Série 9, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ? Répondre sans calculer le polynôme charactéristique de A.

Solution : *En calculant $A - 6I_3$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent,* $\mathrm{Ker}(A - 6I_3) \neq \{\mathbf{0}\}$ *et* 6 *est une valeur propre.*

b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Solution : *On calcule :*

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 9I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de ces matrices (en développant par rapport à la deuxième ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ *et* $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$. *Ils sont non nuls, par conséquent ces matrices sont inversibles, et ni* 1 *ni* -9 *ne sont des valeurs propres.*

c) Maintenant calculer le polynôme charactéristique de A et les valeurs propres de A.

Solution : *En calculant le déterminant de $A - \lambda I_3$, on trouve que le polynôme caractéristique de A est* $(6 - \lambda)[(-15 - \lambda)(3 - \lambda) + 36]$. *Facilement, nous voyons que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A. Au lieu de cela, nous devons résoudre* $(-15-\lambda)(3-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 12\lambda - 9 = 0$, *pour trouver les deux autres valeurs propres.*

Les valeurs propres de A sont $\{6, \frac{-12+\sqrt{180}}{2}, \frac{-12-\sqrt{180}}{2}\}$.