

Série 12, Rendu individuel (Corrigé)

Exercice 1

Soient

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et A une matrice 3×3 à coefficients réels telle que :

- $\lambda_1 = 4$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v}_1$
 - $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v}_2$
- (a) Calculer le polynôme caractéristique de A dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$?
- (b) Calculer D et P tels que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.
- (c) Calculez P^{-1} .
- (d) *Optionnel : calculez A*

Rappel :

$$\begin{aligned} e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} &= 2 \frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2 \cos(\pi/3) = 2 \frac{1}{2} = 1 \\ -ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} &= -i2 \frac{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}{2} = 2 \sin(\pi/3) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Solution :

Analyse du problème :

Puisque les coefficients de A sont réels, et λ_2 ne l'est pas, on peut trouver un couple de valeur et vecteur propre en prenant le complexe conjugué de l'égalité $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$:

$$\overline{A\mathbf{v}_2} = \overline{\lambda_2\mathbf{v}_2} \Leftrightarrow \overline{A}\overline{\mathbf{v}_2} = \overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v}_2} \Leftrightarrow A\overline{\mathbf{v}_2} = \overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v}_2}$$

Donc $\overline{\lambda_2}$ et $\overline{\mathbf{v}_2}$ sont une valeur et vecteur propre de A .

- (a) Puisque $\lambda_3 := \overline{\lambda_2} \neq \lambda_2$, nous avons trois valeurs propres de A , qui est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$:

$$\bullet \lambda_3 = 2e^{-i\pi/3} \text{ est une valeur propre associé au vecteur } \mathbf{v}_3 = \overline{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique de A est

$$c_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t) = (\lambda_1 - 4)(\lambda_2 \lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_1)t - t^2) = (\lambda_1 - 4)(4 - 4 \cos \frac{\pi}{3} t - t^2)$$

Il n'y a qu'une valeur propre réelle, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(b) On la propriété suivante : $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et P inversible, avec les valeurs propres sur la diagonale de D et les vecteurs propres associés dans les colonnes de P (dans le même ordre, mais on a le choix, p.ex. "3,2,1").

$$D = \begin{pmatrix} 2e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) L'inverse de P se calcule en calculant la forme échelonnée réduite de la matrice $(P|I_3)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -i & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-iL_1; L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + iL_3; L_2 - iL_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + L_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -i/2 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1 & 0 & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) On peut donc calculer $A = PDP^{-1} =$

$$\begin{aligned} & P \begin{pmatrix} 2e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ie^{i\pi/3} & e^{i\pi/3} & ie^{i\pi/3} \\ ie^{-i\pi/3} & e^{-i\pi/3} & -ie^{-i\pi/3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} & ie^{i\pi/3} - ie^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3} + 4 \\ -ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} & e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} & ie^{i\pi/3} - ie^{-i\pi/3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés, i.e. la droite de régression linéaire pour les points (x_i, y_i) .

Solution : Le système linéaire correspondant est $\mathbf{y} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation normale correspondante est $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T \mathbf{y}$. On multiplie donc par A^T le système et on obtient

$$A^T A = \begin{pmatrix} 129 & 21 \\ 21 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 54 \\ 9 \end{pmatrix}$$

L'inverse de $A^T A$ est

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{75} & -\frac{7}{75} \\ -\frac{7}{25} & \frac{43}{25} \end{pmatrix}$$

On obtient la solution $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{pmatrix}.$