}_4$ et la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{P}_3$, calculer la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$ associé à T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(c) Calculer une base et la dimension du noyau de la transformation linéaire T.

Rappel : la dérivée de $a_k x^k$ est $a_k k x^{k-1}$, $k = 1, 2, ...$

Exercices de révision

Exercice 6

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ii) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

iii) Trouver la solution générale de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exercice 7

Calculer $A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Exercice 8

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b) A est une matrice 4×2, $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ et $\mathbf{a}_2$ n'est pas un multiple de $\mathbf{a}_1$.

c) A est une matrice 4×3, $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$. Les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\mathbf{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale.

b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale.

c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.

d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.

b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.

c) Une équation homogène est toujours compatible.

d) Si $\mathbf{x}$ est une solution non triviale de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors aucune composante de $\mathbf{x}$ est nulle.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0\ 0\ 0\ 0\ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible.

b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.

c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.

d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.

Partiellement en classe

Exercice 13

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par $x \mapsto Ax$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. L'image de T_A est l'espace colonne de A.

B. L'image de T_A est l'espace de tous les $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $Ax = b$ est compatible.

C. Le noyeau de T_A est l'espace ligne de A.

D. Le noyeau de T_A est l'espace des solutions de l'équation $Ax = 0$.

Exercice 14

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $\mathbf{T}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $\mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Remplacer le symbole ?=? par le bon opérateur logique $\Rightarrow$, $\Leftarrow$,$\Leftrightarrow$, ou $\neq$

(a) $\mathbf{T}_A$ est injective ?=? A a une position pivot dans chaque colonne.

(b) $\mathbf{T}_A$ est surjective ?=? A a une position pivot dans chaque ligne.

Le montrer et préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n.

Exercice 15

Vrai ou faux ?

A. Soit V un espace vectoriel de dimension 2022 et W un espace vectoriel de dimension 2021. Alors le noyau de toute transformation linéaire surjective $T \colon V \to W$ est toujours de dimension 1.

B. Soit $T \colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$ une application linéaire injective. Alors T est surjective.

C. Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée de V. Alors l'application des coordonnées $[\cdot]_{\mathcal{B}} \colon V \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective.

Exercice 16

Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Donner la matrice M qui représente $\mathbf{T}$ par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).

(b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).

(c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Exercice 17

Soient $T : V \to W$ une application linéaire de $V = \mathbb{P}_2$ dans $W = \mathbb{P}_1$ et $B = (b_1, b_2, b_3) = (t^2 - t + 1, 2t + 1, 2t - 1)$ et $C = (1, t)$ bases de V et W.

Soit T telle que

$$T(b_1) = 2t - 1, \quad T(b_2) = 2, \quad T(b_3) = 2$$

Soit $p(t) = t^2$, calculer $T(p)$ ainsi que $[T(p)]_C$.

Quelle est la marche à suivre ?
Mettre dans l'ordre et éliminer les **2 intrus** :

a. Mettre sous forme échelonnée la matrice augmentée $(B|p)$.

b. Alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_2)$.

c. Calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\leftarrow$ en colonne).

d. Compléter la base C en une base de V.

e. Trouver les coordonnées de $T(p)$ par rapport à C.

Exercice 18

Soient $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $T \colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t - 1) + c(t - 1)^2.$$

Alors, on a $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, où

A. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19

Soit $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Considérer la base ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$.

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 20

Soient $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ linéaire et les bases ordonnées $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.