

Série 6, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

Soit $\mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à 4 et $\mathbb{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à 3. Soit $T : \mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application linéaire qui associe à chaque polynôme sa dérivée, c'est à dire $T(p) = p'$ pour chaque $p \in \mathbb{P}_4$.

- Calculer le noyau de T et trouver sa dimension.
- Étant donné la base $\mathcal{B} = \{1 + x, 2x, x + x^2, x + x^3, x + x^4\}$ de $\mathbb{P}_4$ et la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{P}_3$, calculer la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ associé à T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
- Calculer la dérivée de $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$ en utilisant la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.
- Calculer une base et la dimension du noyau de la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Quel est le rapport avec le noyau de T ?

Rappel : la dérivée de $a_k x^k$ est $a_k k x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Solution :

- Le noyau de la transformation T est l'ensemble des polynômes de p dans $\mathbb{P}_4$ tels que $T(p) = 0$. Seulement les constants ont dérivée nulle, donc. $\text{Ker}(T) = \{p(x) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}\}$, dont une base est constitué du polynome constant $p(x) = 1$. On conclut aussi que $\dim \text{Ker}(T) = 1$.

- On peut écrire

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} &= [[T(b_1)]_{\mathcal{C}}, [T(b_2)]_{\mathcal{C}}, [T(b_3)]_{\mathcal{C}}, [T(b_4)]_{\mathcal{C}}, [T(b_5)]_{\mathcal{C}}] \\ &= [[1]_{\mathcal{C}}, [2]_{\mathcal{C}}, [1 + 2x]_{\mathcal{C}}, [1 + 3x^2]_{\mathcal{C}}, [1 + 4x^3]_{\mathcal{C}}] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Pour $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$, il faut d'abord trouver ses coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$: Les coefficients α_j doivent satisfaire $\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2x) + \alpha_3(x + x^2) + \alpha_4(x + x^3) + \alpha_5(x + x^4) = q(x)$. Il faut que les coefficients de chaque monome soient égaux, ce qui revient à résoudre le système linéaire dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \text{ La solution est } [q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Contrôle : $1(1+x) - \frac{1}{2}x + 0(x+x^2) + 4(x+x^3) - (x+x^4) = 1 + (1-1+4-1)x + 4x^3 - x^4 = q$

Les coefficients de sa dérivée q' peuvent être calculée comme suit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{[T]_{c\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{[p]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{[T(p)]_c},$$

cà-d, $q'(x) = 3 + 12x^2 - 4x^3$. Cela est cohérent avec le calcul direct de la dérivée de q .

(d) En partant de la matrice $[T]_{c\mathcal{B}}$, qui est déjà sous forme échelonnée, on remarque qu'il y a 4 colonnes pivot, donc $\text{rg}([T]_{c\mathcal{B}}) = 4$. En utilisant le théorème de rang :

$$\dim \text{Ker } [T]_{c\mathcal{B}} = (\text{nombre de colonnes de } [T]_{c\mathcal{B}}) - \text{rg}([T]_{c\mathcal{B}}) = 5 - 4 = 1.$$

De plus, x_2 est la seule variable libre du système et une base du $\text{Ker } [T]_{c\mathcal{B}}$ est par exemple :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Une base du noyau de $[T]_{c\mathcal{B}}$ est donnée par le polynome p tel que $[p]_c = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$, c'est à dire $p(x) = -2(1+x) + x = -2$, ce qui est cohérent avec le résultat au point (a), même si la base n'est pas égale. La dimension du noyau de $[T]_{c\mathcal{B}}$ est 1, comme la dimension du noyau de T .

Dans ce exercice, le contrôle est fait en regardant la correspondance entre les espaces des polynomes et les espaces coordonnées, par exemple entre T et $[T]_{c\mathcal{B}}$.