

Série 7, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

Soient $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ et $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B .

Solution : P_{BC} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ dans la base B : $P_{BC} = ([\mathbf{c}_1]_B \ [\mathbf{c}_2]_B)$. Il faut donc résoudre deux systèmes linéaires afin de trouver $[\mathbf{c}_i]_B$, $i = 1, 2$:

$$\mathbf{c}_i = x_{1i}\mathbf{b}_1 + x_{2i}\mathbf{b}_2 = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2) \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P_{BC} est la solution de

$$(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2)P_{BC} = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2).$$

Si on désigne par E la base canonique, cela peut aussi être interprété comme $P_{EB}P_{BC} = P_{EC}$. Pour résoudre ce système linéaire, on échelonne et on réduit la matrice $(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2)$ augmentée avec les vecteurs $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$:

$$(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 | \mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

- b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C .

Solution : On a $P_{CB} = P_{BC}^{-1}$, d'où la matrice cherchée est $P_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

- c) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\mathbf{v}]_C$.

Solution : $[\mathbf{v}]_C = P_{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

- d) À présent, si $[\mathbf{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\mathbf{v}]_B$.

Solution : $[\mathbf{v}]_B = P_{BC} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.